ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MAK212-SAYISAL YÖNTEMLER KISA SINAV 2
Dr. Nurdan Bilgin -16/03/2020

Öğrenci No :
İsim Soyisim :
Denklemlerin Köklerini Bulma İle İlgili İfadeler:

Yöntem	Formül	Hatalar ve Durdurma Kriteri
İkiye Bölme	$x_r = \frac{x_a + x_{\ddot{u}}}{2}$ $Eğer \quad f(x_a) * f(x_r) < 0 \Longrightarrow \quad x_{\ddot{u}} = x_r$ $Eğer \quad f(x_a) * f(x_r) > 0 \Longrightarrow \quad x_a = x_r$	$\left\lvert \frac{x_r^{yeni} - x_r^{eski}}{x_r^{yeni}} \right\rvert * 100 \leq \epsilon_s$
Yer Değiştirme	$x_r = x_{\ddot{u}} - \frac{f(x_{\ddot{u}}) * (x_a + x_{\ddot{u}})}{f(x_a) - f(x_{\ddot{u}})}$ $Eğer \quad f(x_a) * f(x_r) < 0 \Longrightarrow \quad x_{\ddot{u}} = x_r$ $Eğer \quad f(x_a) * f(x_r) > 0 \Longrightarrow \quad x_a = x_r$	$\left\lvert \frac{x_r^{yeni} - x_r^{eski}}{x_r^{yeni}} \right\rvert * 100 \leq \epsilon_s$
Newton-Raphson	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\left\lvert \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right\rvert * 100 \leq \epsilon_s$
	Doğrusal Olmayan Sistemler İçin	
	$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{dx} & \frac{\partial u_i}{dy} \\ \frac{\partial v_i}{dx} & \frac{\partial v_i}{dy} \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + J^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$	
Sekant	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) * (x_{i-1} + x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$	$\left\lvert \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right\rvert * 100 \leq \epsilon_s$
Sabit Noktalı İterasyon	$f(x) = 0 \Longrightarrow x = f(x) + x \Longrightarrow x = g(x)$ $x_{i+1} = g(x_i)$ Yakınsama Şartı: $\lvert g(x) \rvert < 1$	$\left\lvert \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right\rvert * 100 \leq \epsilon_s$
	Doğrusal Olmayan Sistemler İçin	
	$x_{i+1} = g_1(x_i, y_i)$ $y_{i+1} = g_2(x_{i+1}, y_i)$ Yakınsama Şartı: $\left\lvert \frac{\partial u}{dx} \right\rvert + \left\lvert \frac{\partial v}{dx} \right\rvert < 1$ $\left\lvert \frac{\partial u}{dy} \right\rvert + \left\lvert \frac{\partial v}{dy} \right\rvert < 1$	

Soru 1 (25 puan):

İkiye Ayırma Yöntemi $f(x) = \ln(x^2) - 0.8$					
xa	xr	xü	f(xa)	f(xr)	f(xü)
0,3	0,9	1,5	-3,20795	-1,01072	0,01093
0,9	1,2	1,5	-1,01072	-0,43536	0,01093
1,2	1,35	1,5	-0,43536	-0,19979	0,01093
1,35	1,425	1,5	-0,19979	-0,09166	0,01093
1,425	1,4625	1,5	-0,09166	-0,03971	0,01093

Yerdeğiştirme Yöntemi $f(x) = \ln(x^2) - 0.8$					
xa	xr	xü	f(xa)	f(xr)	f(xü)
0,3	1,495925	1,5	-3,20795	0,00549	0,01093
0,3	1,493882	1,495925	-3,20795	0,002756	0,00549
0,3	1,492857	1,493882	-3,20795	0,001384	0,002756
0,3	1,492343	1,492857	-3,20795	0,000695	0,001384
0,3	1,492085	1,492343	-3,20795	0,000349	0,000695

İkiye Ayırma Yöntemi $f(x) = x^{10} - 1$					
xa	xr	xü	f(xa)	f(xü)	f(ort)
0,3	0,9	1,5	-0,99999	-0,65132	56,66504
0,9	1,2	1,5	-0,65132	5,191736	56,66504
0,9	1,05	1,2	-0,65132	0,628895	5,191736
0,9	0,975	1,05	-0,65132	-0,22367	0,628895
0,975	1,0125	1,05	-0,22367	0,132271	0,628895

Yerdeğiştirme Yöntemi $f(x) = x^{10} - 1$					
xa	xr	xü	f(xa)	f(xr)	f(xü)
0,3	0,32081	1,5	-0,99999	-0,99999	56,66504
0,32081	0,341258	1,5	-0,99999	-0,99998	56,66504
0,341258	0,361352	1,5	-0,99998	-0,99996	56,66504
0,361352	0,381098	1,5	-0,99996	-0,99994	56,66504
0,381098	0,4005	1,5	-0,99994	-0,99989	56,66504

$f(x) = \ln(x^2) - 0.8$ ve $f(x) = x^{10} - 1$ fonksiyonlarının kökünü bulmak için ikiye ayırma ve yerdeğiştirme yöntemleri kullanılmıştır.

a.) Hangi yöntem, hangi fonksiyon için daha iyi sonuç vermiştir.

b.) Yerdeğiştirme yönteminin bir çok örnekte ikiye ayırma yönteminden daha iyi olduğu bilinmektedir. Ancak bazı fonksiyonlarda yer değiştirme yöntemi iyi çalışmamaktadır, bunun gerekçesi ara değeri bulmak için kullanılan ifadede yaklaşık türev açılımından yararlanılması olabilir mi? $f(x) = x^{10} - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizerek konuyu tartışınız.

Soru 2 (25 puan): Bir göldeki kirletici kütlesinin dengesi aşağıdaki ifade ile bulunmaktadır.

$$V\frac{dc}{dt} = W - Qc - kV\sqrt{c}$$

Bu ifadede $V = 1 \times 10^6\ m^3; Q = 1 \times 10^5 \frac{m^3}{yıl}; W = 1 \times 10^6\ g/yıl\ ve\ k = 0.2\ m^{0.5}/g^{0.5}/yıl$

Göl ekosistemi dengeye geldiğinde (Durgun Durum)

$$\frac{dc}{dt} \to 0$$

Olmaktadır.

a.) Göl ekosistemi dengeye geldiğinde herhangi bir açık kök bulma yöntemini kullanarak (Newton-Raphson, Sekant, Sabit noktalı iterasyon) göldeki kirletici oranını g/m^3 cinsinden bulunuz. Başlangıç değeri olarak $c = 5\ g/m^3$ alınız. Eğer sekant yöntemi kullancaksanız, bir önceki değer olarak $c_{i-1} = 4\ g/m^3$ alınız.

b.) Sabit noktalı iterasyonda,

$$c = \left(\frac{W - Qc}{kV}\right)^2 \quad ve\ c = \frac{W - kV\sqrt{c}}{Q}$$

Değerlerinden sadece biri yakınsamaktadır. Hangisinin yakınsadığını ve gerekçesini açıklayınız.

Soru 3 (25 puan): Aşağıdaki doğrusal olmayan denklem sistemi herhangi bir kök bulma yöntemi kullanarak çözülebilir mi (Başlangıç Değeri $x = y = 1$)?

$$x = y + x^2 - 0.5$$
$$y = x^2 - 5xy$$

a.) Hangi yöntemi ve neden seçtiğinizi açıklayınız.

b.) Seçtiğiniz yöntemle denklemin köklerini bulunuz.

Denklem Sistemleri İle İlgili Formuller:

Yöntem	Algoritma	**Olası Sorunlar ve Çözümleri**
Gauss Eleme	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & c_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \vdots & c'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \vdots & c'_3 \end{bmatrix}$ $x_3 = \frac{c'_3}{a'_{33}}$ $\Rightarrow \quad x_2 = \frac{c'_2 - a'_{23}x_3}{a'_{22}} \quad ;$ $x_1 = \frac{c_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3}{a_{11}}$	**Sorunlar:** Kötü-Koşullanma Yuvarlama Hataları Sıfıra Bölme **Çözümler:** Hassasiyet artırma Satırların yerlerini değiştirme
Gauss-Jordan	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & c'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & c'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c'_3 \end{bmatrix}$ $x_1 = c'_1$ $\Rightarrow x_2 = c'_2;$ $x_3 = c'_3$	
LU ayrıştırması	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$	
Gauss Siedel	$x_1^i = \frac{c_1 - a_{12}\, x_2^{i-1} - a_{13}\, x_3^{i-1}}{a_{11}}$ $x_2^i = \frac{c_2 - a_{21}\, x_1^{i} - a_{23}\, x_3^{i-1}}{a_{22}}$ $x_3^i = \frac{c_3 - a_{31}\, x_1^{i} - a_{32}\, x_2^{i}}{a_{33}}$ Yakınsama Kriteri: $\lvert a_{ii} \rvert > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lvert a_{ij} \rvert$	**Sorunlar:** Iraksama veya yavaş yakınsama **Çözümler:** Yöntemin Revizyonu $0 < \lambda < 1$ $x_i^{yeni} = \lambda x_i^{yeni} + (1-\lambda) x_i^{eski}$

Soru 4 (25 puan): Aşağıda verilen denklem sistemlerini çözmek için elde hesap makinesi ile işlem yapılıyor ise

Birinci Problem	İkinci Problem
$2x_1 - 6x_2 = -18$ $-x_1 + 8x_2 = 40$	$4x_1 + x_2 - x_3 = -2$ $5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ $6x_1 + x_2 + x_3 = 6$

a.) Hangi yöntemleri kullanmak daha uygundur açıklayınız.

b.) İkinci Problemi Gauss Eleme Yöntemi ile gerekli basitleştirmeleri yaparak çözünüz.

Soru 5 (25 Puan): Aşağıdaki problemlerden hangisini Gauss-Siedel ile çözemezsiniz, kanıtlayınız

Birinci Problem	İkinci Problem	Üçüncü Problem
$17x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -36$ $3x_1 + 14x_2 - x_3 + x_4 = -32$ $3x_1 - 1x_2 + 18x_3 = -4$ $-3x_1 - x_3 + 21x_4 = 48$	$19x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -18$ $-2x_1 + 14x_2 - 2x_3 + x_4 = 27$ $-x_1 + 2x_2 + 15x_3 - 2x_4 = 33$ $x_2 + 17x_4 = 19$	$7x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3$ $6x_2 - 2x_3 - x_4 = -9$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$ $-3x_3 + 6x_4 = 12$

Soru 6 (25 puan): Makine Mühendisliği alanında optimizasyon yöntemlerine ihtiyaç duyacağımız bir problem tanımlayınız.

Soru 7 (25 puan): Golden arama algoritması ile ikiye bölme ve yerdeğiştirme yöntemleri arasındaki benzerlik ve farkları belirtiniz.

Soru 8 (25 puan): Kapalı bir ortamda büyüyen canlı bir organizmanın büyüme hızı (g) fonksiyonu ile ortamdaki besin yoğunluğu (c) arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$g = \frac{2c}{4 + 0.8c + c^2 + 0.2c^3}$$

a) Bu problemi hangi optimizasyon yöntemiyle çözmek daha uygun olur, gerekçenizi açıklayınız
b) Golden Arama Algoritması ile **maksimum** besin yoğunluğu değerini $x_a = 1\ ve\ x_ü = 2$ başlangıç değerlerinden başlayarak **en çok iki iterasyon** yaparak bulunuz.

Not: Golden Arama Algoritması $R = 0.618; a = R(x_ü - x_a); x_1 = x_a + a; x_2 = x_ü - a;$

- Eğer $f(x_1)<f(x_2)$ ise, x_1'in sağında kalan x_1 ile $x_ü$ arasındaki bölge atılır. Bu durumda ikinci adım için x_1 yeni $x_ü$ olur.

- Eğer $f(x_1)>f(x_2)$ ise, x_2'nin solunda x_a ile x_2 arasındaki bölge atılabilir. Bu durumda ikinci adım için x_2 yeni x_a olur.