Otomatik Kontrol

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Hazırlayan: Dr. Nurdan Bilgin

Kapalı Çevrim Kontrol

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Bir önceki derslerimizde Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin İşlevsel Kalitesini üç temel özellik

- ✓Regülatör
- ✓Servo
- ✓Parametre hassasiyeti

üzerinden tartışmıştık. Sonuç olarak, büyük K seçimi ile ileri bildirim elemanlarındaki (sistem, kontrolcü ve eyletici) belirsizliklerin baskılanabildiğini, tersine büyük K seçiminin, geri bildirim elemanlarının etkisini daha baskın hale getirdiğini görmüştük. Son olarak, kontrol sistemlerinin parametre değişim ve belirsizliklerine karşı mümkün olduğunca sağlam tasarlanması gerektiğini tartışmıştık.

Bu genel iyileştirmelere rağmen, tüm uygulamalar için aşağıdaki genel gereklilikler karşılanmaksızın bir kontrol sisteminin genel performansı tatmin edici olmaz:

- ✓ **Kararlılık**
- ✓ **Sistemlerin Kalıcı Durum Davranışı**
- ✓ **Sistemlerin Geçici Durum Davranışı**

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri
Kararlılık Analizi

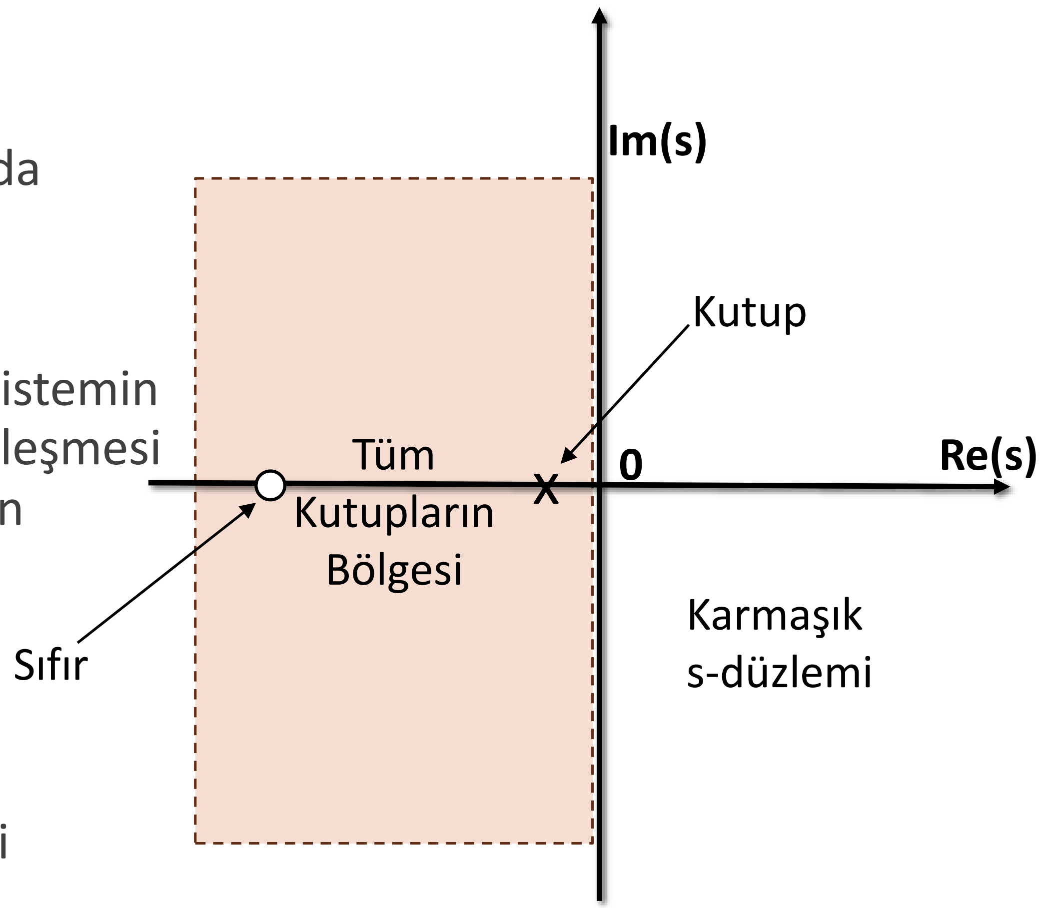
gibi doğrusal zamanla değişen bir sistemi ele alalım. Burada

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$(i = 1,2,3 \ldots .n)$ ve $(j = 1,2,3, \ldots ..m)$ olmak üzere p_i'ler sistemin kutupları ve z_j'ler sistemin sıfırlarıdır. Eğer kutup/sıfır sadeleşmesi yoksa n →sistemin derecesi ve m →Giriş etkisi dinamiklerin derecesi olarak adlandırılır.

$$p_i\ kutup \rightarrow \lim_{s \to p_i} G(s) = \infty$$

$$z_j\ sıfır \rightarrow \lim_{s \to z_j} G(s) = 0$$



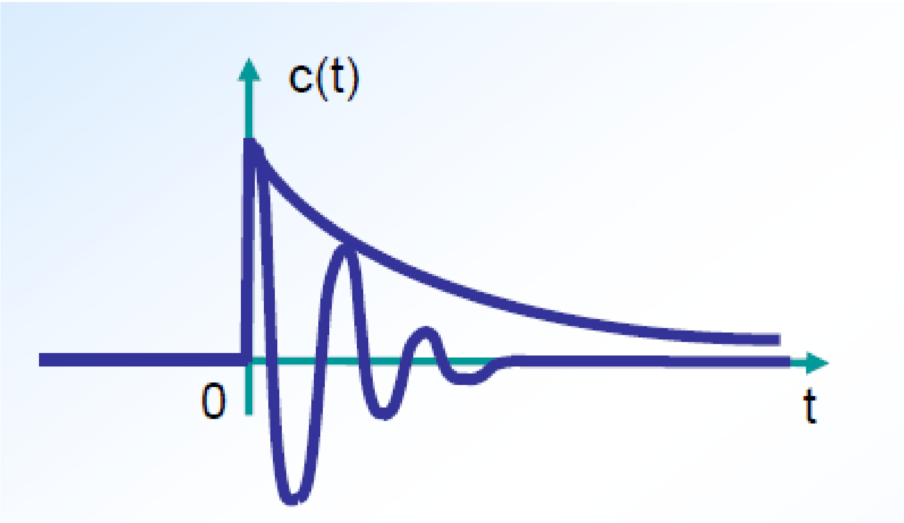
Sistemin kutup ve sıfırlarının kompleks düzlemde gösterimi

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri
Kararlılık Analizi

Kararlı Sistem Bu sistemlerin girişine **ani bir darbe** uygulandığında, sistemin çıktısı ilk değerine geri döner.

Kararlılığın bir diğer tanımıda; sistemin girişine uygulanan bütün sınırlı giriş işaretleri için çıkışta sınırlı kalıyorsa sistem kararlıdır denir.(BIBO)

Teorem: Tüm kutuplarının gerçek kısımları negatif olan bir sistem kararlıdır.



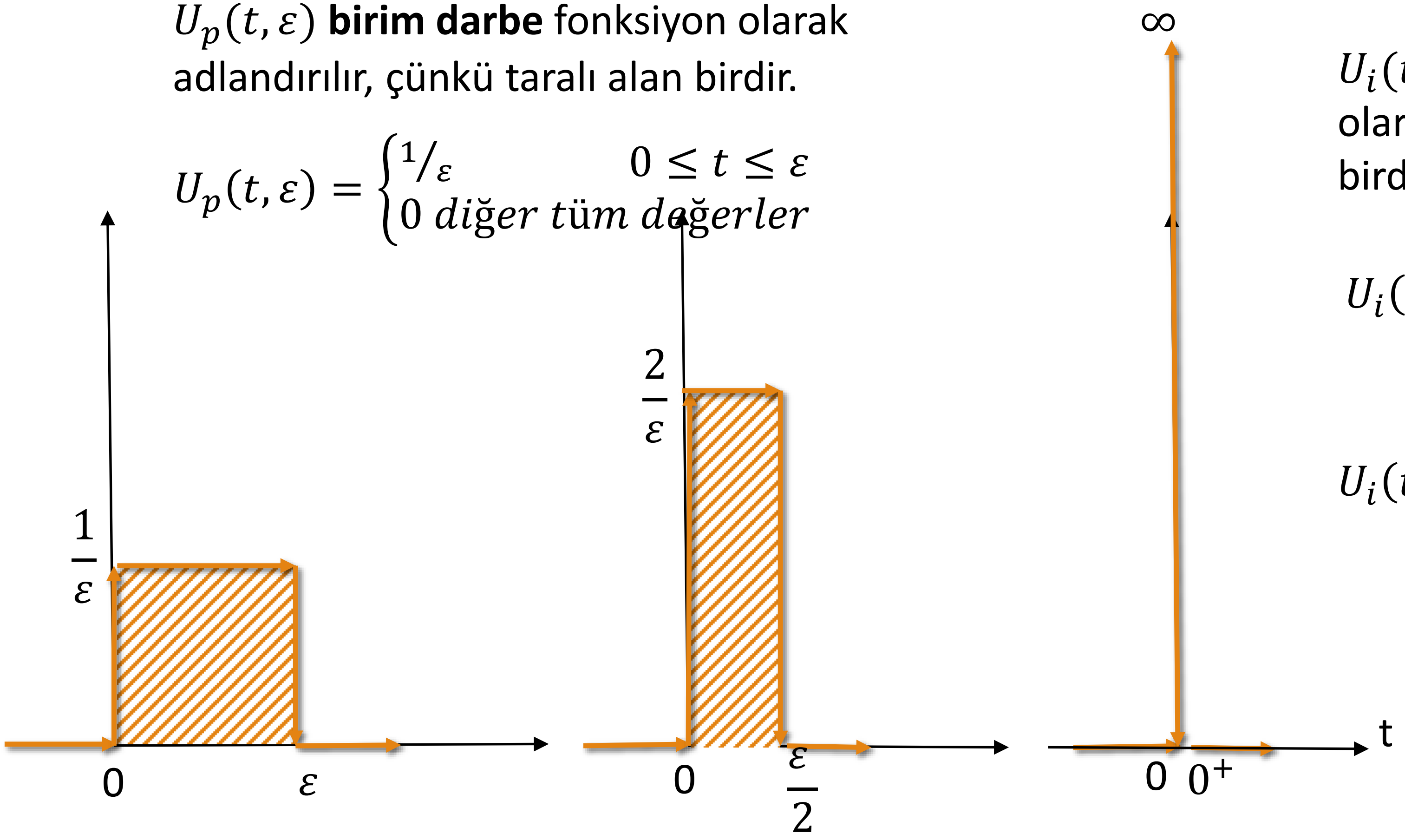
Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Kararlılık Analizi

Ani Darbe (Unit Impulse)

$U_p(t,\varepsilon)$ **birim darbe** fonksiyon olarak adlandırılır, çünkü taralı alan birdir.

$$U_p(t,\varepsilon) = \begin{cases} {}^{1}/_{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 \; diğer\ tüm\ değerler \end{cases}$$



$U_i(t,\varepsilon)$ **birim ani darbe** fonksiyon olarak adlandırılır, çünkü taralı alan yine birdir ancak.

$$U_i(t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \{U_i(t,\varepsilon)\}$$

$$U_i(t,\varepsilon) = \begin{cases} \infty & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 \; diğer\ tüm\ değerler \end{cases}$$

birim ani darbe fonksiyonun laplace dönüşümü $\mathcal{L}[U_i(t,\varepsilon)] = 1$

Kararlı Sistem Örnekler

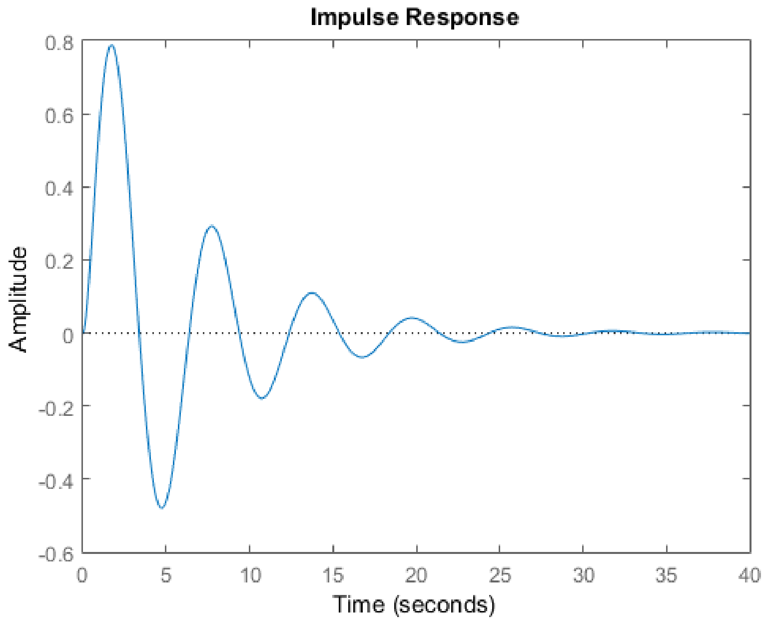
sys =

3

----

s^3 + 3 s^2 + 2 s + 3

Continuous-time transfer function.



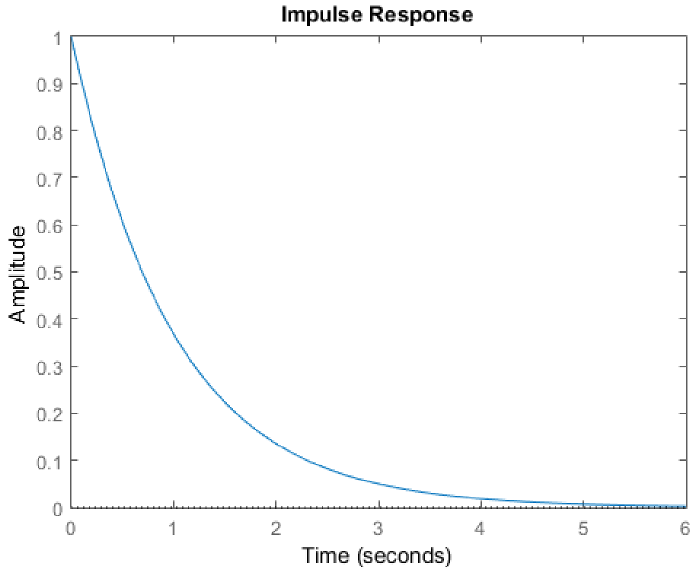
sys =

1

-----

s + 1

Continuous-time transfer function.



Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri
Kararlılık Analizi

Marjinal Kararlı Sistem Bu sistemlerin girişine ani bir darbe uygulandığında, sistemin çıktısı ya ilk değerinden başka bir sonlu değere oturur ya da sonlu bir değer etrafında sonlu genlikte sürekli salınır.

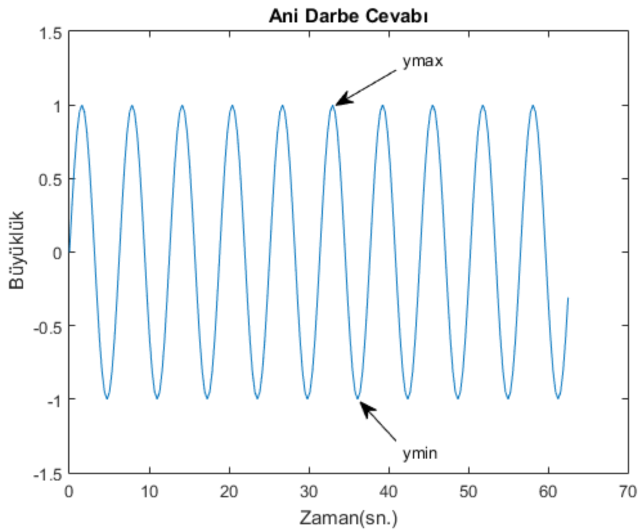
Teorem: Sanal eksen üzerinde bazı katlı olmayan kutupları olan ve geri kalan tüm kutuplarının gerçek kısımları negatif olan bir sistem marjinal kararlıdır.

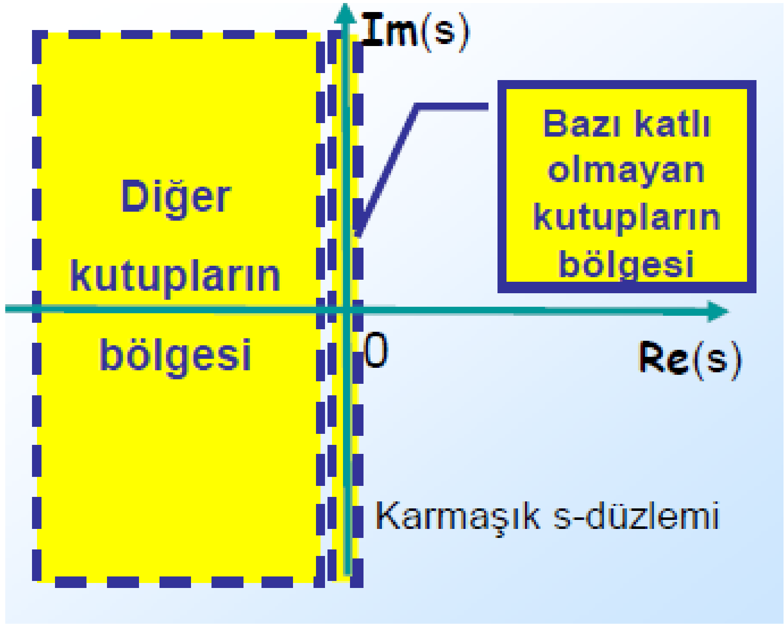
Marjinal Kararlı Sistem Örnek

sys =

```
    1
  -------
  s^2 + 1
```

Continuous-time transfer function.





Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri
Kararlılık Analizi

Kararsız Sistem Bu sistemlerin girişine ani bir darbe uygulandığında, sistemin çıktısı herhangi bir sınır olmadan büyür.

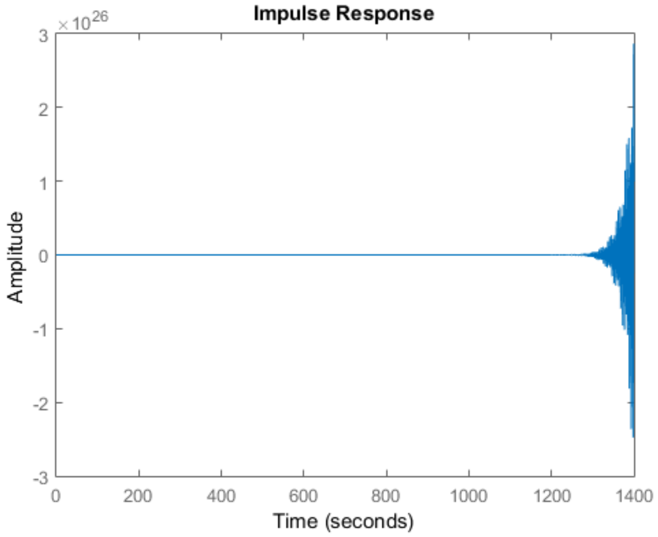
Teorem: Bazı kutuplarının gerçek kısımları pozitif olan ve/veya sanal eksen üzerinde bazı katlı kutupları olan bir sistem **kararsızdır.**

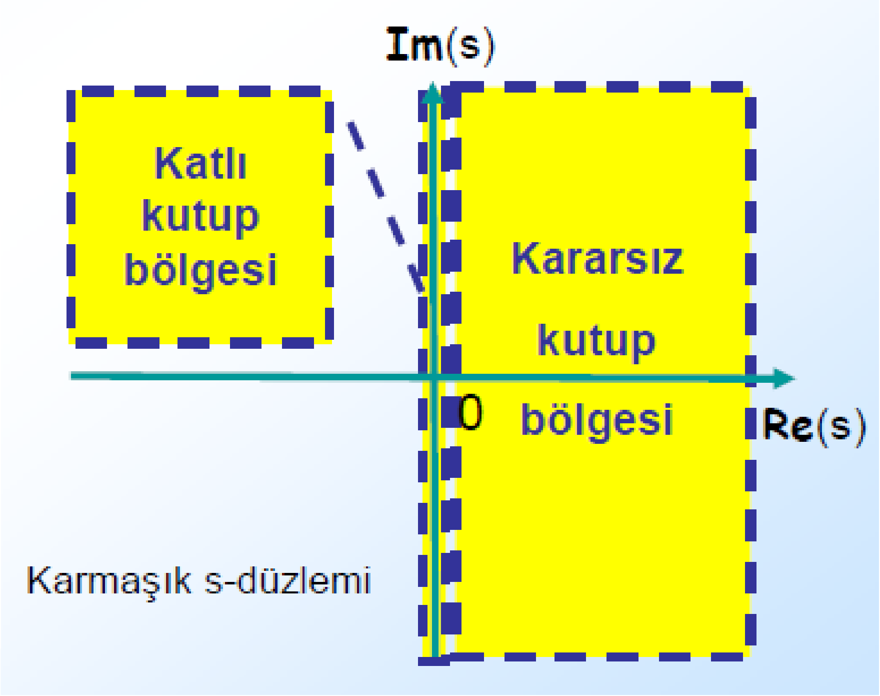
Kararsız Sistem Örnekler

sys =

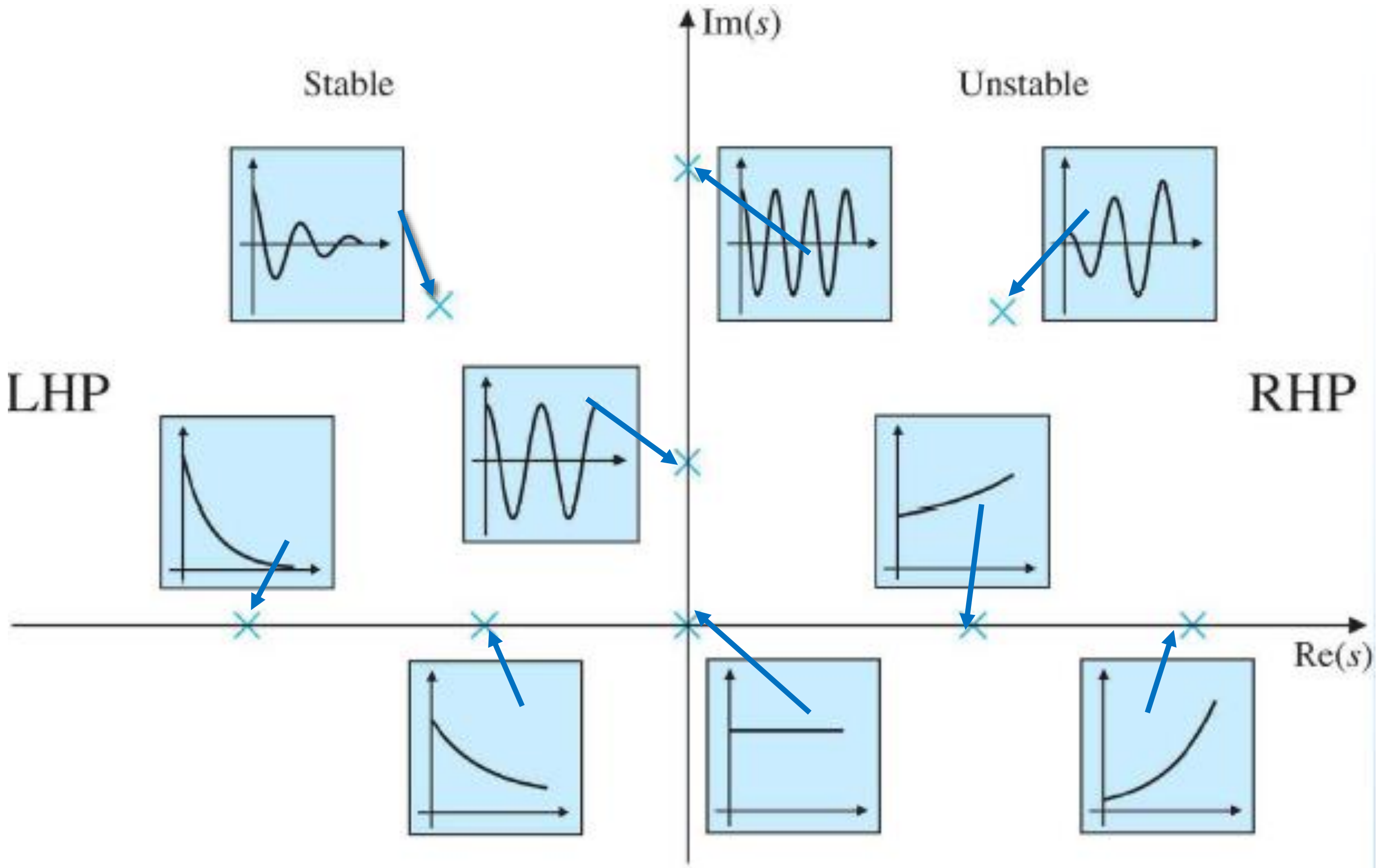
$$\frac{7}{s^3 + 3 s^2 + 2 s + 7}$$

Continuous-time transfer function





Sistem Kutuplarının s-düzlemindeki Yerleri ile İlişki

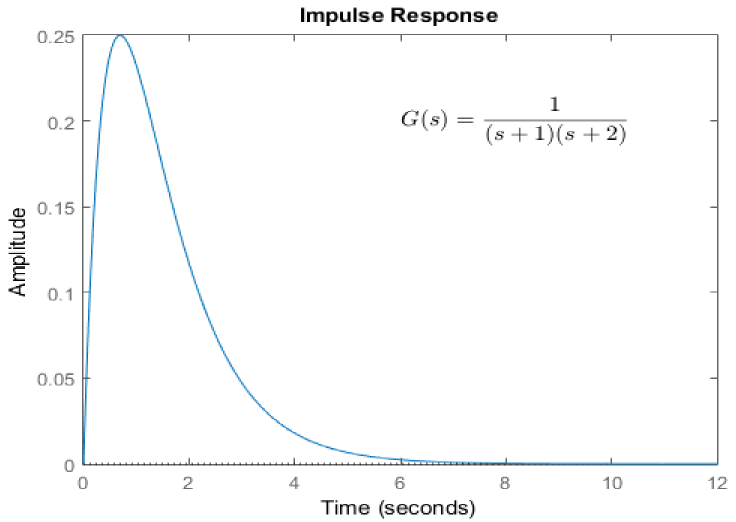


Resim Prof. Dr. Bülent E. Platin çalıştay notlarından alınmıştır.

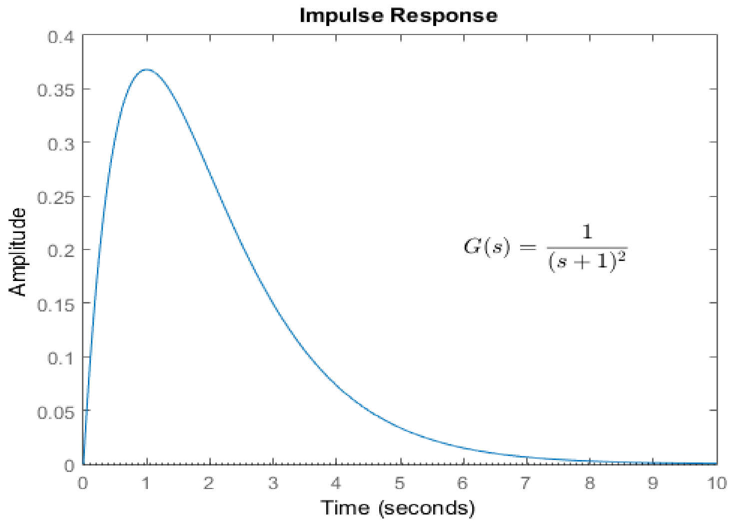
Orijinal Kaynak: G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, 7e, Global Ed., Pearson Education, Ltd., 2015 olarak belirtilmiştir.

Sistem Kutuplarının s-düzlemindeki Olası Durumları

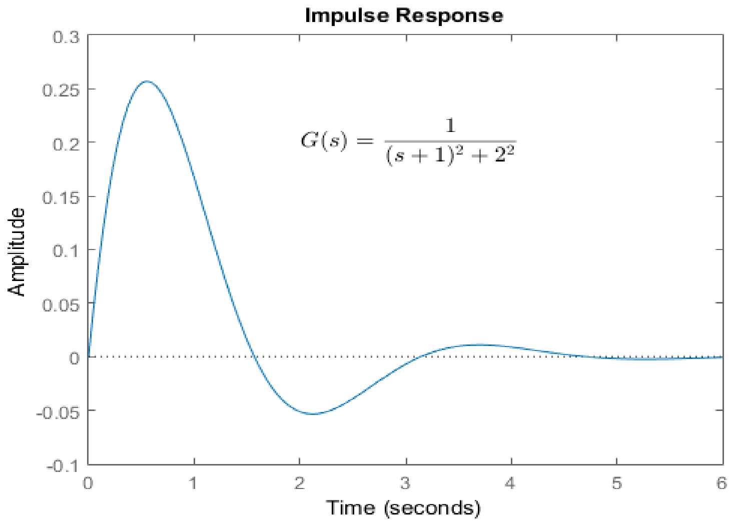
1. Gerçek Farklı Kökler (negatif).



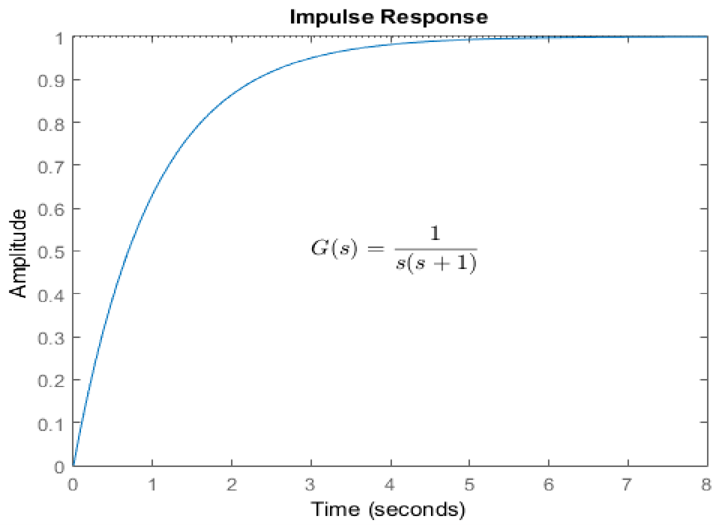
2. Gerçek Tekrarlayan Kökler (negatif).



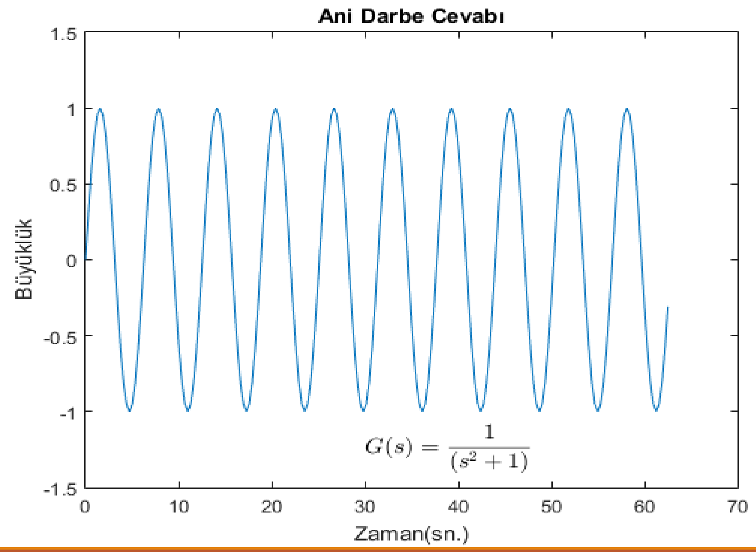
3. Gerçek Tarafı (-) Olan Kompleks Kökler.



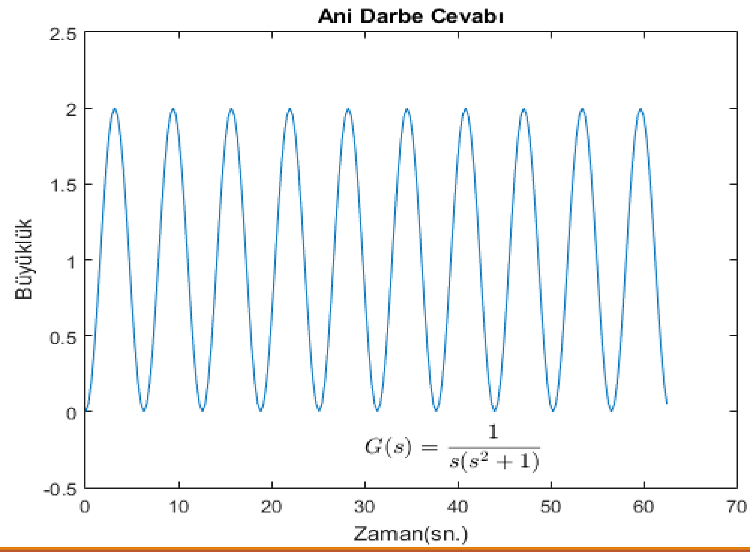
4. Sanal Eksende Tekrarlanmayan 1 Kök



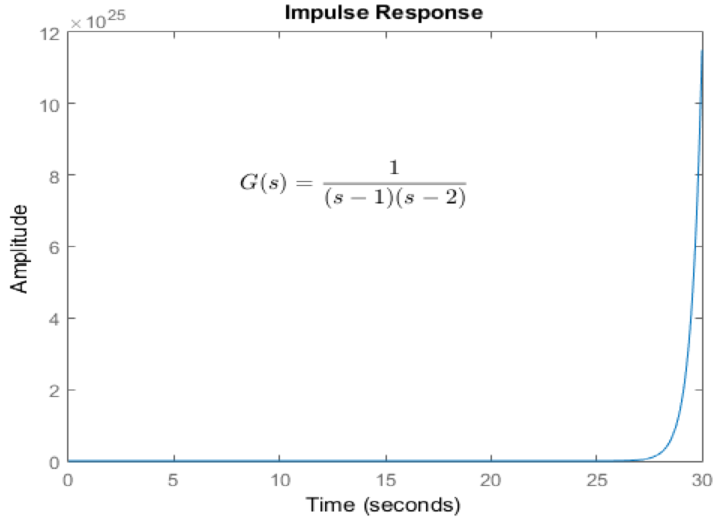
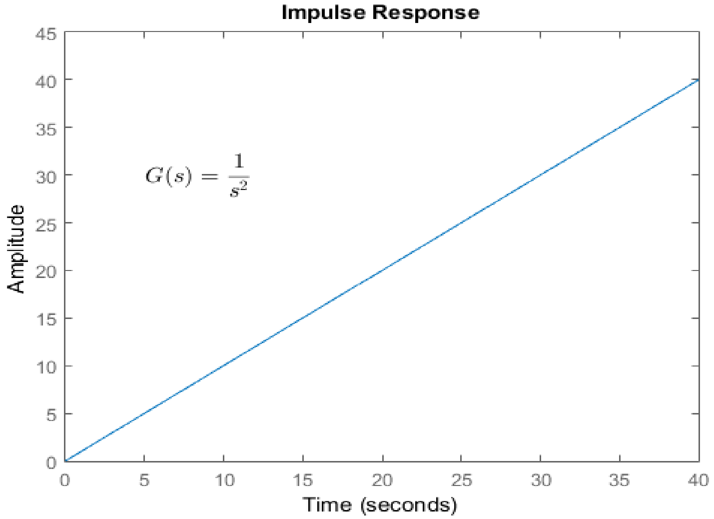
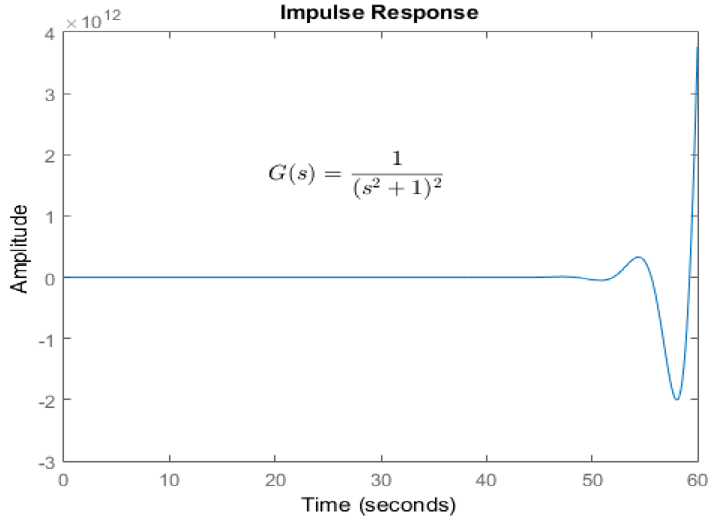
5. Sanal Eksende Tekrarlanmayan 2 Kök



6. Sanal Eksende Tekrarlanmayan 3 Kök



Sistem Kutuplarının s-düzlemindeki Olası Durumları

7. Gerçek Farklı Kökler (pozitif).	8. Sanal Eksende Tekrarlanan Tek Kök	9. Sanal Eksende Tekrarlanan İki Kök
		

Kararlılık Analizi
Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Bir sistemin kararlılığını belirlemek için en açık ve doğrudan yöntem, sistemin transfer fonksiyonundan kutuplarını bulmak ve bu kutupların karmaşık düzlem üzerindeki konumlarını incelemektir.

Bununla birlikte, kutupların belirlenmesi süreci ikinci dereceden yüksek sistemlerde çok zor ve zaman alıcı olabilmektedir.

Ayrıca uğraşılan problem, kararlılığı sağlamak için bilinmeyen bazı sistem parametrelerinin aralıklarını belirlemekse, transfer fonksiyonundan kutupları bulma yaklaşımı uygulanamaz neredeyse imkansız hale gelir.

Bu noktada**, Routh-Hurwitz kararlılık ölçütü**, sistemin kutuplarını bulmadan, sistemin kararlı olup olmadığı ve sistem kararlı değilse, kararsızlıktan sorumlu köklerin sayısının (ve bazen yerlerinin) belirlenmesi için basit bir yöntem sunar.

Routh-Hurwitz kararlılık kriterleri, ***Hurwitz Testi*** olarak bilinen ilk taramadan ve ***Routh kriterlerinin*** uygulanmasından oluşur.

Kararlılık Analizi
Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Aşağıdaki gibi doğrusal zamanla değişen bir sistemi ele alalım.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Burada $D(s)$ karakteristik polinom olarak adlandırılmaktadır.

$$D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = a_n (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)$$

$D(s) = 0$ ise karakteristik denklem olarak adlandırılmaktadır.

Hurwitz Testine göre: Kararlı bir sistemin karakteristik polinomunun bütün katsayıları var olmalı ve pozitif olmalıdır. Bu test sistemin kararlılığı için gerekli fakat yeterli değildir.

Başka bir değişle eğer karakteristik polinom ***Hurwitz Testini*** geçemediyse sistem kesinlikle kararlı değildir. Ancak Marjinal kararlı veya kararsız olabilir.

Örnekler:

$D(s) = s^3 + \mathrm{s} + 1$ (Kararlı değil neden!!!!!)

$D(s) = s^3 + 2s^2 - \mathrm{s} + 1$ (Kararlı değil neden!!!!!)

$D(s) = s^3 + 2s^2 + \mathrm{s} + 1$ (Kararlı, marjinal kararlı veya kararsız olabilir.)

Kararlılık Analizi
Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Routh Kriterlerinin Uygulanması ile kapalı döngü sistem kutuplarını çözmeden sistem kararlılığı hakkında karar verilebilmektedir. Ayrıca sistemin kaç tane sol yarı düzlemde, kaç tane sağ yarı düzlemde ve kaç tane imajiner eksen üzerinde kutbu olduğu bulunabilir.

Uygulama iki aşamadan oluşmaktadır:

- Routh tablosunu oluşturmak
- Tabloyu yorumlamak

Kararlılık Analizi

Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

	(1)	(2)	(3)
(1)	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
(2)	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
(3)	b_1	b_2	b_3
(4)	c_1	c_2	c_3
(n_r-2)	e_1	e_2	0
(n_r-1)	f_1	0	0
n_r	g_1	0	0

İki olası bitiş

n_c n tek	n_c n çift
a_1	a_0
a_0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}},\ b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}\ \text{etc.}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1},\ c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1}b_3}{b_1}\ \text{etc.}$$

Routh tablosunu oluşturmak

$D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$ karakteristik polinomunu ele alalım.

İlk kolona s'nin en yüksek derecesiden başlayarak 0'ıncı kuvvetine kadar dereceleri yazılır. Daha sonra ilk satıra en yüksek derecenin katsayısı ve birer atlayarak diğer derecelerin katsayıları yazılır. İkinci satıra en yüksek ikinci derecenin katsayısı ve birer atlayarak diğer derecelerin katsayıları yazılır.

Kararlılık Analizi

Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Routh tablosunu oluşturmak Örnekler;

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^4 + 9s^3 + 30s^2 + 42s + 20}} \longrightarrow C(s)$$

	1	2	3
4	1	30	20
3	9	42	0
2	25,33333	20	0
1	34,89474	0	0
0	20	0	0

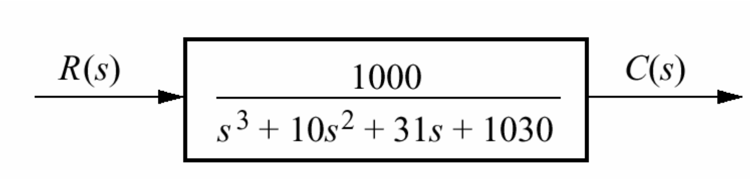
Transfer fonksiyonu için routh tablosunu oluşturalım.
Oluşturulan tablonun ilk sütununun tüm terimleri pozitif;
Bu durumda sistem kararlıdır.

Eğer $\mathrm{D}(s) = s^2 + 3s + 2$ olarak verilseydi; routh tablosunu oluşturmadan direkt kararlı olduğunu söyleyebilirdik. Eğer bütün terimleri pozitif ise 2. derece bir sistem daima kararlıdır.

Şimdi de $\mathrm{D}(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24$ olarak verilsin
bu durumda sistemin kararlılığını belirlemek için tabloya ihtiyacımız var;
Oluşturulan tablonun ilk sütunda negatif terim var;
Bu durumda sistem kararlı değildir.

	1	2
3	1	2
2	1	24
1	-22	0
0	24	0

Routh tablosunu oluşturmak Örnekler;



	1	2	3
3	1	31	0
2	10	1030	0
1	-72	0	
0	1030		

Transfer fonksiyonu için routh tablosunu oluşturalım.

Routh-Hurwitz kriterine göre, birinci kolondaki işaret değişim sayısı kadar sistemin sağ yarı düzlemde kökü vardır. Örnek üzerinden düşünecek olursak; birinci kolon elemanlarından ikincisi 10 iken -72 olmuş birinci işaret değişimi ardından dördüncü satıra geçince tekrar pozitif olmuş ikinci işaret değişimi. İki işaret değişimi olması **sağ yarım kürede** iki kök olduğunu gösterir. **Sistem kararsızdır.**

Kararlılık Analizi
Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Routh tablosunu oluşturmak Örnekler;

$\mathrm{D(s)} = s^6 + 2s^5 + 3s^4 + 7s^3 + 6s^2 + 5s + 6$ olarak verilsin Routh tablosunu oluşturalım.İlk kolondaki negatif değerlere bakarak sistemin kararsız olduğunu söyleriz. Dört kere işaret değişikliği var. Sağ yarım kürede dört kök vardır.

	1	2	3	4
6	1	3	6	6
5	2	7	5	0
4	-0,5	3,5	6	0
3	21	29	0	0
2	4,190476	6	0	0
1	-1,06818	0	0	0
0	6	0	0	0

Örnekte görüldüğü gibi her zaman çarpımları bulmak kolay olmaz;

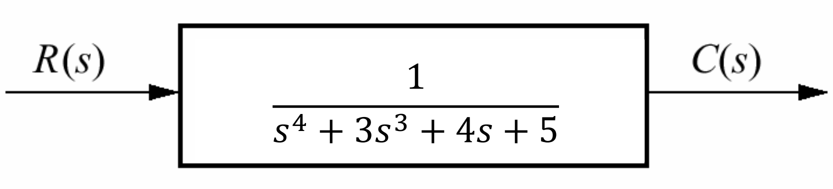
Bu durumda, satırın tamamını pozitif bir sayıyla çarpıp çarpımı kolaylaştırmak mümkündür. Bu işlem sonucu değiştirmez. Şöyleki 3. satırı, 2 ile çarparsak sonucu değiştirmediğini ama çarpma kolaylığı sağladığını görürüz. Ardından 5. satırı 21/4 ile çarparsak; yine çarpma kolaylığı sağladığını görürüz.

Elde edilen sonucu bölüm olarak bırakmakta bir sakınca yoktur.

	1	2	3	4
6	1	3	6	6
5	2	7	5	0
4	-1	7	12	0
3	21	29	0	0
2	44	63	0	0
1	-47/44=-1,06818	0	0	0
0	63	0	0	0

Kararlılık Analizi
Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Routh tablosunu oluşturmak
Örnekler;



	1	2	3
4	1	0	5
3	3	4	
2	-4/3	5	
1	61/4		
0	5		

Transfer fonksiyonunun karakteristik denklemine baktığımızda hurwitz kriterine uymadığını s^2 li terimin kayıp olduğunu görürüz. Bu durumda **sistem kararsızdır**. Ancak kararsızlığa neden olan kökler hakkında bilgi sahibi olmak için de routh tablosunu oluşturabiliriz.

Routh-Hurwitz kriterine göre, birinci kolondaki işaret değişim sayısı kadar sistemin sağ yarı düzlemde kökü vardır. Örnek üzerinden düşünecek olursak; birinci kolon elemanlarından ikinciden üçüncüye geçerken ardından üçüncüden dördüncüye geçerken işaret değişikliği olmuş. İki işaret değişimi olması **sağ yarım kürede** iki kök olduğunu gösterir.

Kararlılık Analizi
Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Routh tablosunun özellikleri

- *Eğer ilk sütunun tüm değerleri pozitif ise **sistem kararlıdır.***
- *Eğer ilk sütun sıfırdan farklı değerlerden oluşuyor ve işaret değişikliği oluyorsa, **işaret değişikliği kadar kök** (kutup) pozitif taraftadır ve **sistem kararsızdır.***
- *Eğer sistem **marjinal kararlı** ise, o zaman Routh tablosunun bir satırı sıfır olur ve ilk sütunda işaret değişikliği olmaz.*
  - *Routh tablosunda sıfır satırının varlığı orijinde kutup olduğunu gösterir.*
  - *Routh tablosunda sıfır olduğu zaman tabloyu tamamlama prosedürü bir sonraki slaytlarda anlatılacaktır.*
- *Eğer tüm satır sıfır değil, satırda sıfırdan farklı değerler varsa sistem kararsızdır.*
  - *Sistemin kararsız olduğunu anlasak bile kaç tane kökün pozitif tarafta olduğunu bulmak için tabloyu tamamlamak isteyebiliriz. Buna ilişkin procedür ilerleyen slaytlarda anlatılacaktır.*
- *Eğer D(s) kesilmişse yani en sonundan bir yada birkaç terimi yoksa*

$$D(s) = s^k D_r\,(s)$$

$k \geq 2 \Longrightarrow$ *sistem kararsızdır (Imajiner eksende tekrarlayan kökler vardır.)*
$k = 1 \Longrightarrow$ *sistem en iyi durumda marjinal kararlıdır ancak $D_r\,(s)$ e bakılarak kararsız mı marjinal kararlı mı olduğuna karar verilir.*

Routh tablosunun özellikleri

Routh tablosunda sıfırlar satırı olduğu zaman tabloyu tamamlama prosedürü.

1.) Tamamen sıfır olan satırın bir önceki satırındaki katsayılar ve bu satırdaki s dereceleri kullanılarak yardımcı polinom oluşturulur. $P(s) = a_k s^k + b_k s^{k-2} + \cdots + c_k s^2 + d_k$

Not: $P(s) = 0$ denkleminin çözümü, orijine göre simetrik kökleri gösterir.

2.) $P(s)$ polinomunun s'ye göre türevi alınır, bulunan değerler tamamen sıfır olan satırda kullanılır

Örnek: $\mathrm{D(s)} = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$

4. satır 0'lardan oluşuyor. Bir önceki satırın derecesi 2 o halde

$$P(s) = a_k s^k + b_k s^{k-2} + \cdots + c_k s^2 + d_k \Longrightarrow P(s) = 2s^2 + 2 \quad \frac{dP(s)}{ds} = 4s$$

	1	2	3
4	1	3	2
3	3	3	0
2	2	2	0
1	0	0	0
0			

	1	2	3
4	1	3	2
3	3	3	0
2	2	2	0
1	4	0	0
0	2		

İlk sütünda işaret değişikliği yok sistem marjinal kararlıdır. Marjinal kararlılığa neden olan orijine göre simetrik kökler ise $P(s) = 2s^2 + 2 = 0$ çözümünden elde edilir. $P_{1,2} = \pm j$

Kararlılık Analizi
Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Routh tablosunun özellikleri

Routh tablosunda sıfırlar satırı olduğu zaman tabloyu tamamlama prosedürü.

Örnek: $\mathrm{D}(s) = s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + 4$

3. satır 0'lardan oluşuyor. Bir önceki satırın derecesi 4 o halde

$$P(s) = s^4 + 5s^2 + 4 \quad \frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 10s$$

	1	2	3
5	1	5	4
4	1	5	4
3	0	0	0
2			
1			
0			

	1	2	3
5	1	5	4
4	1	5	4
3	4	10	0
2	2,5	4	
1	18/5		
0	4		

İlk sütünda işaret değişikliği yok sistem marjinal kararlıdır. Marjinal kararlılığa neden olan orijine göre simetrik kökler ise $P(s) = s^4 + 5s^2 + 4 = 0$ çözümünden elde edilir. $P_{1,2} = \pm j \; P_{3,4} = \pm 2j$

Kalan kökler hakkında bilgi sahibi olmak için ise $D_r\,(s) = \frac{D(s)}{P(s)} = s + 1 \Longrightarrow P_5 = -1$

Kararlılık Analizi

Routh-Hurwitz Kararlılık Kriterleri

Routh tablosunun özellikleri

Routh tablosunda satırın başında sıfır olduğu zaman tabloyu tamamlama prosedürü (Dikkat Sistem Kararsız).

İlk elemanın sıfır olması durumunda bir sonraki satırın elemanlarını bulunurken sıfıra bölüm problemi ortaya çıkar. Sıfıra bölümü önlemek için sıfır yerine **ε** yazılır.

Örnek: $\mathrm{D(s)} = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 15$

	1	2	3
5	1	2	3
4	1	2	15
3	0	-12	0
2			
1			
0			

	1	2	3	ε=+	ε=−
5	1	2	3	+	+
4	1	2	15	+	+
3	ε	-12	0	+	-
2	c_1=12/ε	15	0	+	-
1	c_2=-12	0	0	-	-
0	15	0	0	+	+

$$c_1 = \frac{2\varepsilon + 12}{\varepsilon} = 2 + \frac{12}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \to \pm 0 \ \therefore c_1 = \pm\frac{12}{\varepsilon}$$

$$c_2 = -12 + \frac{5}{4}\varepsilon^2$$

$$\varepsilon \to \pm 0 \ \therefore c_2 = -12$$

ε'un pozitif veya negatif seçilmesi sonucu etkilemiyor, iki koşulda da Routh tablosunda iki kere işaret değiştiğini görüyoruz. Bu durum sağ tarafta iki pozitif kök olduğunu anlıyoruz. Sistemin kararsız olduğunu zaten baştan biliyoruz.

Kararlılık Analizi
Kararlılık marjı

gibi doğrusal zamanla değişen bir sistemi ele alalım. Burada

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

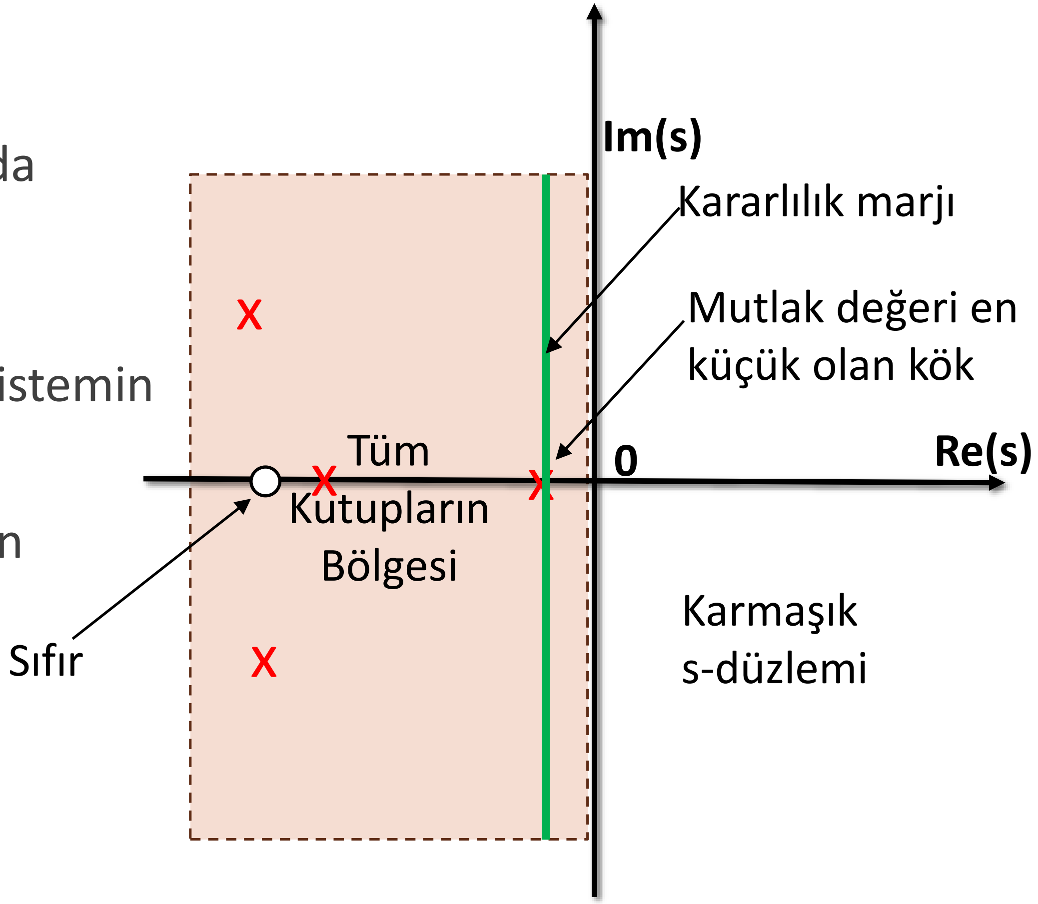
$(i = 1,2,3 \ldots .n)$ ve $(j = 1,2,3, \ldots ..m)$ olmak üzere p_i'ler sistemin kutupları ve z_j'ler sistemin sıfırlarıdır.

Kararlı bir sistemde **kararlılık marjı** köklerin reel kısımlarının mutlak değeri en küçük olanına eşittir.

$$\mu_s \equiv \min_k |Re(p_k)|$$

Örnek: $D(s) = \ (s+2)(s+5)(s+8+3j)(s+8-3j)$

$$p_1 = -2, p_2 = -5, p_3 = -8-3j, p_4 = -8+3j \quad \therefore$$
$$\mu_s \equiv \min_k\{|-2|, |-5|, |-8|, |-8|\} = 2$$



Kararlılık Analizi
Kararlılık marjı

Çoğunlukla kontrol sistemleri tasarlayan mühendisler, sistemin sadece kararlı olmasını yeterli bulmaz, belirlenen bir kararlılık marjininin ötesinde kararlılığı garanti etmeyi isterler yani

$$\mu_s \geq \mu$$

Burada μ istenen kararlılık marjı. Mühendis, sistemin kararlılık marjının, istenen kararlılık marjından büyük eşit olmasını sağlamak zorundadır. Bunun sağlanması için bir dönüşüm yapılır.

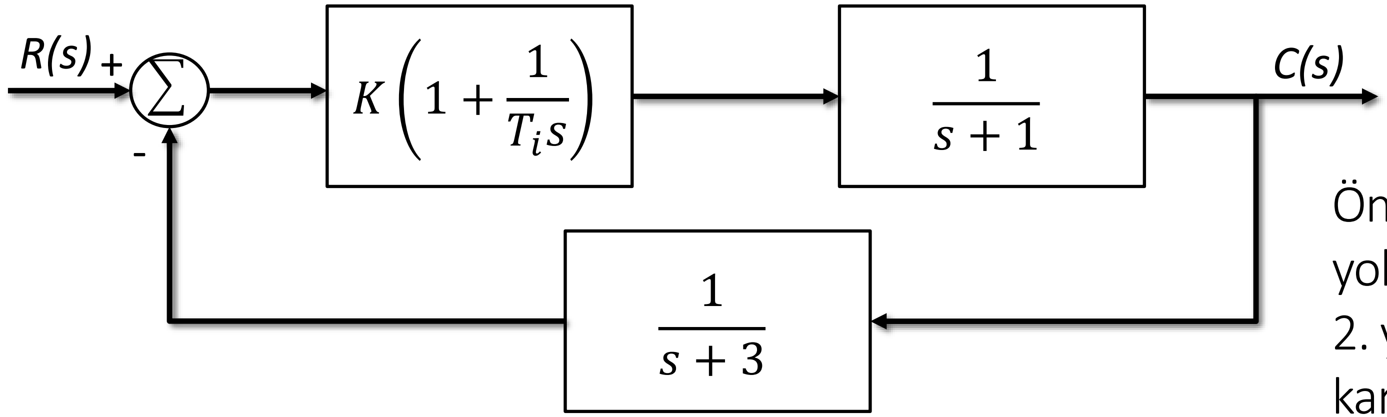
$$z = s + \mu \Longrightarrow s = z - \mu$$

Dönüştürülmüş karakteristik denklem $D(\bar{z}) = D(z - \mu)$

Eğer $D(\bar{z})$ Routh kriterlerini sağlarsa o zaman $\mu_s \geq \mu$ sağlanmış olur.

Kararlılık Analizi
Kararlılık marjı

Örnek 1: Verilen sistemde kontrolcü olarak oransal integral (PI) kontrolcü kullanılmaktadır. Sistemin kararlı olması için Ti ve K parametrelerinin bulunması gereken bölgeyi bulunuz.



Önce karakteristik denklemi bulmak gerek; I. yol, transfer fonksiyonunu bulmak;
2. yol, transfer fonksiyonunu bulmadan karakteristik denklemi bulmak;

I. yol

$$M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{K\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)}{1+K\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{s+3}\right)}$$

$$D(s)=(T_i)s^3+(4T_i)s^2+[(3+K)T_i]s+K$$

II. yol

$$G_0(s)=K\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

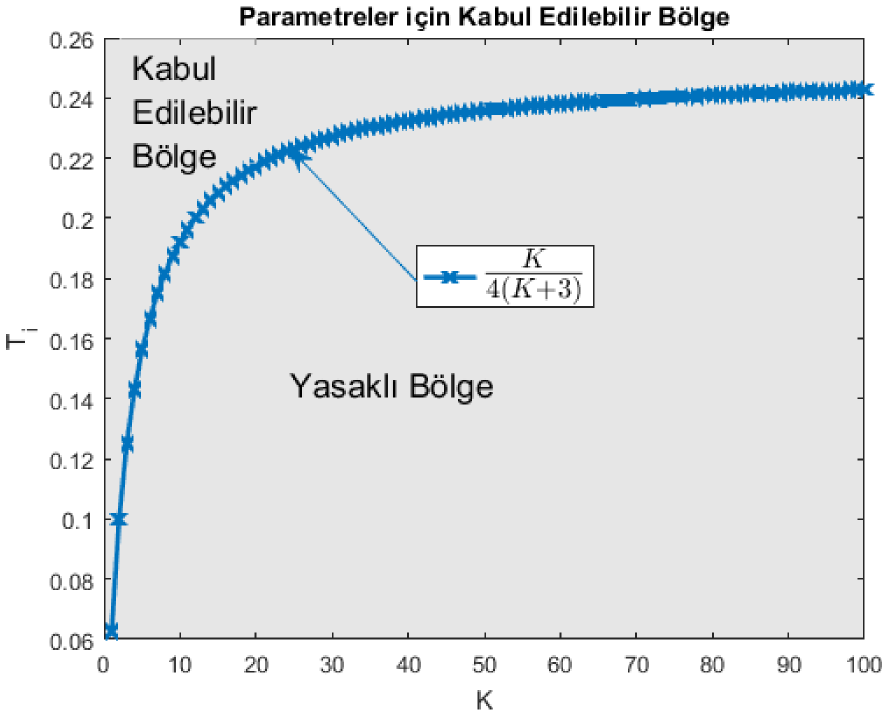
$$D(s)=Num\left(1+G_0(s)\right)$$

$$D(s)=(T_i)s^3+(4T_i)s^2+[(3+K)T_i]s+K$$

Örnek 1 Devam: $D(s) = (T_i)s^3 + (4T_i)s^2 + [(3+K)T_i]s + K$

Sistem 3. dereceden sistemin kararlı olması için tüm katsayılar sıfırdan büyük olacak aynı zamanda içteki terimlerin çarpımı dıştaki terimlerin çarpımından büyük olacak; Yani $(4T_i)[(3+K)T_i] > T_i K$

Bu koşullara göre; $T_i > 0, K > 0 \; ve \;\; T_i > \frac{K}{4(3+K)}$



Örnek 2: Önceki, kontrolcü olarak oransal integral (PI) kontrolcü kullanılan sistemde kararlılık marjının 1'den küçük olması istenirse, sistem parametreleri Ti ve K'nın bulunması gereken bölgeyi bulunuz.

$$D(s) = (T_i)s^3 + (4T_i)s^2 + [(3+K)T_i]s + K$$

$$z = s+1 \Longrightarrow s = z-1 \;\therefore$$

$$\overline{D}(z) = D(z-1) = (T_i)(z-1)^3 + (4T_i)(z-1)^2 + [(3+K)T_i](z-1) + K$$

$$\overline{D}(z) = T_i z^3 + T_i z^2 + [(K-2)T_i]z + K(1-T_i)$$

Hurwitz Kriterlerinden $\Longrightarrow K-2>0 \Longrightarrow K>0$ ve $T_i>0$ ve $1-T_i>0 \;\therefore\; 0<T_i<1$

Routh Kriterlerinden $\Longrightarrow T_i[(K-2)T_i] > T_i K(1-T_i) \Longrightarrow T_i > \frac{K}{2(K-1)}$