Otomatik Kontrol

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Hazırlayan: Dr. Nurdan Bilgin

Kapalı Çevrim Kontrol
Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Tüm uygulamalar için aşağıdaki genel gereklilikler karşılanmaksızın bir kontrol sisteminin genel performansı tatmin edici olmaz:

- ✓ **Kararlılık**
- ✓ **Sistemlerin Kalıcı Durum Davranışı**
- ✓ **Sistemlerin Geçici Durum Davranışı**
  - ✓ **Birinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı**
  - ✓ **İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı**
  - ✓ **Geçici Durum Davranışı Parametreleri**

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Birinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$ gibi doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi ele alalım.

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

Bu sistemin adım girişe cevabıyla ilgileniyoruz;

- Adım, $x(t) = x_o h(t); X(s) = \frac{x_o}{s}$
- Başlangıç koşulları

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \cdots = 0$$
$$y_0 = y(0^+) ve \dot{y}_0 = \dot{y}(0^+)$$

Hatırlatma

Son değer teoremi:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[sF(s)]$$

İlk değer teoremi:

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty}[sF(s)]$$

Birinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} = K\frac{(T_0 s + 1)}{Ts + 1}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0} = G(0)\text{: Durgun durum kazancı yada DC kazanç}$$

$$T = \frac{a_1}{a_0}: Sistemin\ zaman\ sabiti$$

$$T_0 = \frac{b_1}{b_0}: Payın\ zaman\ sabiti$$

$$Y(s) = G(s)X(s) \Longrightarrow Y(s) = K\frac{(T_0 s + 1)}{Ts + 1}X(s)$$

$$\Longrightarrow Y(s)(Ts + 1) = K(T_0 s + 1)X(s)$$

Bu ilişkinin ters Laplace'ını alırsak

$$T\dot{y}(t) + y(t) = KT_0\dot{x}(t) + Kx(t)$$

Burada giriş olarak adım giriş kullanacağız yani $x(t) = x_0 h(t)$

$a.)\ T_0 = 0$

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} = K\frac{(T_0 s + 1)}{Ts + 1}$$

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1}\frac{x_0}{s}$$

Son değer teoremine göre

$$y_f = Kx_0$$

İlk değer teoremine göre

$$y_0 = 0$$

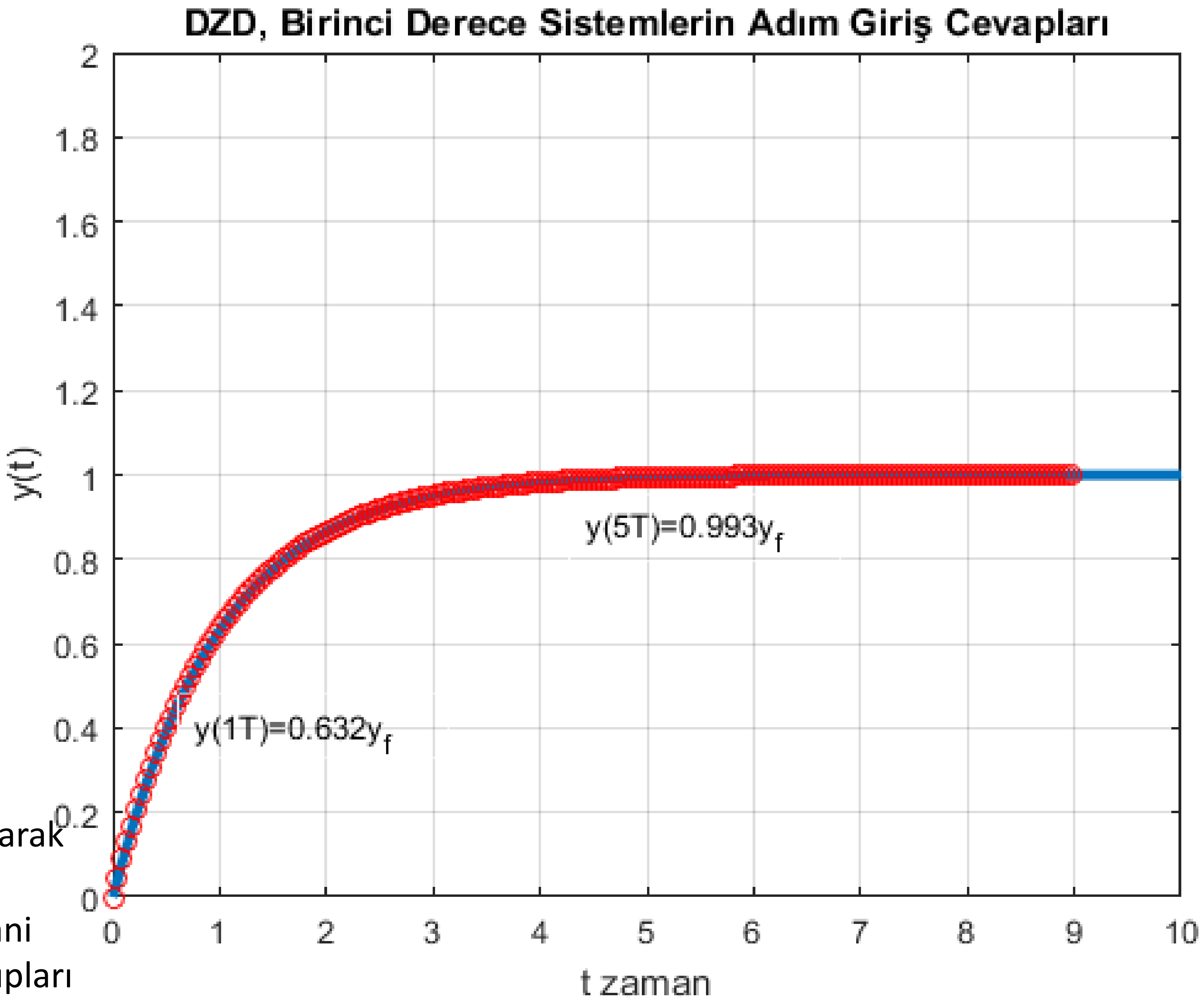
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K}{Ts + 1}\frac{x_0}{s}\right)$$

$$y(t) = y_f\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)h(t)$$

$$\dot{y}_0 = \frac{y_f}{T} = tan\theta$$

Pratikte tüm $t > 5T$ zamanları için $y \cong y_f$ olarak alınabilir.

T küçük olduğunda sistem çok daha hızlıdır, yani durgun duruma daha hızlı ulaşır. Sistemin kutupları imajiner eksenden uzaktadır.



b.) $T_0 \neq 0$

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} = K\frac{(T_0 s + 1)}{Ts + 1}$$

$$Y(s) = \frac{K(T_0 s + 1)}{Ts + 1}\frac{x_0}{s}$$

Son değer teoremine göre

$$y_f = Kx_0$$

İlk değer teoremine göre

$$y_0 = K\frac{T_0}{T}x_0 = y_f\frac{T_0}{T}$$

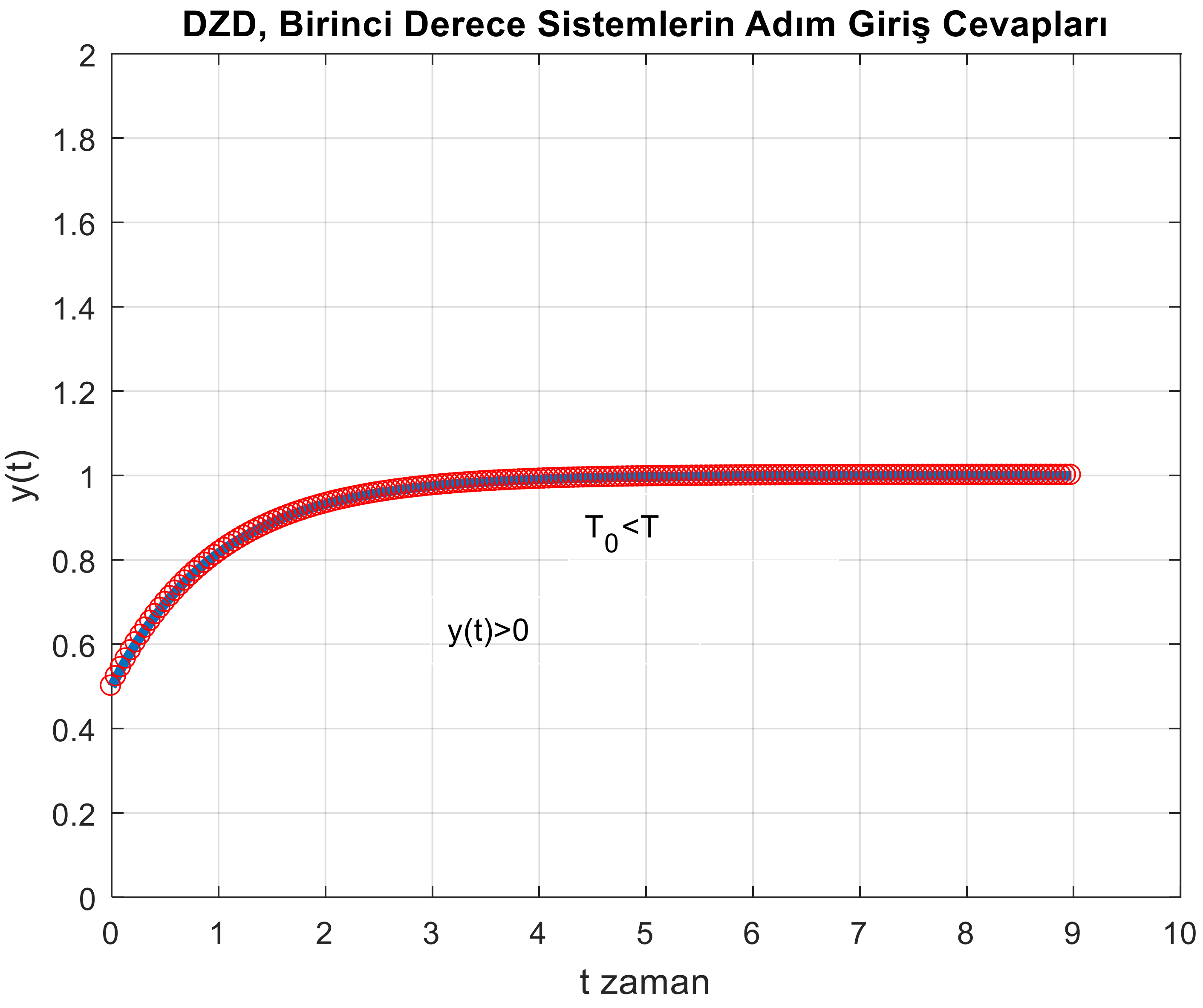
$$\dot{y}_0 = \frac{y_f - y_0}{T}\text{(Sıfırdan başlamıyor sıçrama var)}$$

Not:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K(T_0 s + 1)}{Ts + 1}\frac{x_0}{s}\right)$$

$$y(t) = Kx_0\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\left[(T_0/T) + \frac{1 - T_0/T}{Ts + 1}\right]\right\}$$

$$y(t) = Kx_0\left\{\frac{T_0}{T} + \frac{1 - \frac{T_0}{T}}{T}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + 1/T}\frac{1}{s}\right)\right\}$$



$b.)\ T_0 \neq 0$

$$y(t) = Kx_0\left\{\frac{T_0}{T} + \frac{1-\frac{T_0}{T}}{T}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1/T}\frac{1}{s}\right)\right\}$$

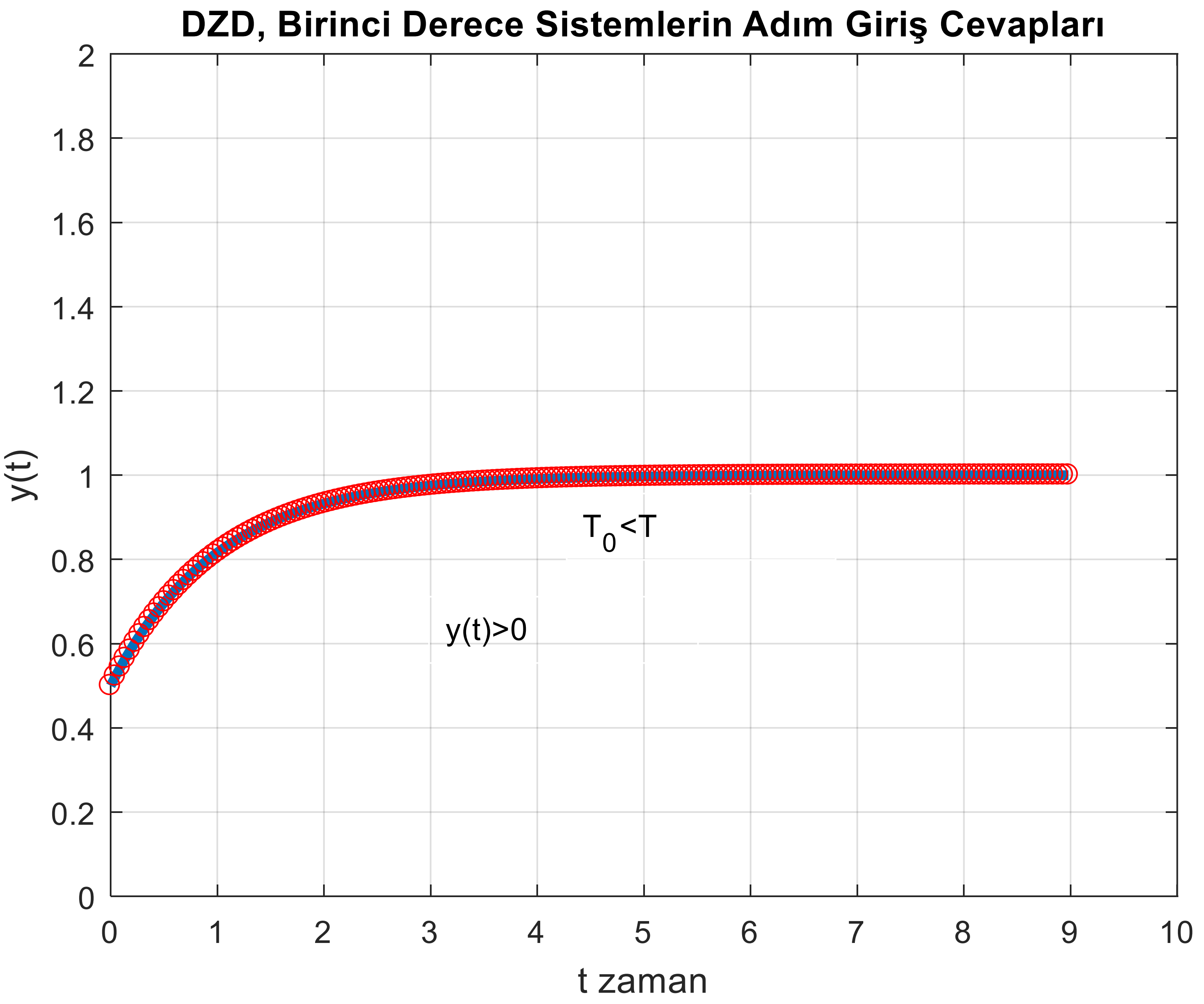
Not:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$$

$$y(t) = Kx_0\left\{\frac{T_0}{T} + \frac{1-\frac{T_0}{T}}{T}\,T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right\}$$

$$y(t) = y_0 + (\mathrm{y_f} - \mathrm{y_0})\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

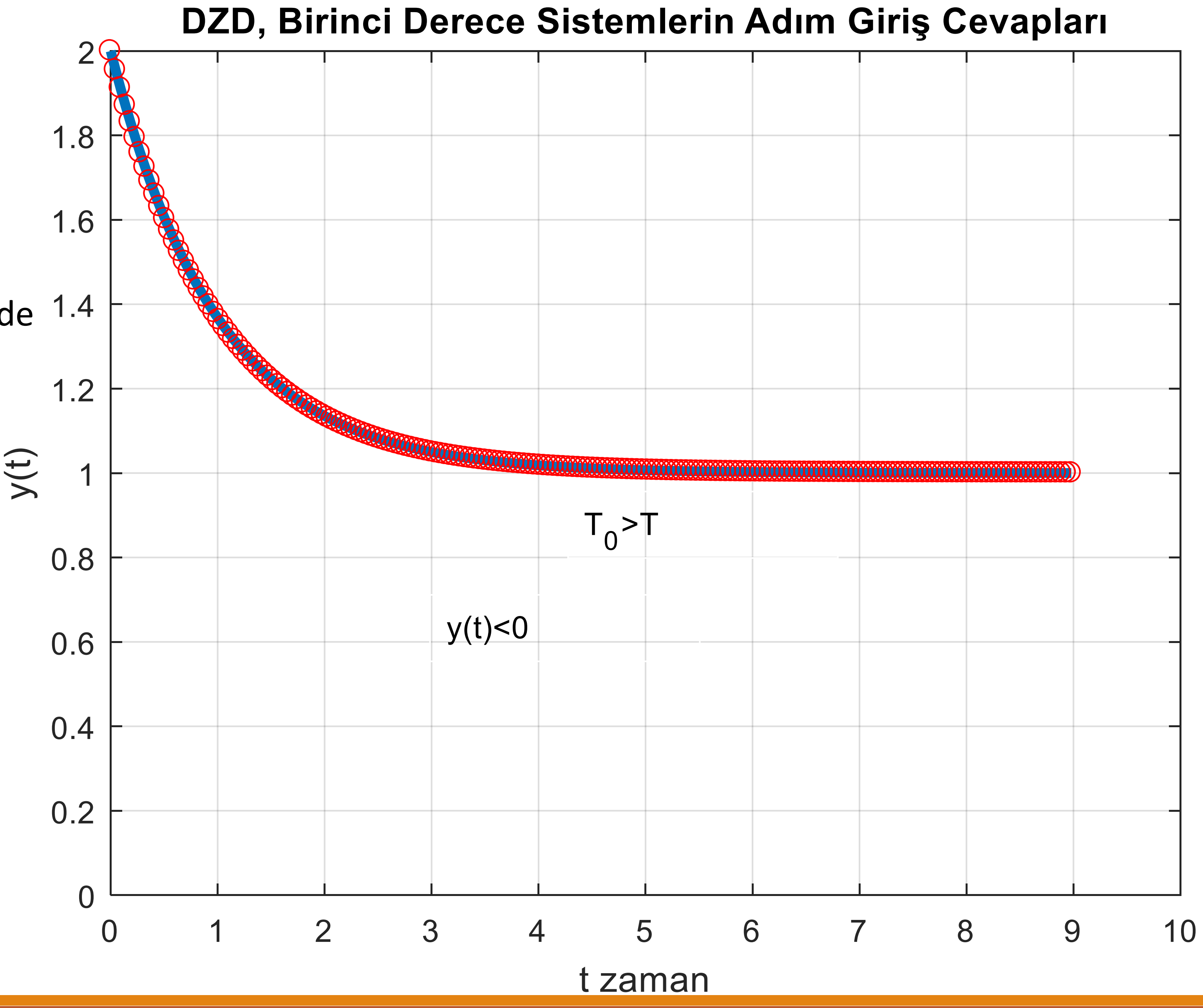
$$\dot{y}_0 = \frac{\mathrm{y_f}-\mathrm{y_0}}{\mathrm{T}}$$



$$y(t) = y_0 + (y_f - y_0)\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T}(y_f - y_0)e^{-\frac{t}{T}}$$

Türevin işareti $y_f - y_0$ ifadesine bağlıdır.
Kararlılık şartı gereği T'nin sıfırdan büyük
olması gerekir.
$T_0 > T > 0$ şartı oluştuğunda yandaki şekilde
Görülen grafik oluşur.



```
clear all;
close all; clc;
t=[0:0.1:10];
fig=figure;

for i=1:length(t)
y(i)=1-exp(-t(i)/1);
end
plot(t,y,'LineWidth',3);hold on;

s = tf('s');
G = 1/(s+1);
[y,t]=step(G);
plot(t,y,'ro');hold on;
axis([0 10 0 2]);grid on;
ylabel('y(t)');xlabel('t zaman')
title('DZD, Birinci Derece Sistemlerin Adým Giriþ Cevaplarý');
annotation(fig,'textbox',[0.461714285714281 0.435714285714286 0.195428571428571 0.0642857142857248],'String','y(5T)=0.993y_f','EdgeColor',[1 1 1]);
annotation(fig,'textbox',[0.177785714285709 0.242857142857143 0.195428571428571 0.0619047619047736],'String','y(1T)=0.632y_f','EdgeColor',[1 1 1]);
```

```
fig1=figure;

for i=1:length(t)
y(i)=0.5+0.5*(1-exp(-t(i)/1));
end
plot(t,y,'LineWidth',3);hold on;

s = tf('s');
G = (0.5*s+1)/(s+1);
[y,t]=step(G);
plot(t,y,'ro');hold on;
axis([0 10 0 2]);
ylabel('y(t)');xlabel('t zaman')
title('DZD, Birinci Derece Sistemlerin Adým Giriþ Cevaplarý');
annotation(fig1,'textbox',[0.461714285714281 0.435714285714286 0.195428571428571 0.0642857142857248],'String','T<T_0','EdgeColor',[1 1 1]);
annotation(fig1,'textbox',[0.361714285714281 0.335714285714286 0.195428571428571 0.0642857142857248],'String','y(t)>0','EdgeColor',[1 1 1]);

grid on;

fig2=figure;

for i=1:length(t)
y(i)=2-(1-exp(-t(i)/1));
end
plot(t,y,'LineWidth',3);hold on;

s = tf('s');
G = (2*s+1)/(s+1);
[y,t]=step(G);
plot(t,y,'ro');hold on;
grid on;
axis([0 10 0 2]);
ylabel('y(t)');xlabel('t zaman')
title('DZD, Birinci Derece Sistemlerin Adým Giriþ Cevaplarý');
annotation(fig2,'textbox',[0.461714285714281 0.435714285714286 0.195428571428571 0.0642857142857248],'String','T>T_0','EdgeColor',[1 1 1]);
annotation(fig2,'textbox',[0.361714285714281 0.335714285714286 0.195428571428571 0.0642857142857248],'String','y(t)<0','EdgeColor',[1 1 1]);
```

Örnek Problem Çözümü

Problem: Grafikte birinci dereceden bir sistemin birim adım girişe veya $x(t) = x_0 h(t)$ gibi bir adım girişe verdiği cevap görülmektedir. $K, T_0\ ve\ T$'yi bulunuz.

Çözüm:

1. Grafiği inceleyerek $y_0\ , y_f\ \ ve\ \dot{y}_o = \tan(\theta)$'yı belirleyeceğiz.

2. $y_f = K x_0$ olduğuna göre burdan K bulunur.

3. $\dot{y}_0 = \frac{\mathrm{y_f - y_0}}{\mathrm{T}}$ ifadesinden T bulunur.

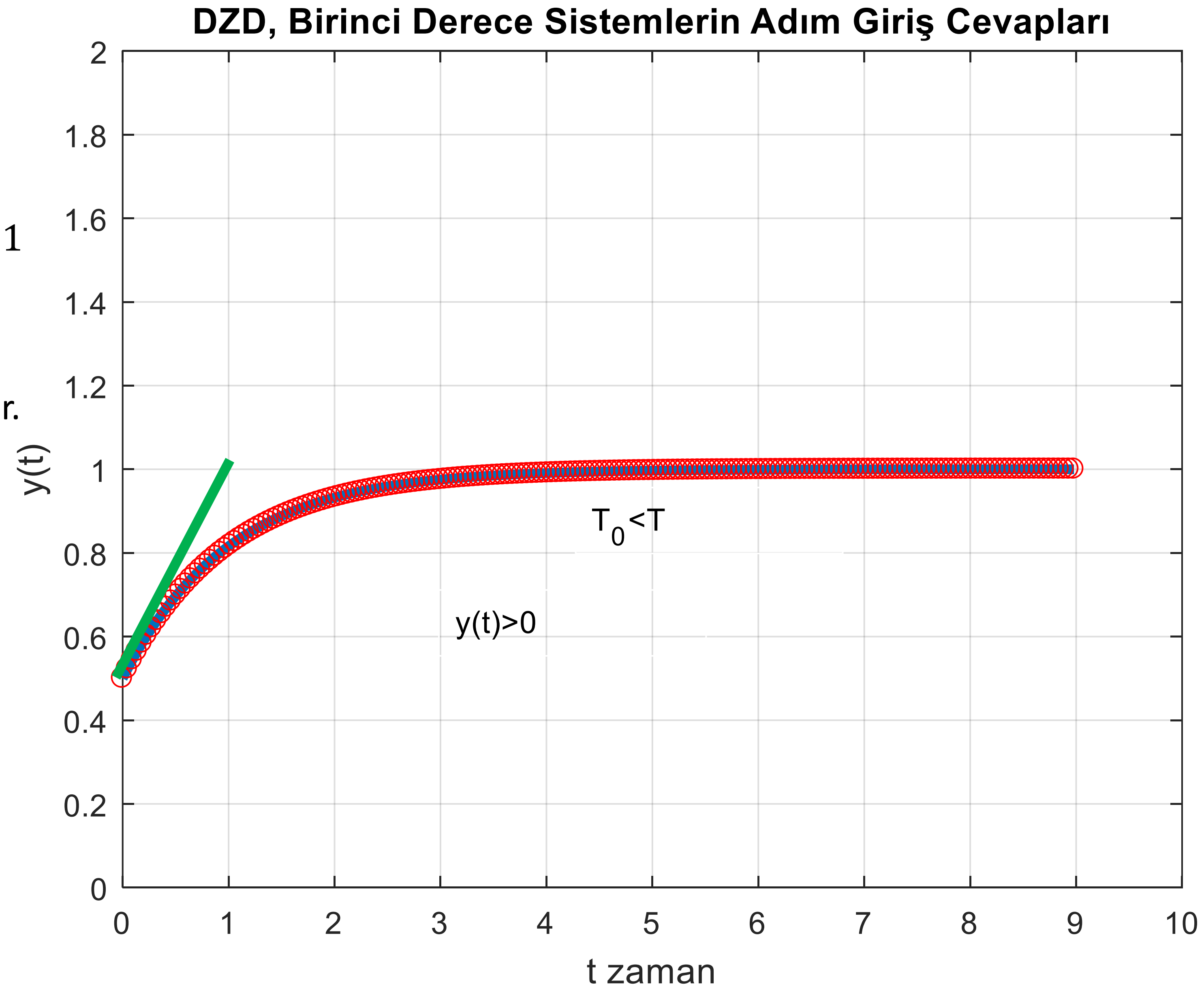
4. $y_0 = K \frac{T_0}{T} x_0$ ifadesinden T_0 bulunur.

Çözüm ancak bu sırada işlemler gerçekleştirilerek elde edilebilir.

Problem: Grafikte birinci dereceden bir sistemin birim adım girişe verdiği cevap görülmektedir.

$K, T_0\ ve\ T$'yi bulunuz.

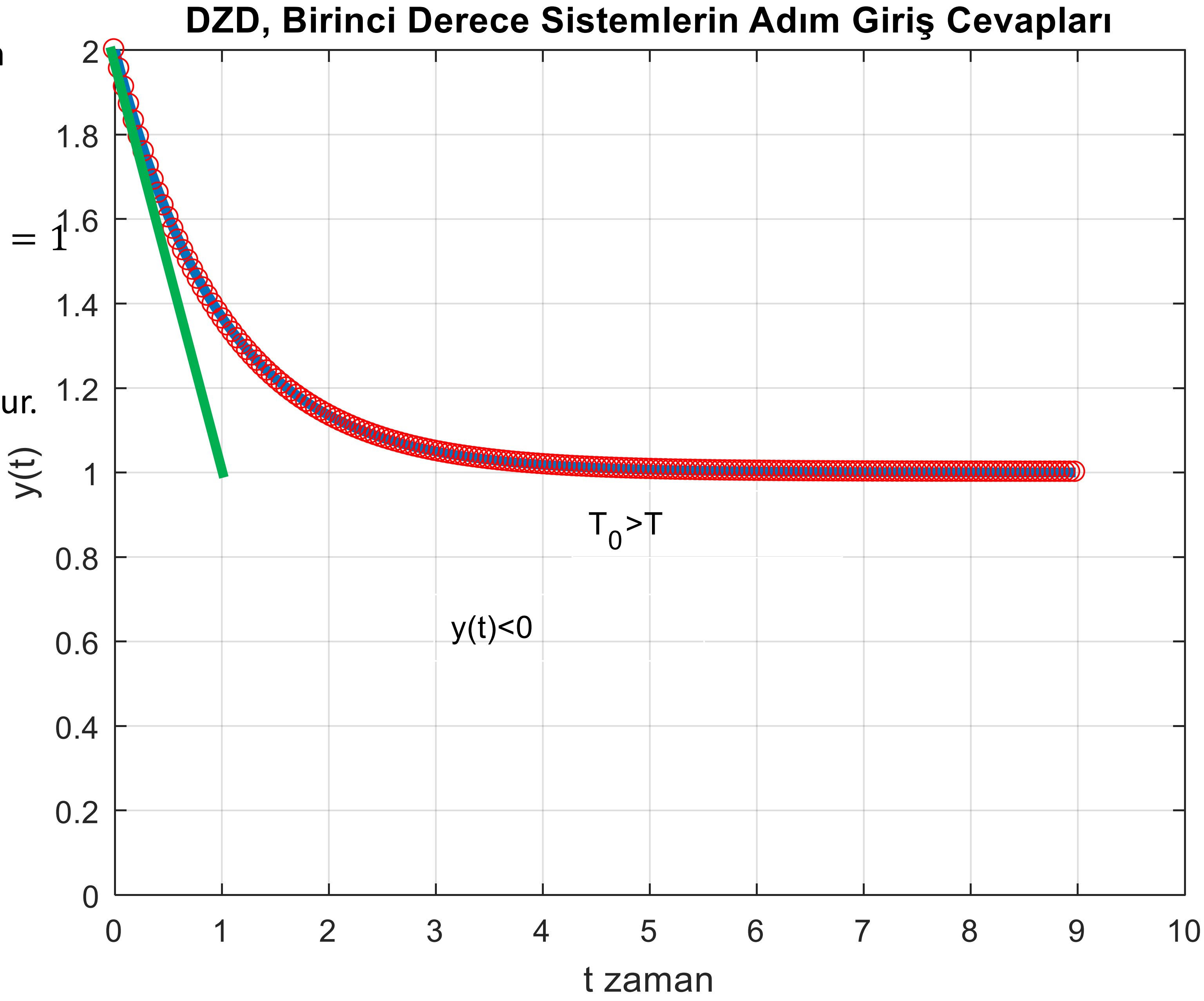
1. Grafikten $y_0 = 0.5\ , y_f = 1\ ve\ \dot{y}_o = 0.5$
2. $y_f = Kx_0$ ve x_0=1 olduğuna göre burdan $K = 1$ olarak bulunur.
3. $\dot{y}_0 = \frac{\mathrm{y_f - y_0}}{\mathrm{T}}$ ifadesinden $T = 1$ olarak bulunur.
4. $y_0 = K\frac{T_0}{T}x_0$ ifadesinden $T_0 = 0.5$ olarak bulunur.



Problem: Grafikte birinci dereceden bir sistemin birim adım girişe verdiği cevap görülmektedir.

K, T_0 *ve* T'yi bulunuz.

1. Grafikten $y_0 = 2$, $y_f = 1$ *ve* $\dot{y}_o = -1$
2. $y_f = Kx_0$ ve x_0=1 olduğuna göre burdan $K = 1$ olarak bulunur.
3. $\dot{y}_0 = \frac{y_f - y_0}{T}$ ifadesinden $T = 1$ olarak bulunur.
4. $y_0 = K\frac{T_0}{T}x_0$ ifadesinden $T_0 = 2$ olarak bulunur.



Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri
İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

gibi doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi ele alalım. Bu sistemin adım girişe cevabıyla ilgileniyoruz;

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

Adım, $x(t) = x_o h(t)$;

$$X(s) = \frac{x_o}{s}$$

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_0\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{a_0\left(\frac{a_2}{a_0}s^2 + \frac{a_1}{a_0}s + 1\right)} = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$K = \frac{b_0}{a_0}; Durgun\ Durum\ Kazancı;$

$T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$, sistemin karakteristik zamanı;

$T_0 = \frac{b_1}{b_0}$, payın karakteristik zamanı;

$2\xi T = \frac{a_1}{a_0} \Longrightarrow \xi = \frac{a_1/a_0}{2T} = \frac{a_1/a_0}{2\omega_n}$; ξ=sönümleme oranı;

Çünkü $\omega_n = \frac{1}{T} = sönümlenmiş\ doğal\ frekans;$

$\eta = \frac{T_0}{T} = \omega_n T_0$; Karakteristik zaman oranı

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

$$G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\sigma = \xi\omega_n = sönümlenme\ hızı$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = Sönümlü\ doğal\ frekans$$

ξ'ye göre sınıflandırma

$\xi = 0 \Longrightarrow$ Sönümsüz Sistem

$0 < \xi < 1 \Longrightarrow$ Az Sönümlü Sistem

$\xi = 1 \Longrightarrow$ Kritik Sönümlü Sistem

$\xi > 1 \Longrightarrow$ Aşırı Sönümlü Sistem

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sistemin kutup ve sıfırlarını bulalım.

Sıfır; $z_1 = -\dfrac{1}{T_0} = -\dfrac{\omega_n}{\eta} = -\dfrac{b_0}{b_1}$

Kutuplar; $p_{1,2} = -\xi\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$; Dolayısıyla

$\xi > 1 \Longrightarrow$ 2 farklı gerçek kök $p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$

$\xi = 1 \Longrightarrow$ 2 eşit gerçek kök $p_{1,2} = -\omega_n$

$0 < \xi < 1 \Longrightarrow$ 2 kompleks eşlenik kök $p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = -\sigma \pm j\omega_d$

$\xi = 0 \Longrightarrow$ 2 sanal kök $p_{1,2} = \mp j\omega_n$

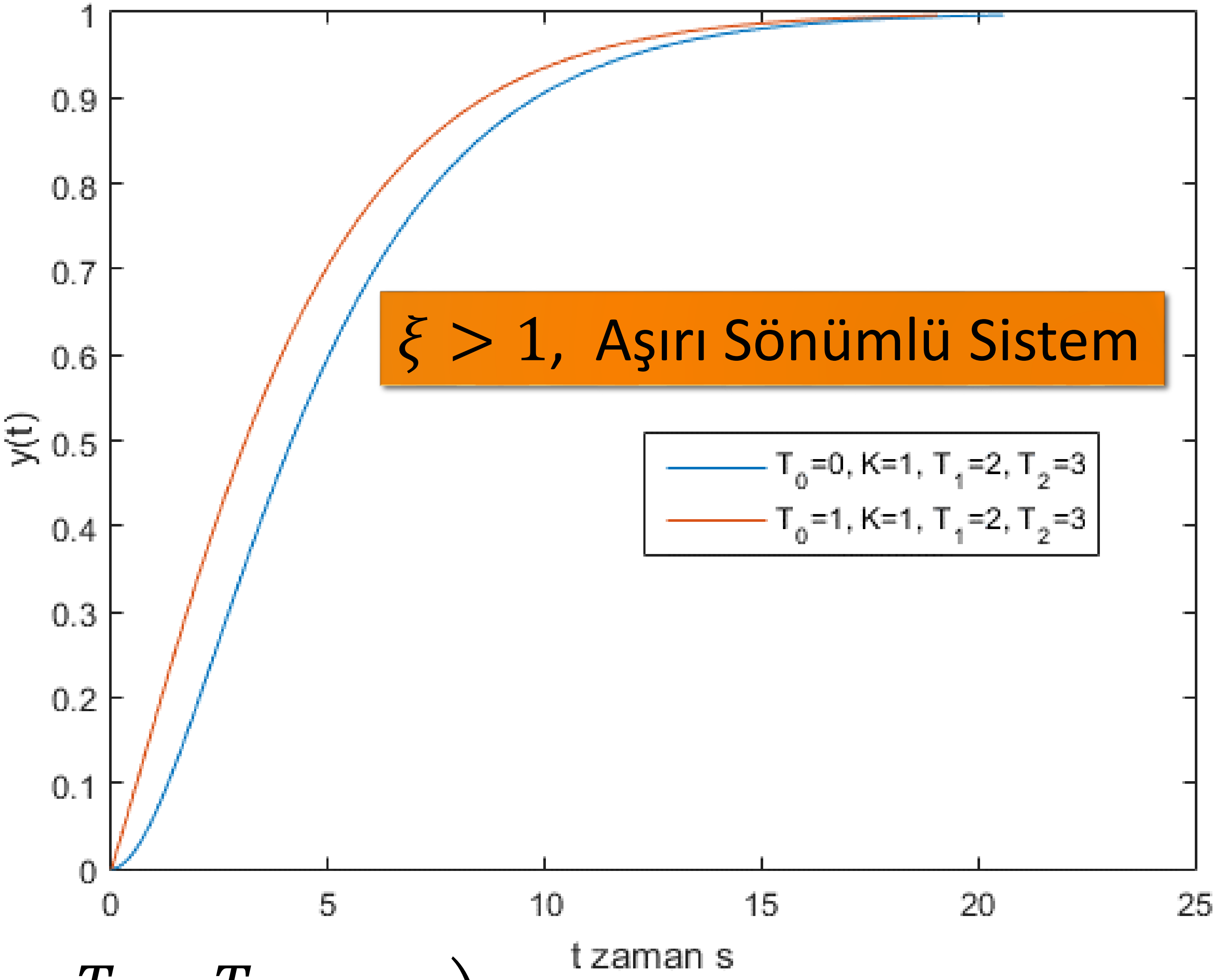
$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

$$ya\ da$$

$$G(s) = K\frac{\eta \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{K_1}{(T_1 s + 1)} - \frac{K_2}{(T_2 s + 1)}$$



$\xi > 1,$ Aşırı Sönümlü Sistem

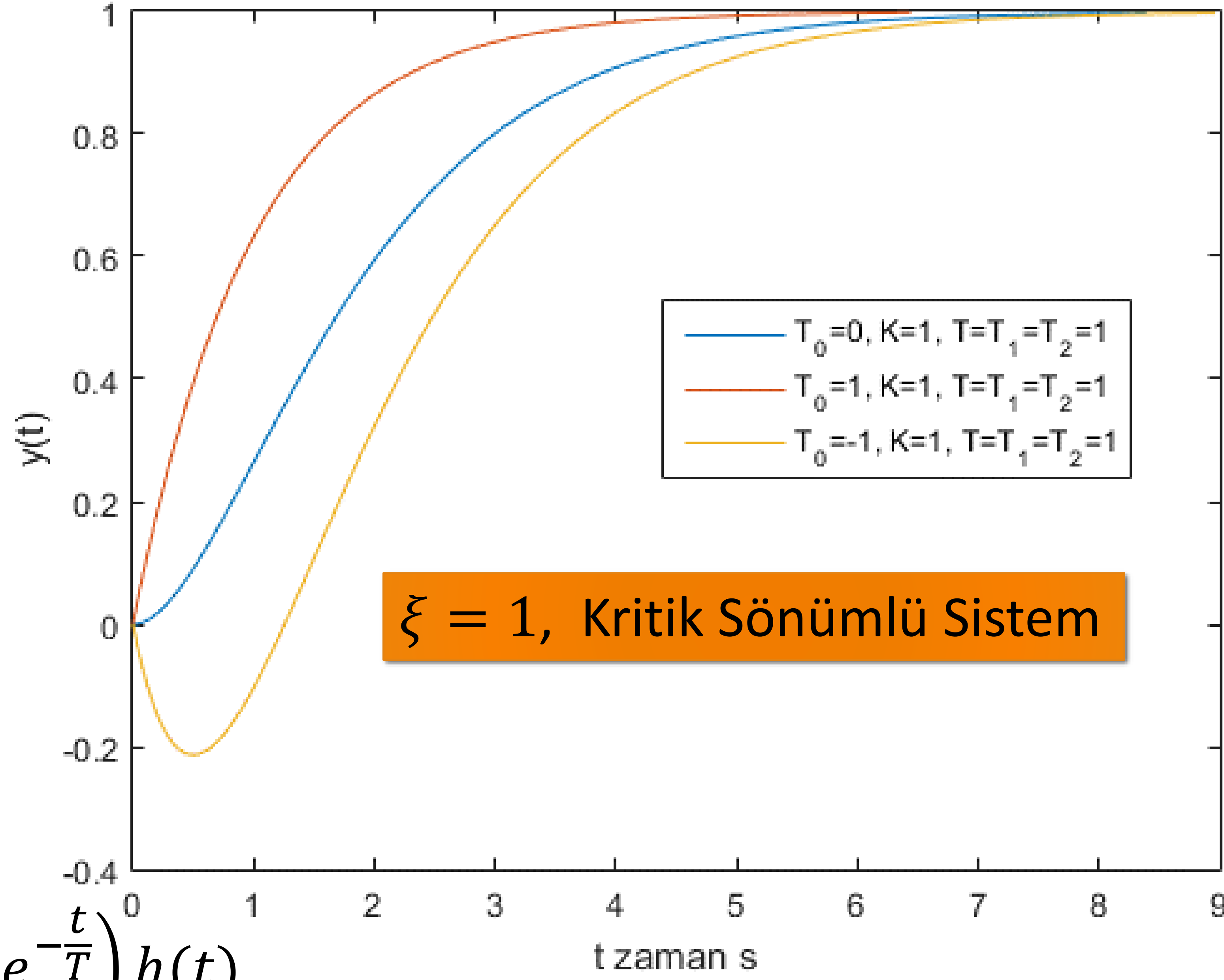
$$y(t) = y_f\left(1 - \frac{T_1 - T_0}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}\right) h(t)$$

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

ya da

$$G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{(Ts + 1)^2}$$



$\xi = 1$, Kritik Sönümlü Sistem

$$y(t) = y_f\left(1 - \left(1 + \frac{T - T_0}{T^2}t\right)e^{-\frac{t}{T}}\right)h(t)$$

Az Sönümlü Sistem

$0 < \xi < 1 \Longrightarrow$ 2 kompleks eşlenik kök $p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = -\sigma \pm j\omega_d$

$$G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

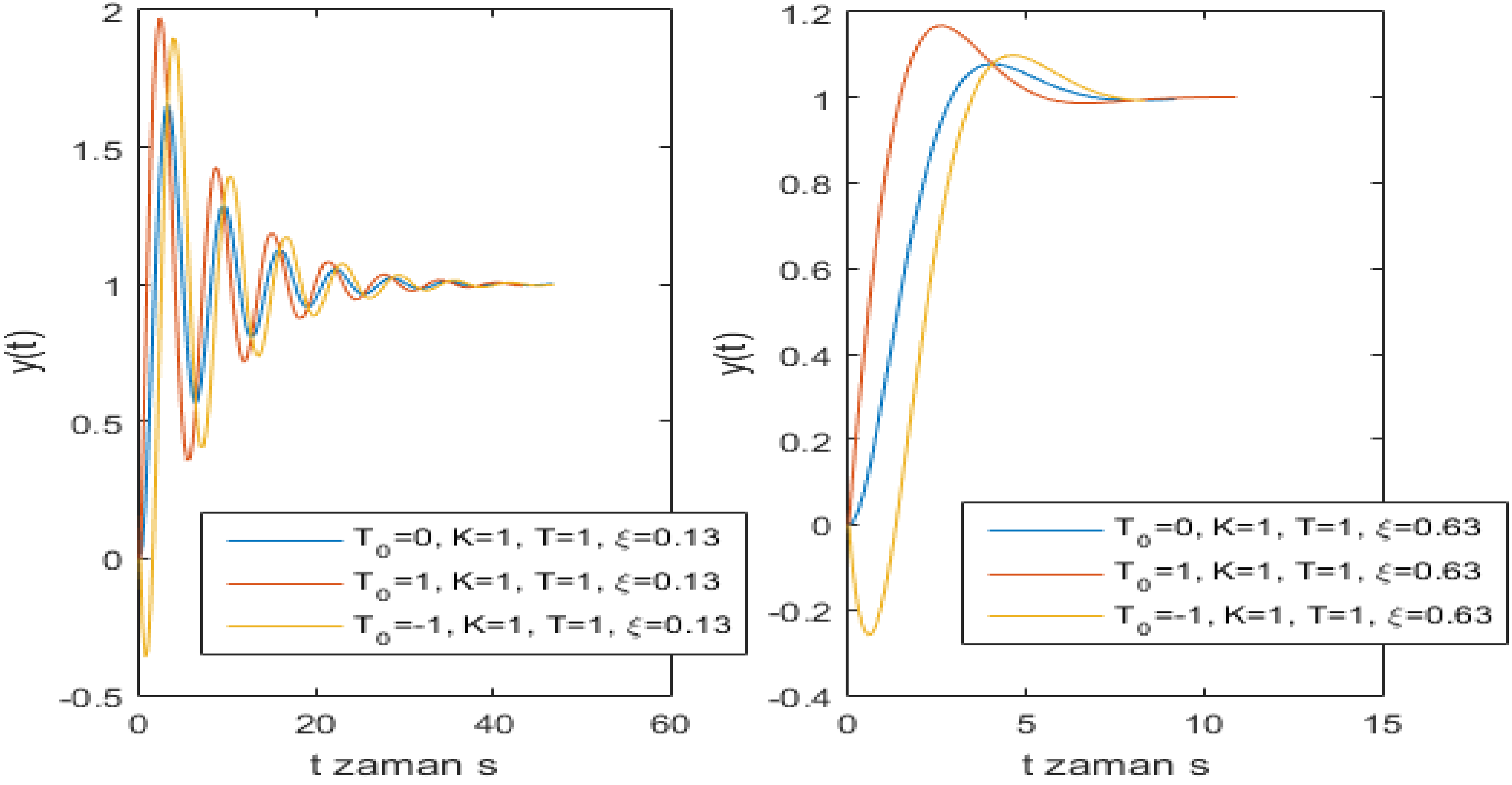
$$y(t) = y_f\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi - \eta}{\sqrt{1 - \xi^2}}\sin\omega_d t\right)\right)h(t)$$

$$y(t) = y_f\big(1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)\big)h(t)$$

$$y(t) = y_f\big(1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \psi)\big)h(t)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)\ ve\ \psi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi - \eta}\right), iki\ açıda\ ilk\ çeyrekte$$

$$a_0 = \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta\xi + 1}}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = Sönümlü\ doğal\ frekans$$



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
20
40
60
y(t)
t zaman s
T o=0, K=1, T=1, ξ=0.13
T o=1, K=1, T=1, ξ=0.13
T o=-1, K=1, T=1, ξ=0.13
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
5
10
15
y(t)
t zaman s
T o=0, K=1, T=1, ξ=0.63
T o=1, K=1, T=1, ξ=0.63
T o=-1, K=1, T=1, ξ=0.63

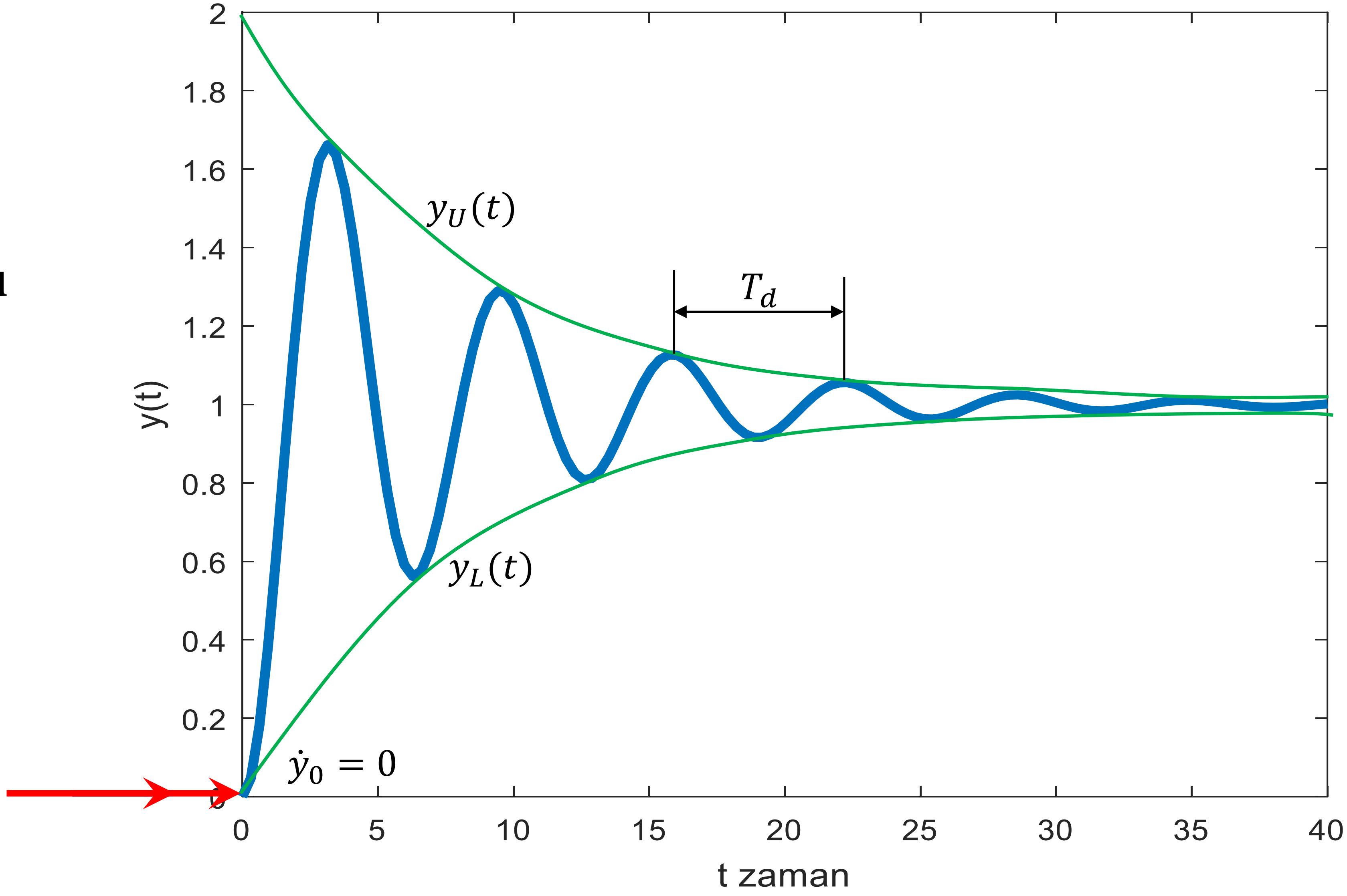
Üst zarfın denklemi;

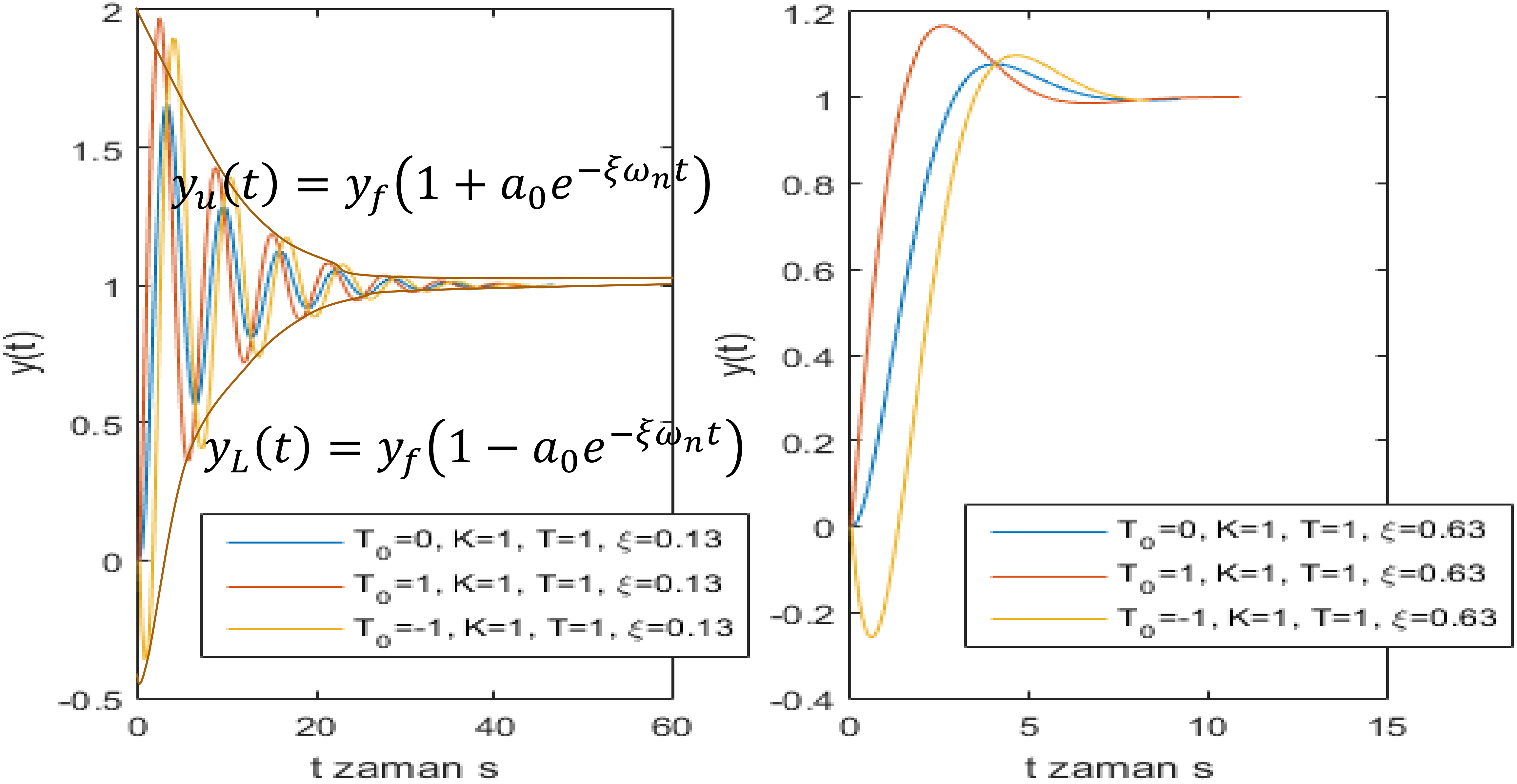
$$y_u(t) = y_f\left(1 + a_0 e^{-\xi\omega_n t}\right)$$

Alt zarfın denklemi

$$y_L(t) = y_f\left(1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\right)$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$; Sönüm periyodu



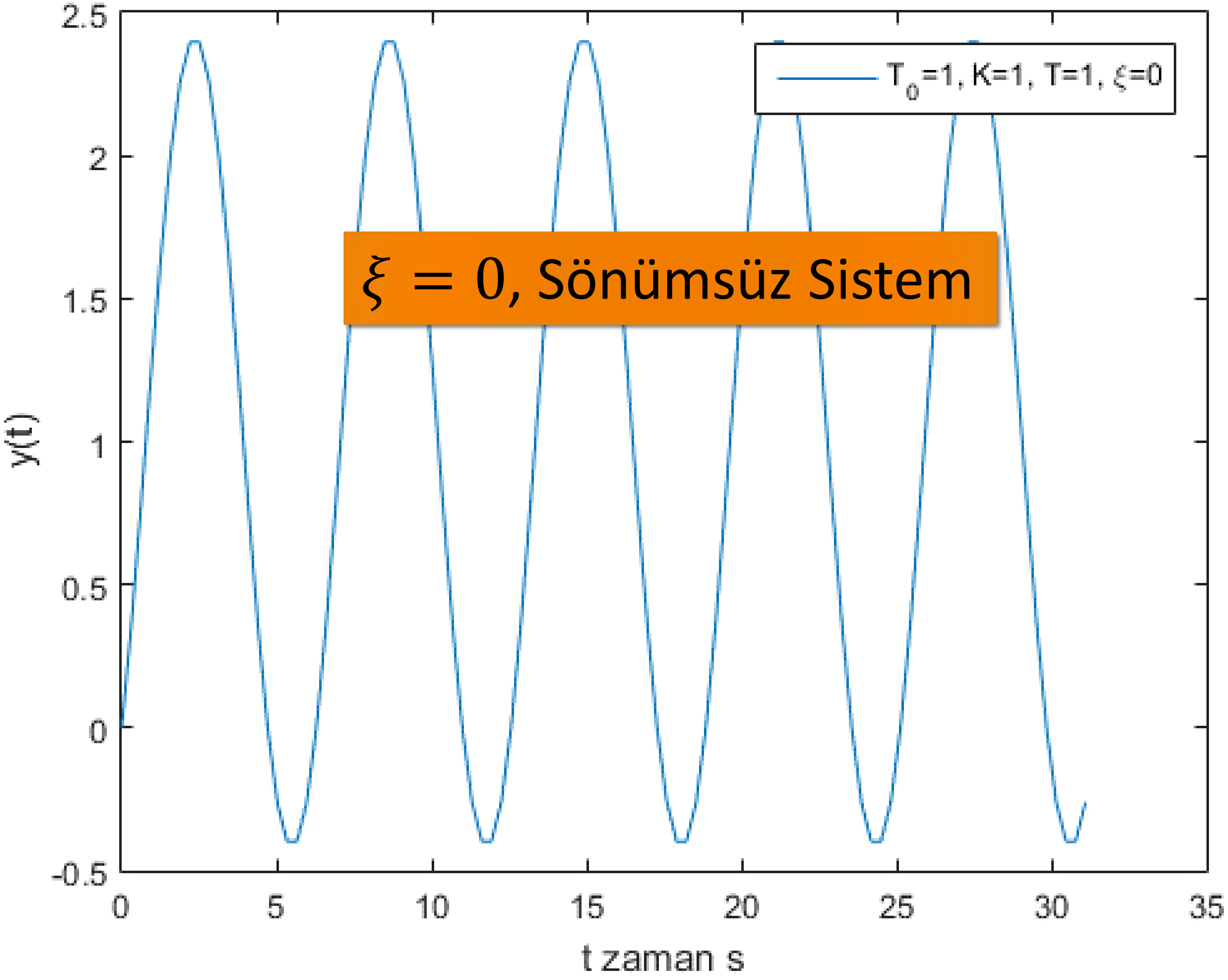


$y_u(t) = y_f\left(1 + a_0 e^{-\xi\omega_n t}\right)$
$y_L(t) = y_f\left(1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\right)$
y(t)
t zaman s
T_o=0, K=1, T=1, ξ=0.13
T_o=1, K=1, T=1, ξ=0.13
T_o=-1, K=1, T=1, ξ=0.13
T_o=0, K=1, T=1, ξ=0.63
T_o=1, K=1, T=1, ξ=0.63
T_o=-1, K=1, T=1, ξ=0.63

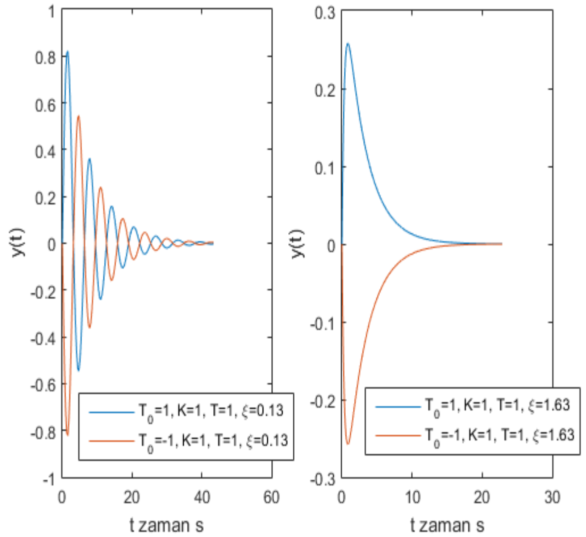
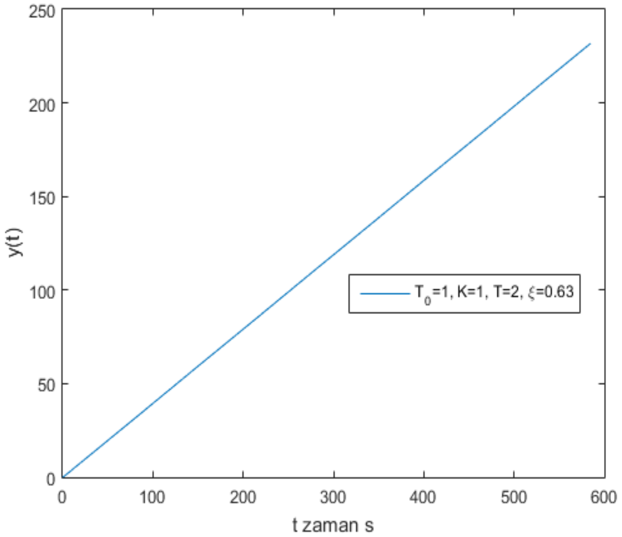
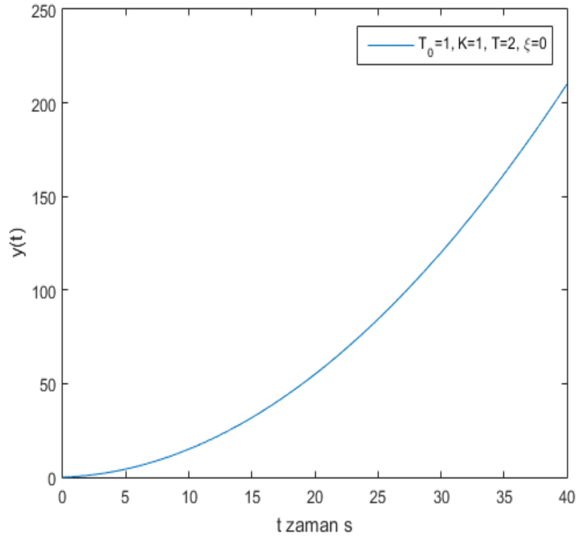
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$p_{1,2} = \mp j\omega_n$$

$$y(t) = y_f(1 - \cos(\omega_n t))h(t)$$



Bozulmuş (Dejenere) İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

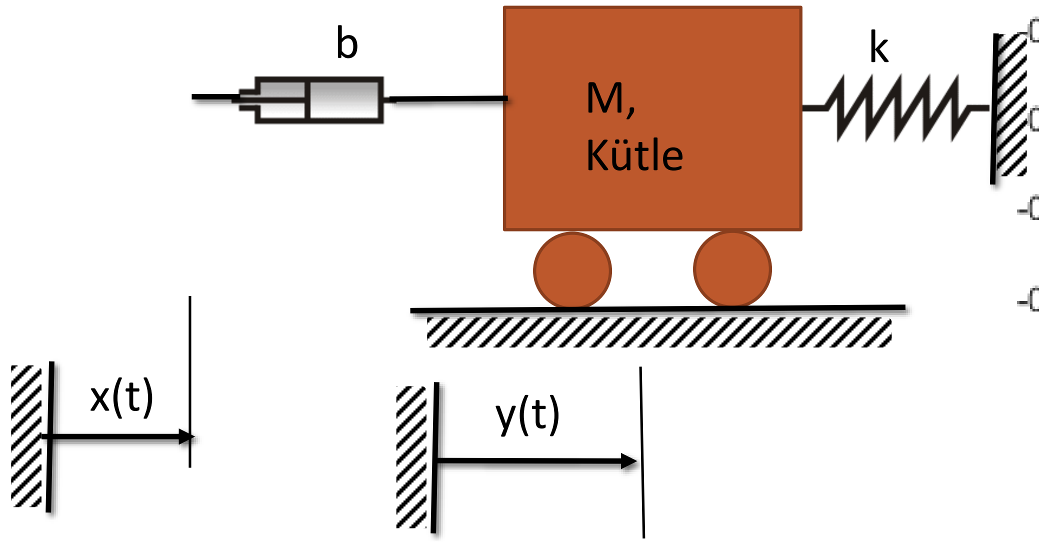
Standart TF	$G(s) = K\dfrac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ *ya da* $G(s) = K\dfrac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$		
İsmi	Pay da serbest «s»	Payda da serbest «s»	Payda da serbest «s^2»
TF'nin Özel Formu	$K\dfrac{T_0 s}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$	$K\dfrac{T_0 s + 1}{s(Ts + 1)}$	$K\dfrac{T_0 s + 1}{T^2 s^2}$
t-y(t) grafiği			

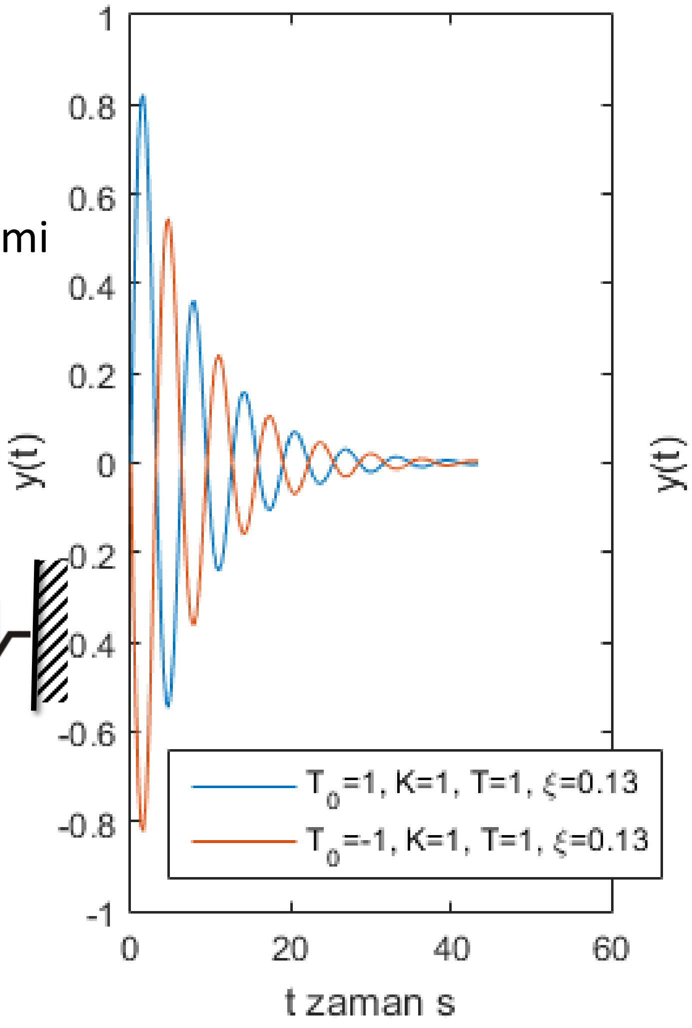
Serbest türev alıcı barındıran sistem, yani
Pay'da serbest «s» var.

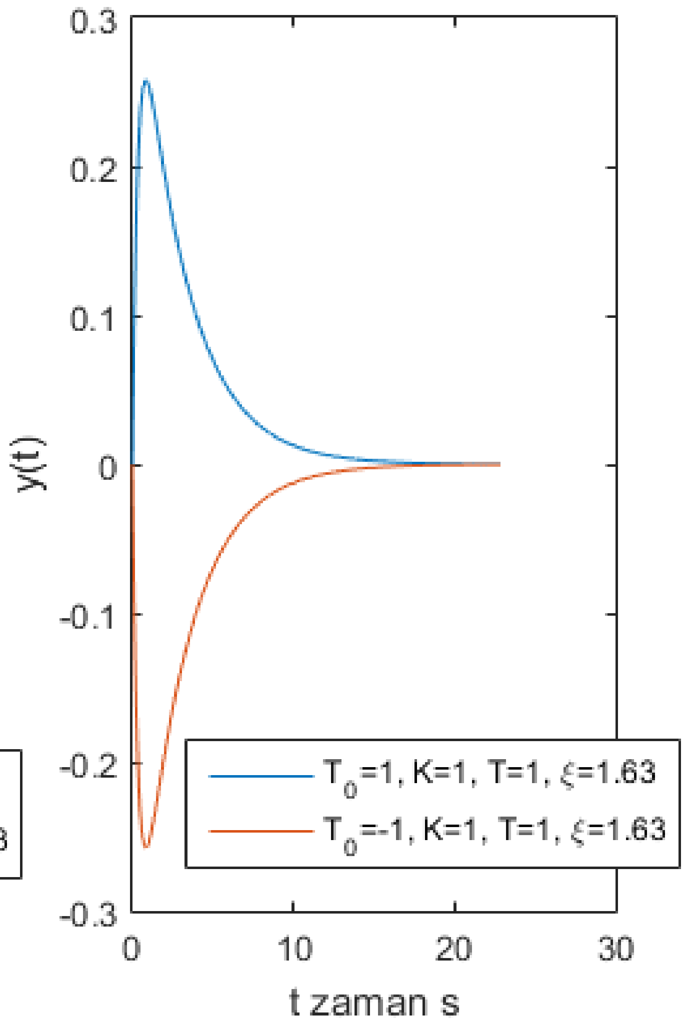
$$G(s) = \frac{b_1 s}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0};$$

Böyle bir sisteme örnek olarak aşağıda şematik gösterimi verilen sistem ele alınabilir.

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{x} \Longrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{bs}{ms^2 + bs + k}$$





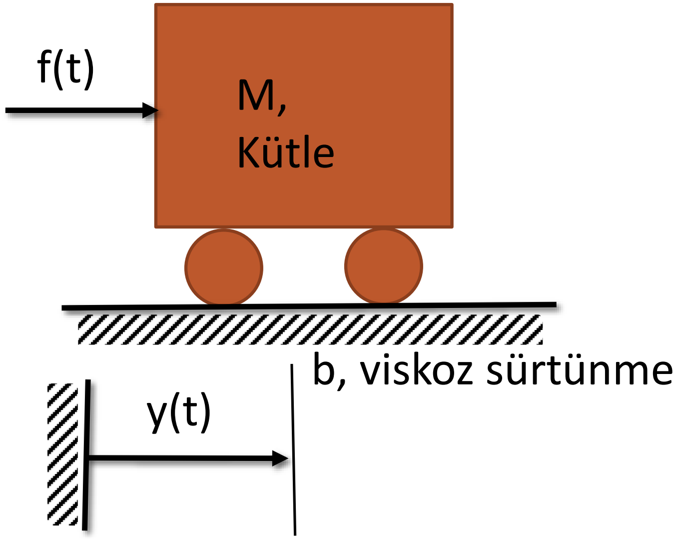


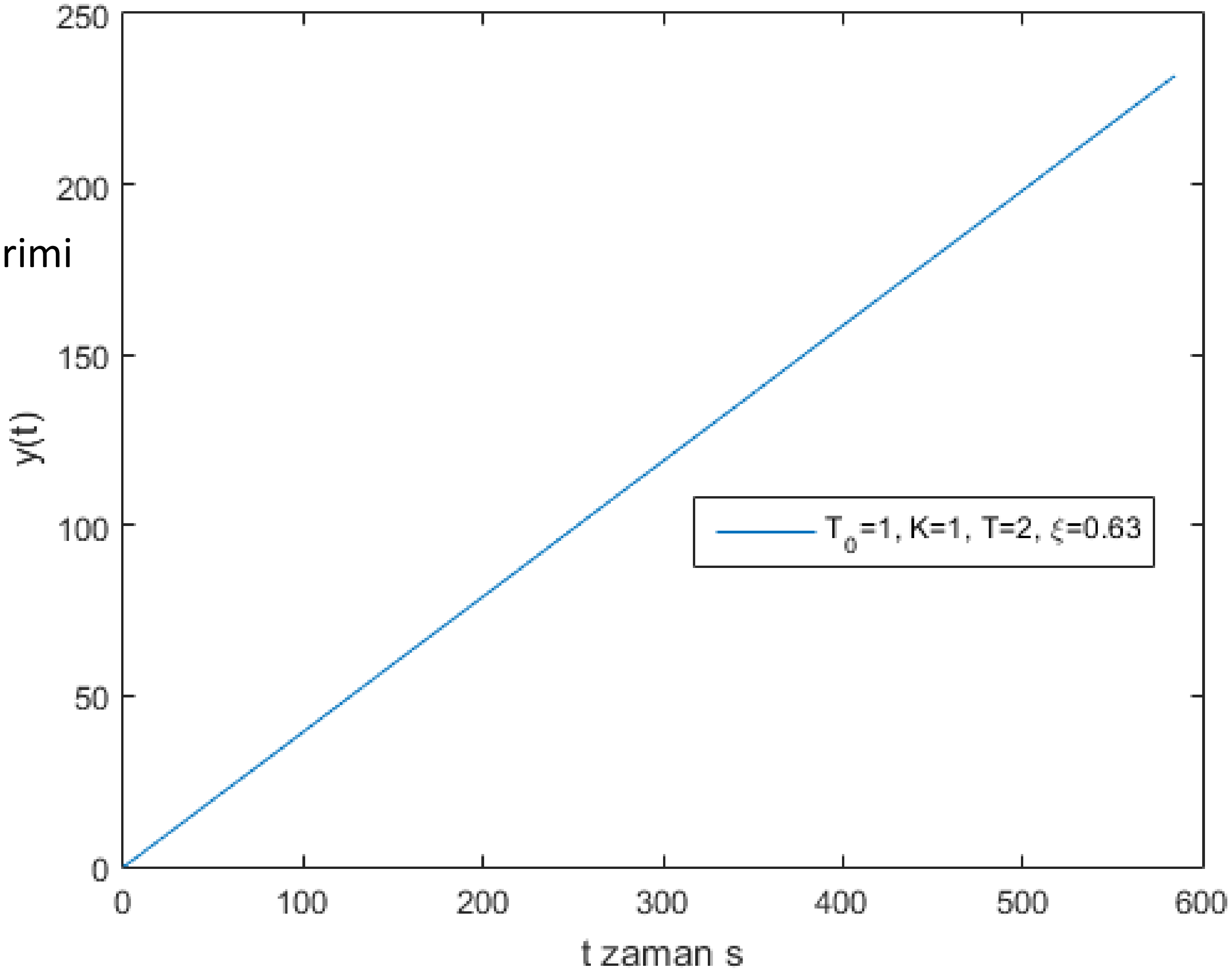
Serbest integratör barındıran sistem, yani Payda'da serbest «s» var.

$$G(s) = \frac{1}{s(a_2 s + a_1)};$$

Böyle bir sisteme örnek olarak aşağıda şematik gösterimi verilen sistem ele alınabilir.

$$M\ddot{y} + b\dot{y} = f(t) \Longrightarrow \frac{\mathrm{Y}(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(ms + b)}$$



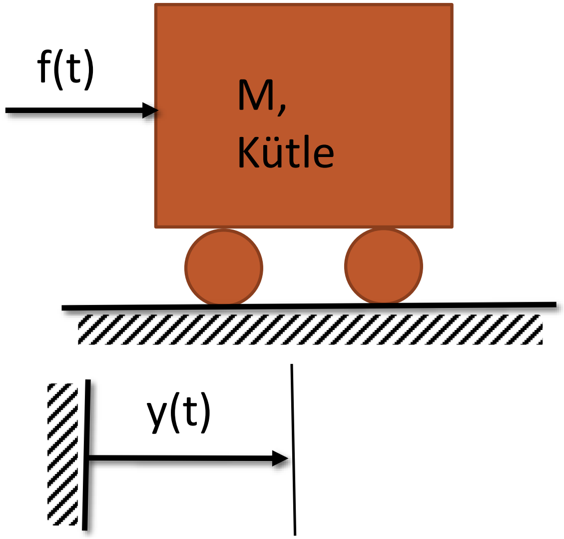


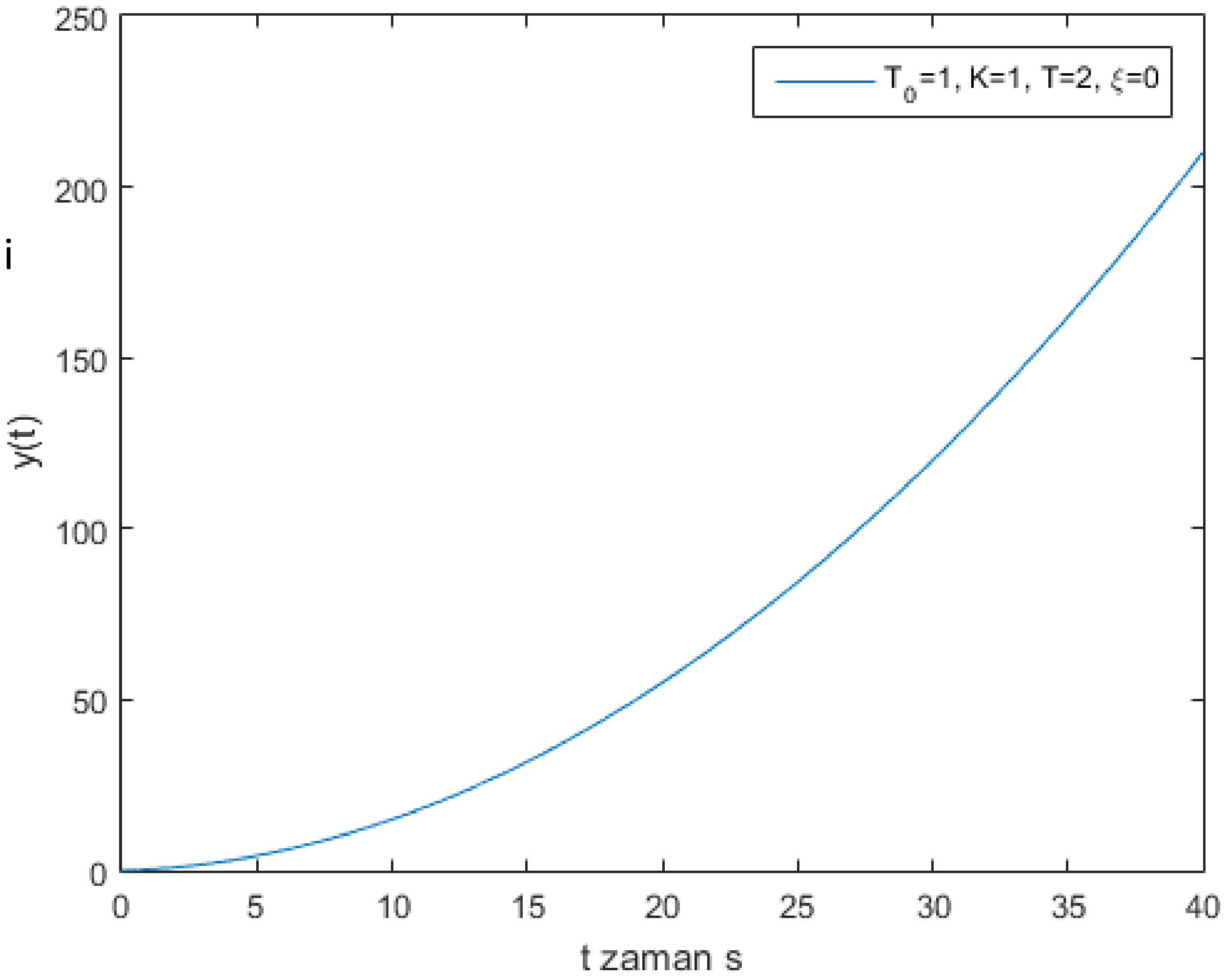
İki serbest integratör barındıran sistem, yani Payda'da serbest «s^2» var.

$$G(s) = \frac{1}{a_2 s^2};$$

Böyle bir sisteme örnek olarak aşağıda şematik gösterimi verilen sistem ele alınabilir.

$$M\ddot{y} = f(t) \Longrightarrow \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2}$$





Yüksek Dereceli Sistemler $n \geq 3$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m \prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}{a_n \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

$$G(s) = K \frac{{T_0}^m s^m + {T_0}^{m-1} \beta_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \beta_1 T_0 s + 1}{T^n s^n + \alpha_{n-1} T^{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 T s + 1} = K \frac{\prod_{j=1}^{m} (T_{0j} s + 1)}{\prod_{i=1}^{n} (T_i s + 1)}$$

$$G(s) = K \frac{\eta^m {\omega_n}^{n-m} s^m + \cdots + \eta \beta_1 \omega_n^{n-1} s + \omega_n^n}{s^n + \alpha_{n-1} \omega_n s^{n-1} + \alpha_1 \omega_n s + \omega_n^n}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}; Durgun\ Durum\ Kazancı;$$

$$T = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, sistemin\ karakteristik\ zamanı;$$

$$\omega_n = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}, doğal\ frekans$$

$$T_0 = \sqrt[m]{\frac{b_m}{b_0}}, paydanın\ karak.zamanı;$$

$$\eta = \frac{T_0}{T} = \omega_n T_0; Karakteristik\ zaman\ oranı$$

$$\alpha_k = \frac{a_k}{a_0 T^k} \quad , k = 0,1,2, \dots, n;$$

$$\beta_k = \frac{b_k}{b_0 {T_0}^k} \quad , k = 0,1,2, \dots, m;$$

$$n \geq 3\ ve\ m < n$$

Yüksek Dereceli Sistemlerin Ayrıştırılması

n. Dereceden farklı kutuplara sahip kararlı bir doğrusal zamanla değişmez sistem düşünelim

r= birbirinden farklı gerçek kutupların sayısı olsun.

N-r=2k, farklı kompleks kutupların sayısıdır. (k kompleks eşlenik çift sayısı)

$$G(s) = K\frac{{\omega_n}^n\left({T_0}^m s^m + {T_0}^{m-1}\beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_1 T_0 s + 1\right)}{(s+\rho_1)\cdots(s+\rho_r)(s^2+2\sigma_1 s+\omega_1^2)\cdots(s^2+2\sigma_k s+\omega_k^2)}$$

Kısmi kesirlere ayırma yöntemiyle

$$G(s) = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{c_i}{s+\rho_i}\right) + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d_j s + e_j}{s^2+2\sigma_j s+\omega_j^2}\right)$$

Burada $\sigma_j = \xi_j \omega_j$

Adım Cevabı ve Kutupların Yerleri Arasındaki İlişkiler

Birinci Derece Sistemlerde, küçük zaman sabiti yani büyük kutup (kök) sistemi hızlı kılar. Yani sistem son değerine hızlıca oturur.

İkinci Derece Sistemlerde,

$\boldsymbol{\xi > 1} \Longrightarrow$ sistem 2 adet birinci derece sisteme eşittir.

$\boldsymbol{\xi = 1} \Longrightarrow$ Sistemin cevabı aşırı sönümlü sisteme denktir.

$\boldsymbol{0 < \xi < 1} \Longrightarrow$ **2** kompleks eşlenik kök $\boldsymbol{p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right) = -\sigma \pm j\omega_d}$

$\boldsymbol{\sigma}$ büyük olursa, hızlı tepki, $\boldsymbol{\omega_d}$ büyük olursa salınım periyodu küçük ve daha çok salınım.

$$\boldsymbol{\omega_n^2 = \sigma^2 + {\omega_d}^2}$$

Bu kompleks düzlemde $\boldsymbol{\omega_n}$ yarıçaplı daire demektir.

$$\beta - sönüm\ açısı$$

$$\omega_d = \omega_n \sin\beta\,; \quad \sigma = \omega_n \cos\beta\,;$$

$$\tan\beta = \frac{\omega_d}{\sigma} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\omega_n\xi} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Burada

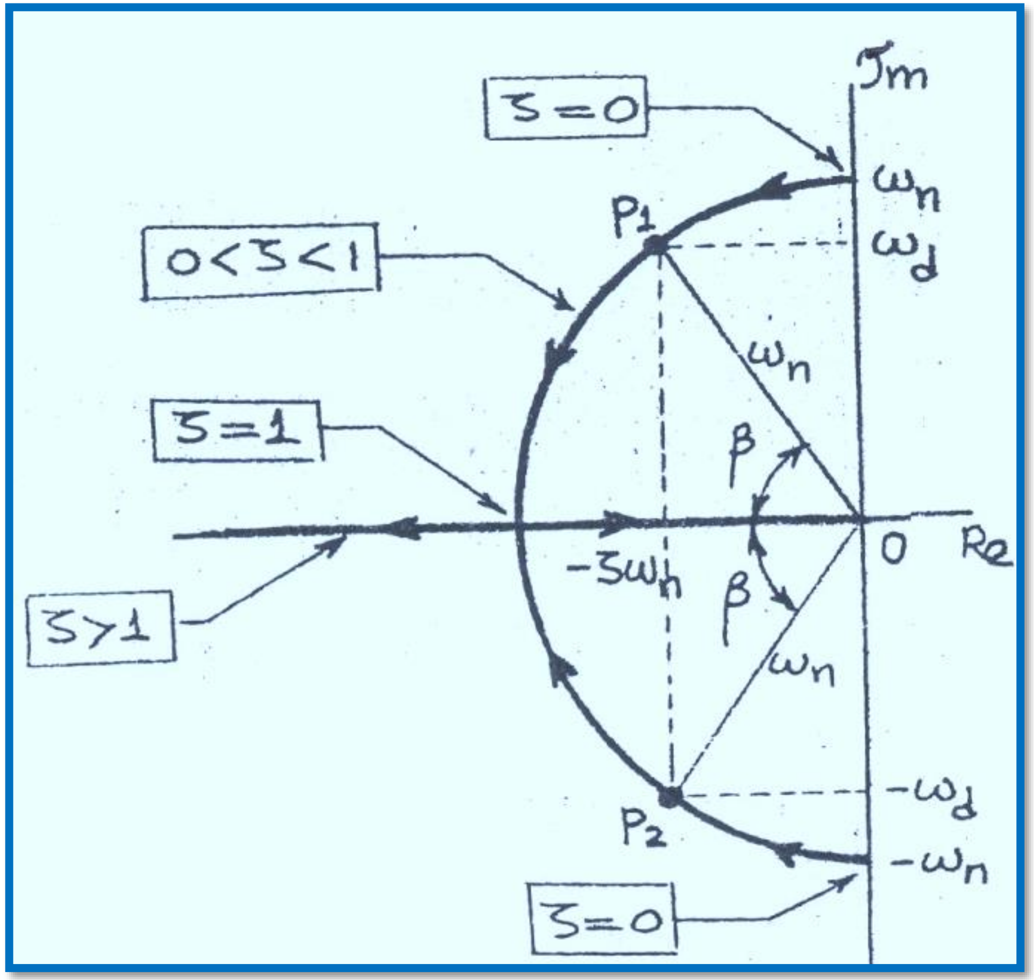
$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

ω_n sabit, $\xi \uparrow \Longrightarrow \sigma \uparrow, \omega_d \downarrow$

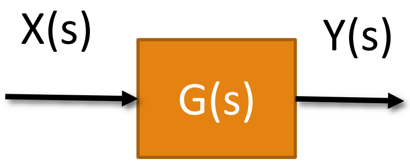
$$\Longrightarrow Sistem\ hızlı\ az\ salınımlı$$

ξ sabit yani β sabit $\omega_n \uparrow \Longrightarrow \sigma \uparrow, \omega_d \uparrow$

$$\Longrightarrow Sistem\ hızlı\ az\ salınımlı$$



Baskın Kutup ve Sistemin Basitleştirilmesi



gibi doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi ele alalım.

$|Re\ (p_i)| \Longrightarrow p_i$ imajiner eksene yakın demektir. p_i baskın kutuptur. Çünkü sistemin sönüm hızı bu kutupa bağlı olarak yavaş olacaktır. Sistemin geçici cevabını bu baskın kutup belirler.

Köklerin geçici durum davranışı üzerindeki etkisi kökle ilişkili c_i kalıntıları tarafından da etkilenmektedir.

$$p_i\ diğer\ kutuplara\ yakınsa \Longrightarrow p_i\ ile\ büyük\ kalıntı\ ilişkilidir.$$

$$p_i\ sıfırlara\ uzaksa \Longrightarrow p_i\ ile\ büyük\ kalıntı\ ilişkilidir.$$

$G(s)$ transfer fonksiyonu daha basit bir transfer fonksiyonuna yakınsayabilir.

Burada yakınsak TF $G_a\ (s)$ in derecesi $G(s)$ ‘den daha düşüktür.

Baskın Kutup ve Sistemin Basitleştirilmesi

Yakınsak TF $G_a\ (s)$ in belirlenme kuralları

I. $G(s)$’de $(s - pi)$ ve $(s - z_j)$’ler eğer $p_i \cong z_j$ ise birbirlerini götürebilir.

II. Eğer $\left|\frac{Re(p_j)}{Re(p_i)}\right| > 5$ ise o zaman p_j nin geçici cevap üzerindeki etkisi ihmal edilebilir. Yani G(s)’deki $(s - p_j)$ terimi ihmal edilebilir.

p_j’nin ihmaline daha çok şu şartlar sağlandığında karar verilir.

a.) p_i diğer kutuplara yakın ve sıfırlardan uzaksa

b.) p_j diğer kutuplardan uzak ve sıfırlara yakınsa

III. Bütün girişler x(t) için$y_f = (y_a)_f$ olmalıdır. Bunu için $\mathrm{G}(0) = G_a\ (0)$ şartı sağlanmalıdır.

İspat;

İspat

$Y(s) = G(s)X(s); Y_a(s) = G_a(s)X(s)$

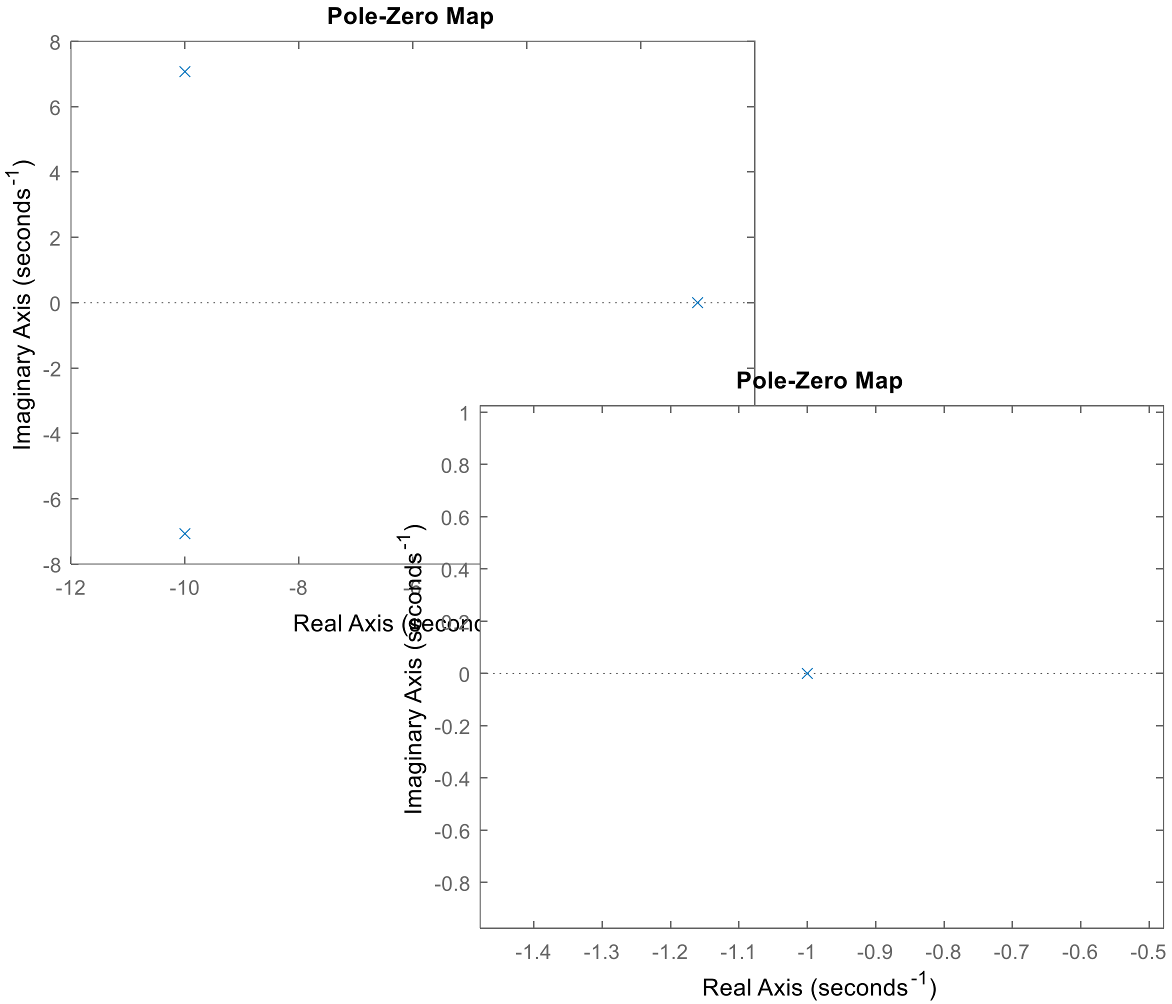
Son değer teoremine göre;

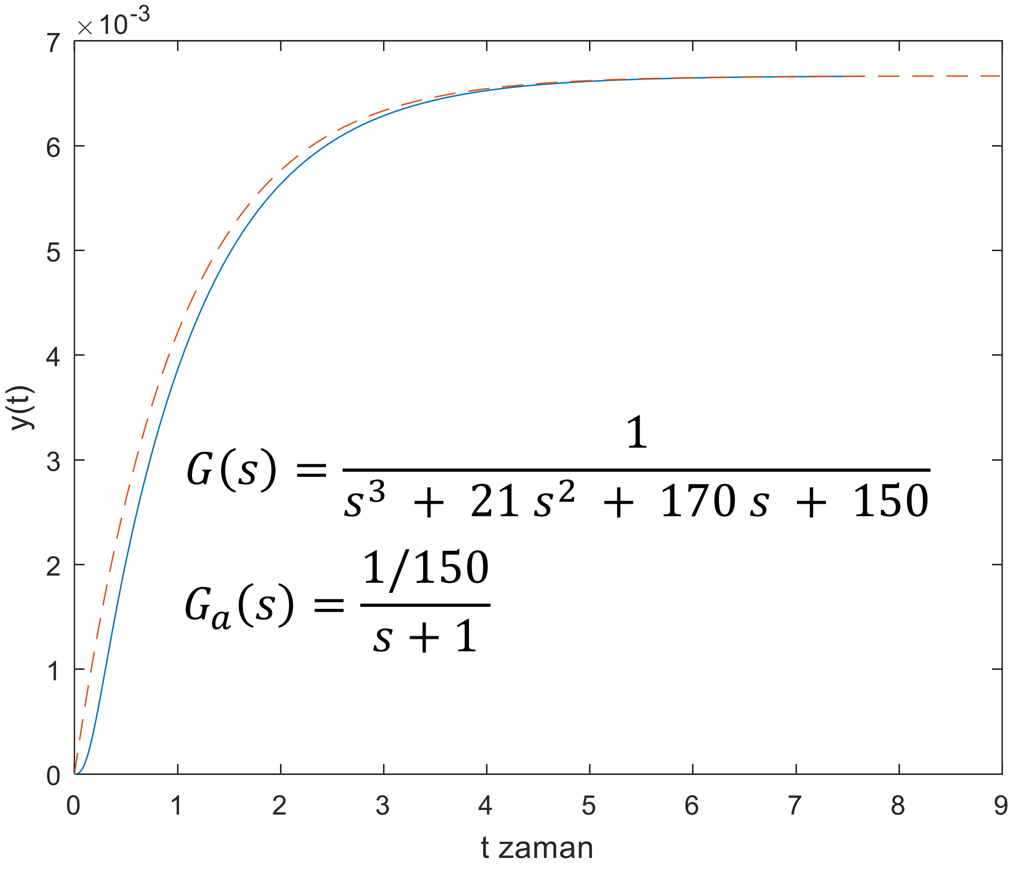
$$y_f = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)X(s) = \lim_{s\to 0} sX(s)\lim_{s\to 0} G(s)$$

$$y_{a\,f} = \lim_{s\to 0} sY_a(s) = \lim_{s\to 0} sG_a(s)X(s) = \lim_{s\to 0} sX(s)\lim_{s\to 0} G_a(s)$$

$$\therefore y_f = y_{a\,f} \Longrightarrow \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} G_a(s) \Longrightarrow G(0) = G_a(0)$$

Örnek

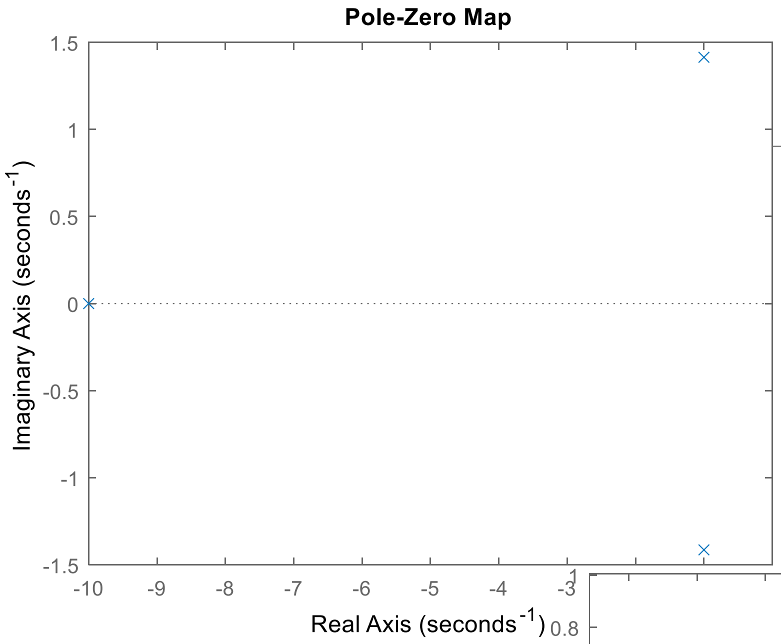


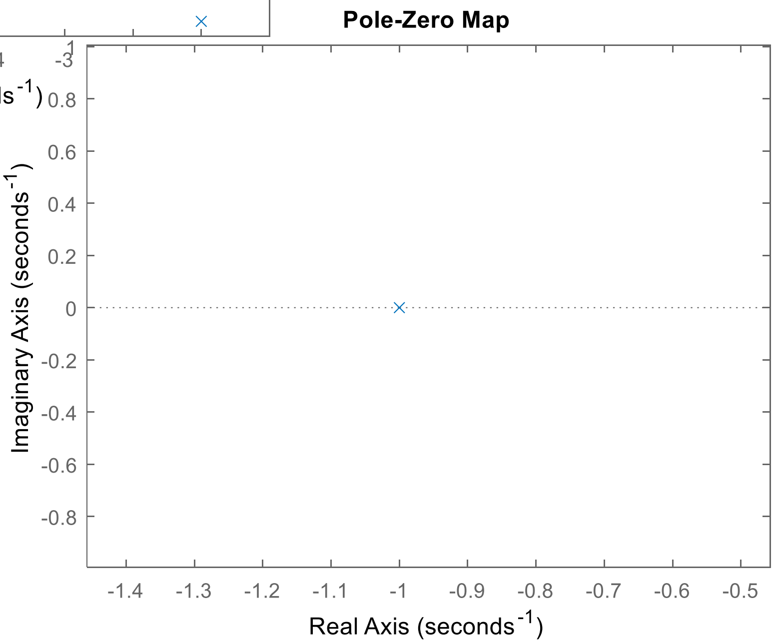


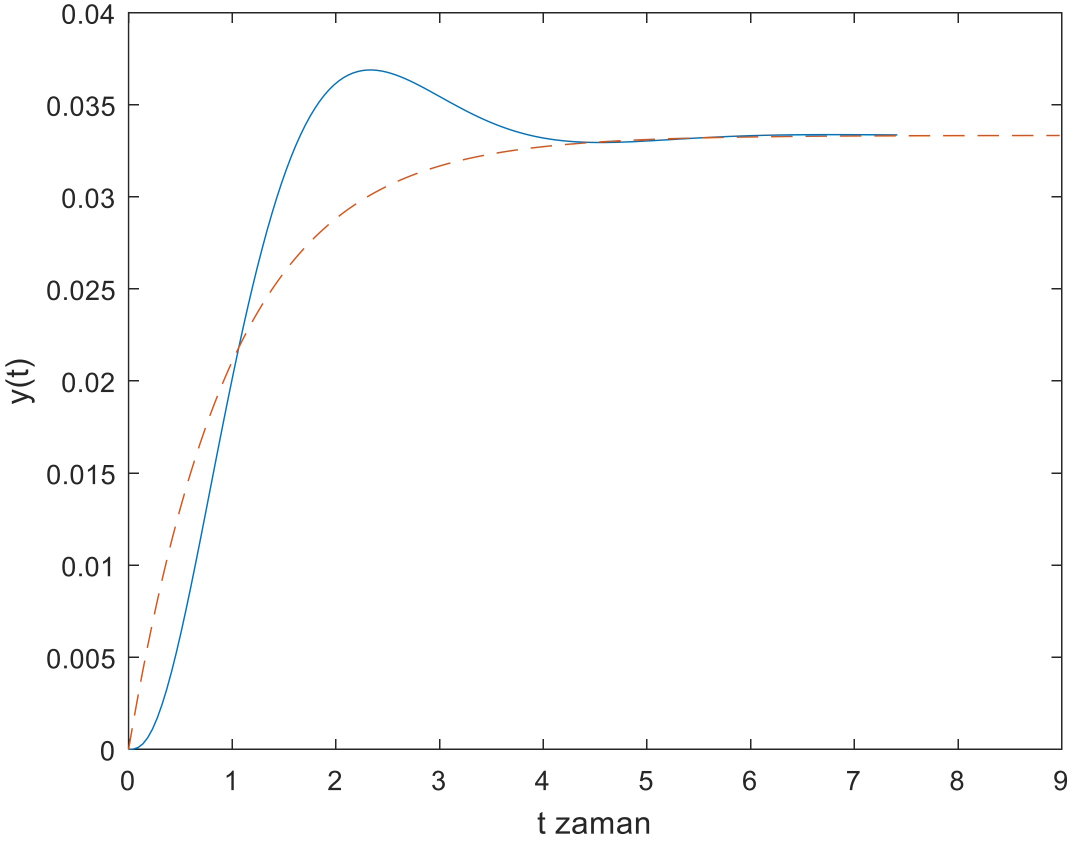
$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 21\,s^2 + 170\,s + 150}$$

$$G_a(s) = \frac{1/150}{s+1}$$

Örnek


Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3


Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.4
-1.3
-1.2
-1.1
-1
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5


y(t)
t zaman
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Örnek

Problem: Aşağıda verilen transfer fonksiyonunu ikinci dereceden bir sisteme yakınsatınız:

$$G(s) = \frac{s+1.1}{s^4+11.2s^3+13.2s^2+13s+10}$$

Hem yakınsattığınız sistemin hem de verilen sistemin grafiğini çiziniz, benziyorlar mı? yakınsattiğınız sistemin doğal frekansını ve sönümleme oranını bulunuz. Sönümleme oranı açısından sınıflandırıldığında ne tip bir sistemdir.

Çözüm:

$$\mathrm{G(s)} = \frac{(s+1.1)}{(s+1)(s+10)(s^2+0.2s+1)}$$

Direkt olarak pay ve paydada ki $(s+1) ve\ (s+1.1)$ terimleri sadeleşir.

İkinci dereceden polinomun kökleri $p_{1,2} = -0.1 \pm 0.995i$ şeklinde bulunur.

2. Kuralı uygularsak, $\frac{10}{0.1} > 5$ dolayısıyla (s+10)'un cevabı sistemin geçici durum davranışını etkilemez. $(s+10)'$un etkisi ihmal edilebilir.

Örnek Devam

Bu durumda yakınsak TF aşağıdaki hale gelir.

$$G_a(s) = \frac{K_a}{s^2 + 0.2s + 1}$$

Son olarak, 3. Kural gereği G(0)= $G_a(0)$ olmalı

$$s = 0 \implies G(0) = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$s = 0 \implies G_a(0) = K_a$$

$$G(0) = G_a(0) \implies \boldsymbol{K_a} = 0.1$$

Bu durumda

$$G_a(s) = \frac{0.1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

elde edilir.

Örnek Devam

```
clear all;clc;close all;
Num=[1 1;0 0.1];
Den=[1 11.2 13.2 13 10;0 0 1 0.2 1];
for i=1:2
    sys=tf(Num(i,:),Den(i,:));
    step(sys); hold on
end
title('Adım Giriş Cevapı','FontSize',12);
ylabel('Genlik','FontSize',12)
xlabel('Zaman','FontSize',12);
legend('Gerçek Sistem','Yakınsak Sistem','FontSize',12);
```