Otomatik Kontrol

TRANSFER FONKSİYONLARI VE BLOK DİYAGRAMLAR

Hazırlayan: Dr. Nurdan Bilgin

Transfer Fonksiyonları

$$\underset{\text{Giriş}}{x(t)} \longrightarrow \boxed{\text{Sistem}} \longrightarrow \underset{\text{Çıkış}}{y(t)}$$

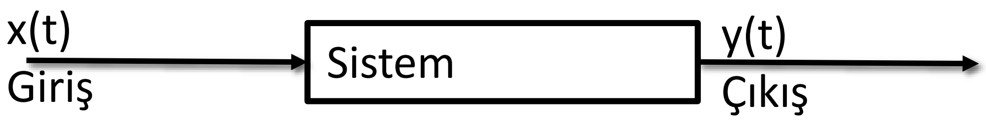
Bu derste, sadece LTI (doğrusal zamanla değişmez) sistemlerle ilgileneceğiz.

Zamanla Değişmez→ Sistemin parametreleri sabittir.

Doğrusallık

- **Oransallık** — **Eğer $x(t) \rightarrow y(t)$ o zaman $k \cdot x(t) \rightarrow k \cdot y(t)$**
- **Superpozisyon Üstüste Bindirme** — **Varsayalım $x1(t) \rightarrow y1(t)$ ve $x2(t) \rightarrow y2(t)$, o zaman $x3(t)=k1 \cdot x1(t)+k2 \cdot x2(t) \rightarrow y3(t)=k1 \cdot y1(t)+k2 \cdot y2(t)$**

Transfer Fonksiyonları



Doğrusallığın matematiksel tanımı: I/O (Giriş-Çıkış) ilişkisi sadece y(t) ve x(t)'nin kendilerini ve onların türevlerinin birinci kuvvetlerini herhangi bir çarpım olmaksızın içerebilir.

Varsayalım ki bir sistem doğrusal zamanla değişmez sistem olsun. Bu durumda I/O (Giriş-Çıkış) ilişkisi sabit katsayılı doğrusal bir diferansiyel denklem olur.

$$\underbrace{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y}_{Çıkış\ Tarafı} = \underbrace{b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x}_{Giriş\ Tarafı}$$

Transfer Fonksiyonları

Laplace Dönüşümü:

Önce Laplace dönüşümünün tanımından başlayacağız ve ders kapsamında kullanılacak bazı özelliklerini not edeceğiz.

Birkaç tanım;

x(t), t zamanına bağlı bir fonksiyon ki t<0 için x(t)=0

s, kompleks bir değişken yani s=σ+jω ve $j = \sqrt{-1}$

$\mathcal{L}$, Laplace integrali $\int_0^\infty e^{-st} dt$ tarafından yapılan dönüşümü gösteren işlem simgesi.

X(s), x(t)'nin laplace dönüşümü; Bu dönüşümü daha açık yazarsak;

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt\,[x(t)] = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

Not: st boyutsuz olmalı bunun için $birim(s) = \frac{1}{birim(t)}$

Transfer Fonksiyonları

Türevin Laplace Dönüşümü:

$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \Rightarrow \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x_0 \qquad x_0 = x(0), x(t)$'nin başlangıç değeri.

Sistem başlangıçta durgunlukta ve başlangıç değerleri sıfır varsayımıyla,

$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s)$; Not: s türev alıcı olarak da yorumlanabilir.

Başlangıç değerleri 0 koşuluyla diferansiyel denklemlerin laplace dönüşümleri şu şekildedir.

$$\underbrace{a_n s^n Y(s) + \cdots + a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s)}_{Çıkış\ Tarafı} = \underbrace{b_m s^m X(s) + \cdots + b_2 s^2 \mathrm{X(s)} + b_1 s \mathrm{X(s)} + b_0 \mathrm{X(s)}}_{Giriş\ Tarafı}$$

İfadeyi $Y(s)$ & $X(s)$ ortak parantezinde düzenleyelim

$$\underbrace{(a_n s^n + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s)}_{Çıkış\ Tarafı} = \underbrace{(b_m s^m + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) \mathrm{X(s)}}_{Giriş\ Tarafı}$$

Transfer Fonksiyonları

Transfer Fonksiyonunun Tanımı:

$$\underbrace{(a_n s^n + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s)}_{Çıkış\ Tarafı} = \underbrace{(b_m s^m + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0)\mathrm{X(s)}}_{Giriş\ Tarafı}$$

Çıkışı yalnız bırakacak şekilde denklemi düzenleyelim.

$$\underbrace{Y(s)}_{Çıkış} = \underbrace{\frac{b_m s^m + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{Transfer\ fonksiyonu} \underbrace{\mathrm{X(s)}}_{Giriş}$$

s- tanım kümesinde I/O giriş-çıkış ilişkisi giriş ve çıkışın katsayı polinomlarının oranıdır. Bu ilişkiye transfer fonksiyonu adı verilir.

$$\underbrace{Y(s)}_{Çıkış} = \underbrace{G_{YX}}_{Transfer\ fonksiyonu} \underbrace{\mathrm{X(s)}}_{Giriş}$$

Transfer Fonksiyonları

Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemlerin sınıflandırılması:

SISO Sistem→ Tek Girişli Tek Çıkışlı Sistem (Single Input/Single Output)

SIMO Sistem→ Tek Girişli Çok Çıkışlı Sistem (Single Input/Multi Output)

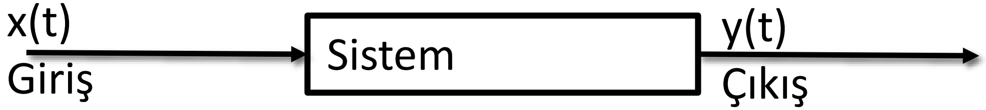
MISO Sistem→ Çok Girişli Tek Çıkışlı Sistem (Multi Input/Single Output)

MIMO Sistem→ Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistem (Multi Input/Multi Output)

Transfer Fonksiyonları

Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemlerin sınıflandırılması:

SISO Sistem→ Tek Girişli Tek Çıkışlı Sistem (Single Input/Single Output)



t(zaman) tanım kümesinde, I/O (Giriş-Çıkış) ilişkisi sabit katsayılı doğrusal bir diferansiyel denklemdir.

$$\underbrace{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y}_{Çıkış\ Tarafı} = \underbrace{b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x}_{Giriş\ Tarafı}$$

Denklemin **Çıkış Tarafı**; sistemin dinamik karakteristiğini gösterir. Çıkışı üretmek için sistemin nasıl çalıştığını ifade eder.

Denklemin **Giriş Tarafı**; Girişin kendi başına ve türevleri ile birlikte sistemi nasıl etkilediğini gösterir.

Çıkış tarafının en yüksek derecesi n sistemin derecesidir. n büyüdükçe sistem dinamiği karmaşıklaşır. m ise giriş etkisinin derecesidir. Doğal sistemlerde her zaman **n≥m** dir.

Transfer Fonksiyonları

Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemlerin sınıflandırılması:

SISO Sistem→ Tek Girişli Tek Çıkışlı Sistem (Single Input/Single Output)

Tek girişli, tek çıkışlı sistemin sıfır başlangıç değerlerinde laplace dönüşümü yapılırsa

$$\underbrace{(a_n s^n + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}_{D(s)} Y(s) = \underbrace{(b_m s^m + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}_{N(s)} \mathrm{X}(s)$$

$D(s)$ Karakteristik Polinom (Characteristic Polinomial) ve N(s) Giriş Etkisi (Input Effect) olarak adlandırılır. D ve N harfleri İngilizce bölen (Denominator) ve pay (Numerator) sözcüklerinin ilk harflerinden gelmektedir.

Transfer Fonksiyonu (TF).

$$\underbrace{Y(s)}_{Çıkış} = \underbrace{G(s)}_{Transfer\ fonksiyonu} \underbrace{\mathrm{X}(s)}_{Giriş} \ \therefore\ G(s) = G_{YX}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \underbrace{\frac{b_m s^m + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{Transfer\ fonksiyonu}$$

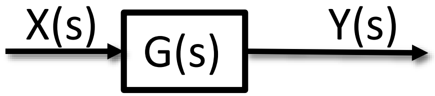
Transfer Fonksiyonları

Transfer fonksiyonlarının özellikleri:

1. G(s) başlangıç koşullarına bağlı değildir.
2. G(s) polinom katsayıları $a_n, \cdots, a_2, a_1, a_0, b_m, \cdots, b_2, b_1, b_0$ aracılığıyla sistem parametrelerine bağlıdır.
3. G(s) girişin çıkışı nasıl etkilediğini gösterir ancak kendisi giriş ve çıkış ifadelerini barındırmaz.
4. G(s)'in iki polinomun bölümü şeklinde ifade edilebilmesi için sistemin zaman gecikmeleri (time delays) barındırmaması gerekmektedir. Yani şöyle sistemlerin transfer fonksiyonunu yazamayız.
$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) + a_0' y(t - t_1) = b_0 x(t) + b_0' x(t - t_2)$$
5. Doğal sistemlerde $n \geq m$ dir.

Transfer Fonksiyonları

SISO Sistemin İşlevsel (Operational) blok diyagramı



İşlevsel Blok diyagramları sadece s tanım kümesinde çizilebilirler. G(s) girişin çıkışa dönüşme sürecini ifade ettiği için çizilen blok diyagramlara işlevsel blok diyagram diyoruz.

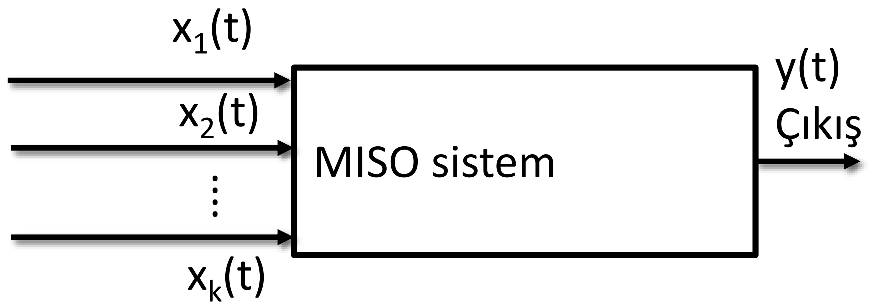
İşlevsel Blok diyagramlarında her bir bloğun bir girişi ve bir çıkışı olur. Yönlendirilmiş (ucuna ok konulmuş) dallar nedenselliği göstermektedir. Yani X(s), Y(s)'e neden olur ancak tersi doğru değildir.

Transfer Fonksiyonları

Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemlerin sınıflandırılması:

MISO Sistem→ Çok Girişli Tek Çıkışlı Sistem (Multi Input/Single Output)

Tanımlayıcı B.D.



Böyle bir sistemin t- tanım kümesindeki giriş çıkış denklemi

$$\underbrace{a_n\frac{d^n y}{dt^n}+\cdots+a_2\frac{d^2 y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y}_{Çıkış\ Tarafı}=\underbrace{b_{m_1}\frac{d^{m_1}x_1}{dt^{m_1}}+\cdots+b_{m_2}\frac{d^{m_2}x_2}{dt^{m_2}}+\cdots+b_{m_k}\frac{d^{m_k}x_k}{dt^{m_k}}+\cdots}_{Giriş\ Tarafı}$$

Transfer Fonksiyonları

Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemlerin sınıflandırılması:

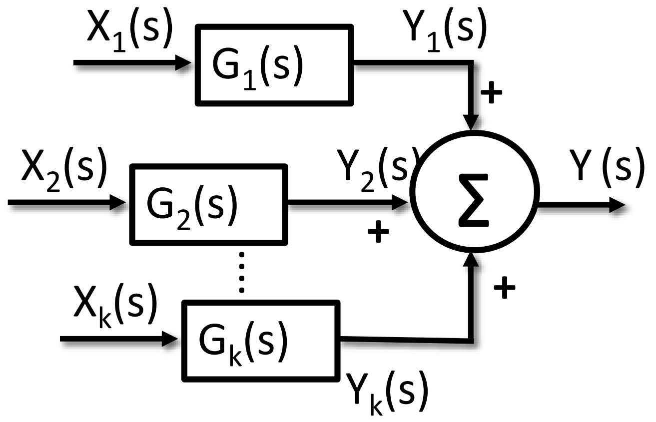
MISO Sistem→ Çok Girişli Tek Çıkışlı Sistem (Multi Input/Single Output)

t- tanım kümesindeki giriş çıkış denklemi

$$\underbrace{a_n\frac{d^n y}{dt^n}+\cdots+a_2\frac{d^2 y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y}_{Çıkış\ Tarafı}=\underbrace{b_{m_1}\frac{d^{m_1}x_1}{dt^{m_1}}+\cdots+b_{m_2}\frac{d^{m_2}x_2}{dt^{m_2}}+\cdots+b_{m_k}\frac{d^{m_k}x_k}{dt^{m_k}}+\cdots}_{Giriş\ Tarafı}$$

s- tanım kümesindeki giriş çıkış denklemi

$$Y(s)=\underbrace{G_1(s)X_1(s)}_{Y_1(s)}+\underbrace{G_2(s)X_2(s)}_{Y_2(s)}+\cdots+\underbrace{G_k(s)X_k(s)}_{Y_k(s)}$$



Burada $Y_i(s)$'ler $X_i(s)$ girişlerine bağlı kısmı çıkışlar,

$Y(s)$ ise genel çıkıştır.

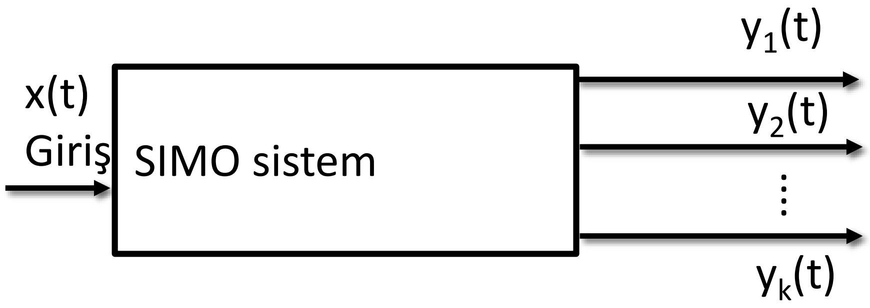
$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)+\cdots+Yk(s)$$

Transfer Fonksiyonları

Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemlerin sınıflandırılması:

SIMO Sistem→ Tek Girişli Çok Çıkışlı Sistem (Single Input/Multi Output)

Tanımlayıcı B.D.

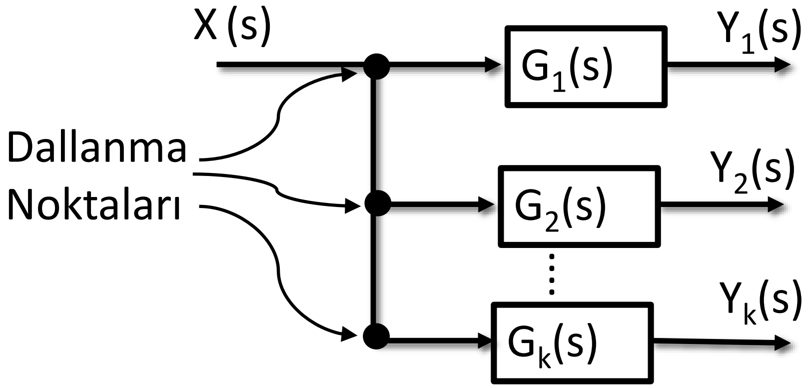


$Y_1(s) = G_1(s)X(s)$

$Y_2(s) = G_2(s)X(s)$

$\vdots$

$Y_k(s) = Gk(s)X(s)$



Transfer Fonksiyonları

Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemlerin sınıflandırılması:

MIMO Sistem→ Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistem (Multi Input/Multi Output)

$Y_1(s) = G_{11(s)}X_{1(s)} + G_{12(s)}X_{2(s)} + \cdots + G_{1p}(s)Xp(s)$

$Y_2(s) = G_{21(s)}X_{1(s)} + G_{22(s)}X_{2(s)} + \cdots + G_{2p}(s)Xp(s)$

$\vdots$

$Y_q(s) = Gq_{1(s)}X_{1(s)} + Gq_{2(s)}X_{2(s)} + \cdots + G_{qp}(s)Xp(s)$

Bu tür denklem sistemlerini kolaylık açısından matriks eşitlikleriyle göstermeyi tercih ederiz.

$\bar{Y}(s) = \hat{G}(s)\,\bar{X}(s)$

$$\bar{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} = \text{Çıkış } \mathbf{vek.}, \bar{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_p(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Giriş\ vek.}, \hat{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1p}(s) \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{q1(s)} & G_{q2(s)} & \cdots & G_{qp}(s) \end{bmatrix}_{q\times p}$$

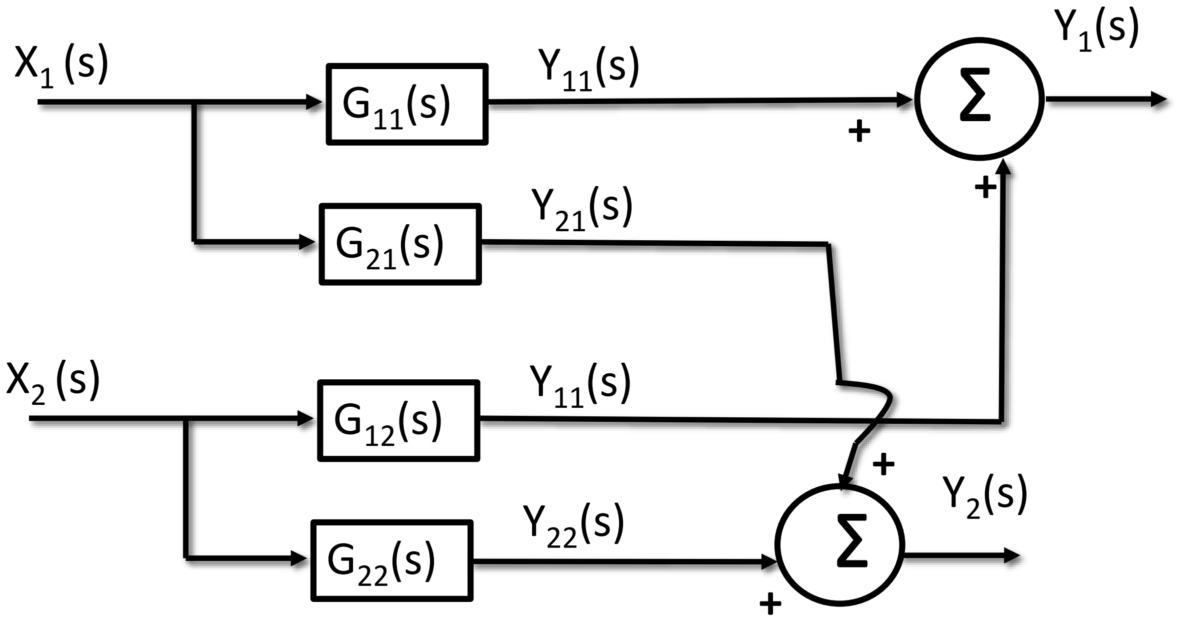
Transfer Fonksiyonları

Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemlerin sınıflandırılması:

İki Girişli, İki Çıkışlı bir MIMO Sistem için işlevsel Blok Diyagram Örneği

$$Y_1(s) = G_{11(s)}X_{1(s)} + G_{12(s)}X_{2(s)}$$

$$Y_2(s) = G_{21(s)}X_{1(s)} + G_{22(s)}X_{2(s)}$$

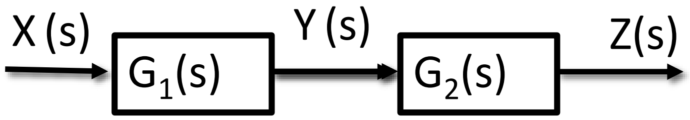


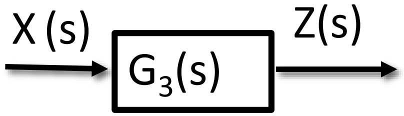
İşlevsel blok diyagramlarla ilgili bazı kurallar

Kademeli Birleşimi (Cascaded Combination)

$$\left.\begin{array}{l} Z(s) = G_{2(s)}Y(s) \\ Y(s) = G_1(s)X(s) \end{array}\right\} \rightarrow Z(s) = \underbrace{\left[G_1(s)G_{2(s)}\right]}_{G_3(s)} X(s)$$

$$Z(s) = G_3(s)X(s)$$





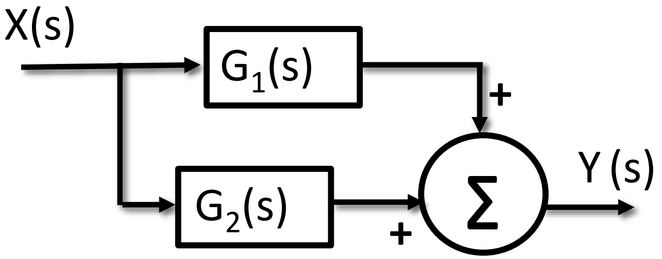
Bu özelliğe transfer fonksiyonlarının kademeli birleşimi veya çarpımsal birleşimi diyoruz.

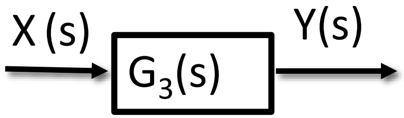
Eklemeli Birleşim (Additive Combination)

$$Y(s) = G_1(s)X(s) + G_{2(s)}X(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\left[G_{1(s)} + G_{2(s)}\right]}_{G_3(s)} X(s)$$

$$Y(s) = G_3(s)X(s)$$

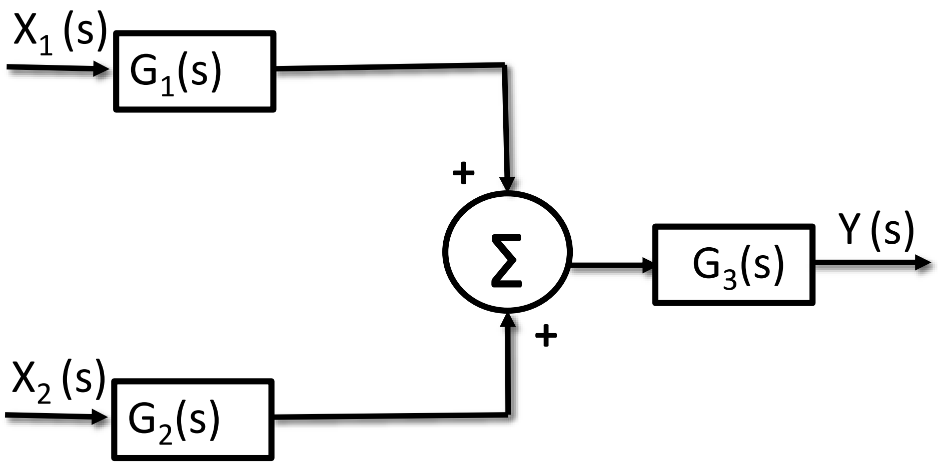


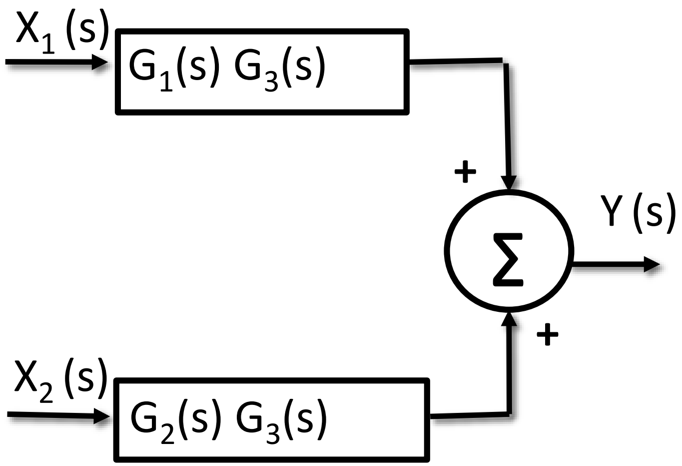


Bu özelliğe transfer fonksiyonlarının eklemeli diyoruz.

Blok diyagramlar

Çarpanlara Ayırma (Factorization)

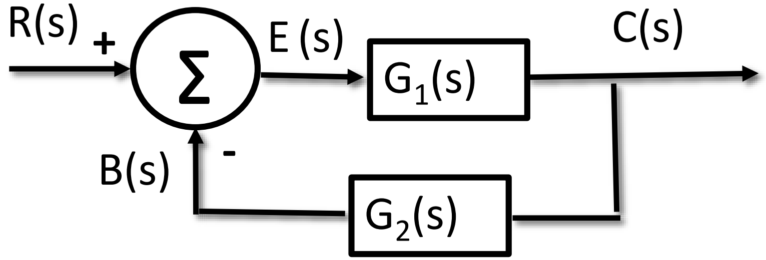


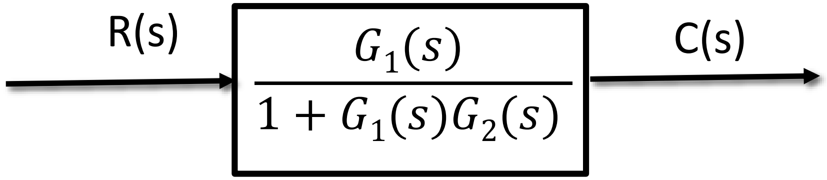


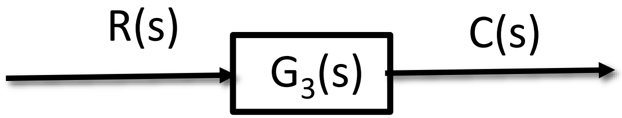
$$Y(s) = \left(X_1(s)G_{1(S)} + X_2(s)G_{2(S)}\right) G_3(s) \Rightarrow\Rightarrow Y(s) = X_1(s)G_{1(S)}G_3(s) \; + X_2(s)G_{2(S)}\, G_3(s)$$

Blok diyagramlar

Geri Bildirimin Birleşimi (FB Combination)







$$C(s) = G_1(s)E(s) \;\&\; E(s) = R(s) - B(s) \;\&\; B(s) = G_2(s)C(s)$$

$$\Downarrow$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - G_2(s)C(s)$$

$$C(s) = G_1(s)E(s) = G_1(s)(R(s) - G_2(s)C(s))$$

$$G_1(s)R(s) = (1 + G_1(s)G_2(s))C(s)$$

$$C(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) \Rightarrow\Rightarrow C(s) = G_3(s)R(s)$$

Blok diyagramlar

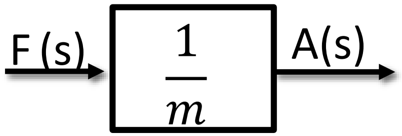
Örnek:

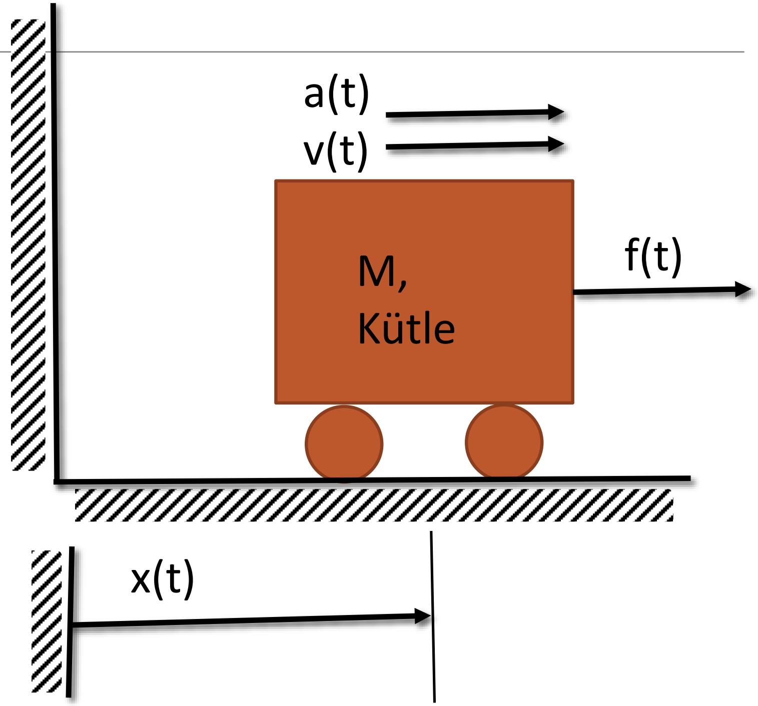
Durum1; Giriş f(t), Çıkış a(t)

Giriş Çıkış Denklemi t tanım kümesinde: $a(t) = \frac{1}{m} f(t)$

Giriş Çıkış Denklemi s tanım kümesinde: $A(s) = \frac{1}{m} F(s)$

Transfer Fonksiyonu: $G_{af}(s) = \frac{1}{m}$



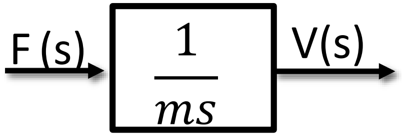


Durum2; Giriş f(t), Çıkış v(t)

Giriş Çıkış Denklemi t tanım kümesinde: $\dot{v}(t) = \frac{1}{m} f(t)$

Giriş Çıkış Denklemi s tanım kümesinde: $sV(s) = \frac{1}{m} F(s) \rightarrow V(s) = \frac{1}{ms} F(s)$

Transfer Fonksiyonu: $G_{vf}(s) = \frac{1}{ms}$



Blok diyagramlar

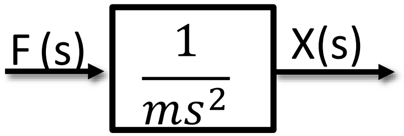
Örnek:

Durum3; Giriş f(t), Çıkış x(t)

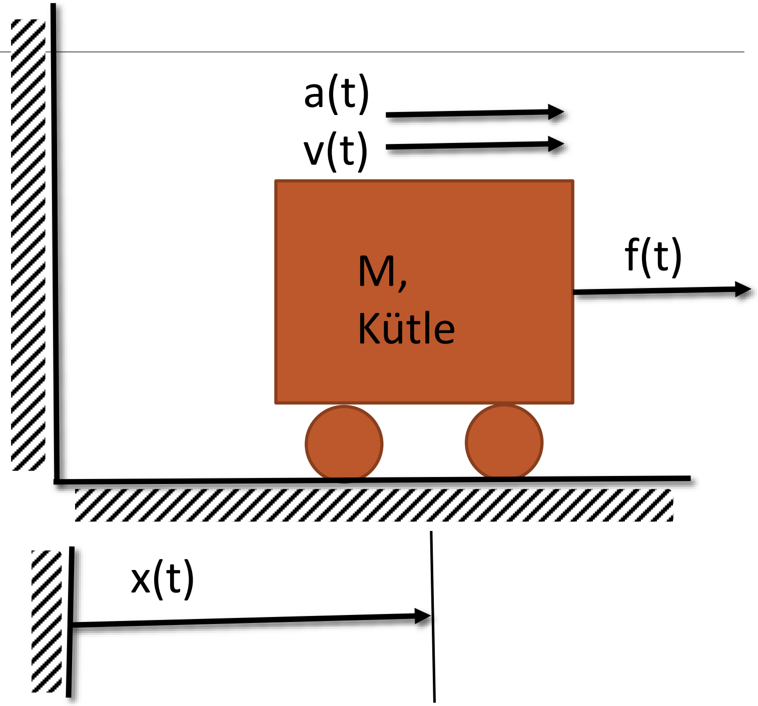
Giriş Çıkış Denklemi t tanım kümesinde: $\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} f(t)$

Giriş Çıkış Denklemi s tanım kümesinde:$s^2 X(s) = \frac{1}{m} F(s)$

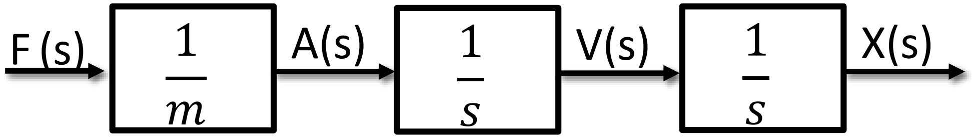
$$X(s) = \frac{1}{ms^2} F(s)$$



Transfer Fonksiyonu: $G_{xf}(s) = \frac{1}{ms^2}$



Kademeli sistem olarak gösterimi

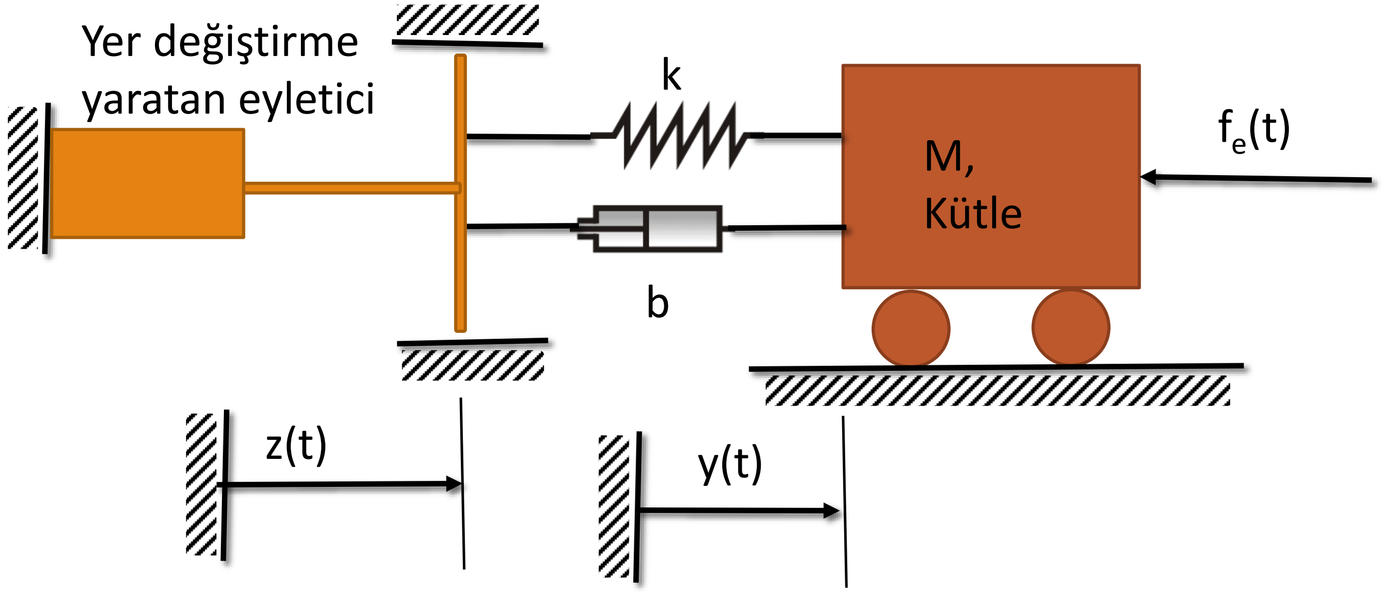


s, türev alıcı; $\frac{1}{s}$, integral alıcıdır.

Blok diyagramlar

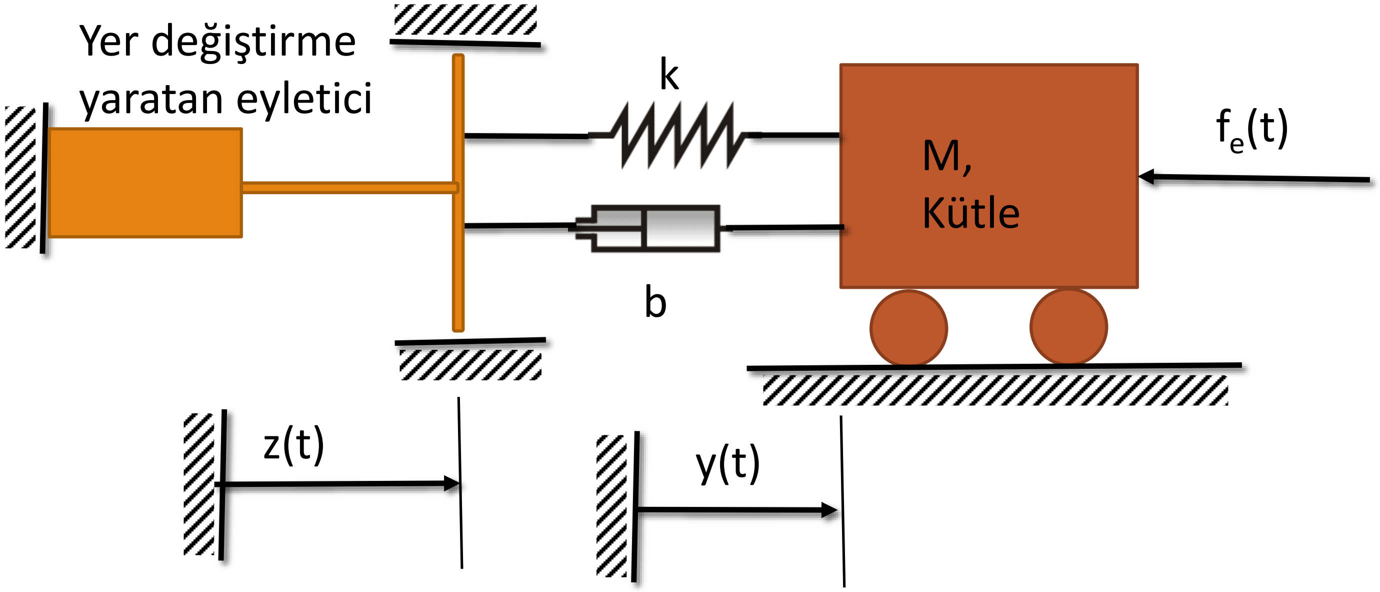
Sistemlerin Blok Diyagramı Şeklinde Gösterimi

Örnek 1:

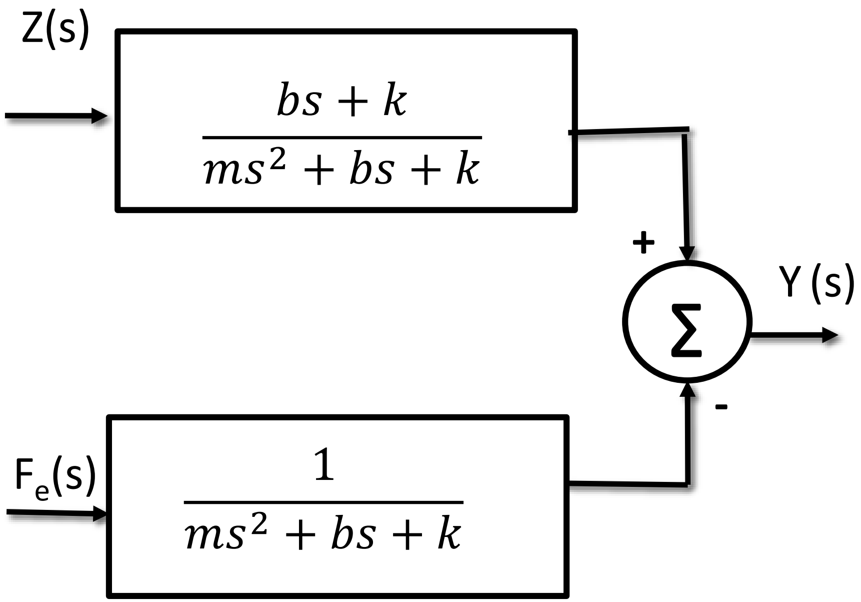


Burada k, yay sabiti; b, sönüm katsayısı; z(t) ve $f_e(t)$ sistemin girişleri; y(t) ise sistemin çıkışı.

Blok diyagramlar



Sistemin Blok Diyagramı



Şimdi örnekteki sistemin blok diyagramını nasıl elde ettiğimizi tartışacağız.

Blok diyagramlar

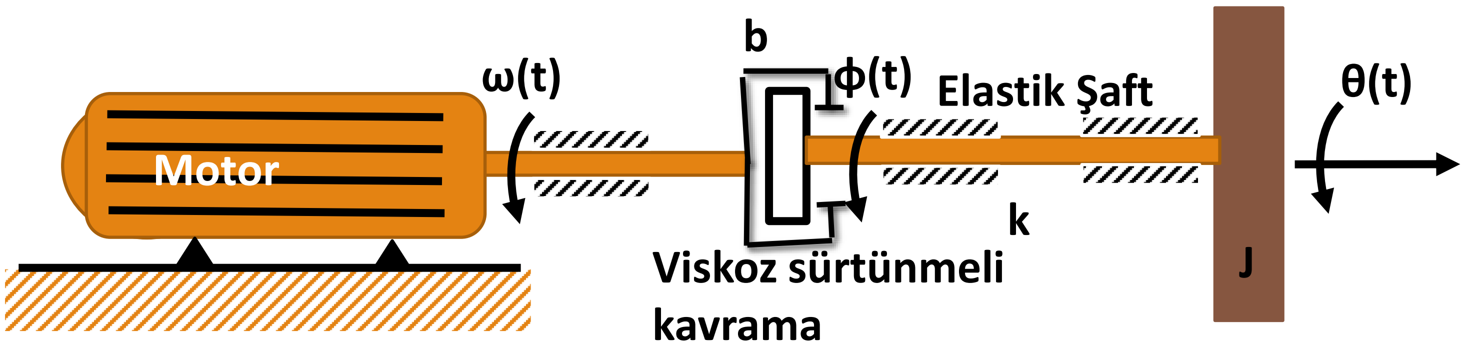
Sistemlerin Blok Diyagramı Şeklinde Gösterimi

Örnek 2:

Giriş ω(t)

Birinci Durum Çıkış θ(t)

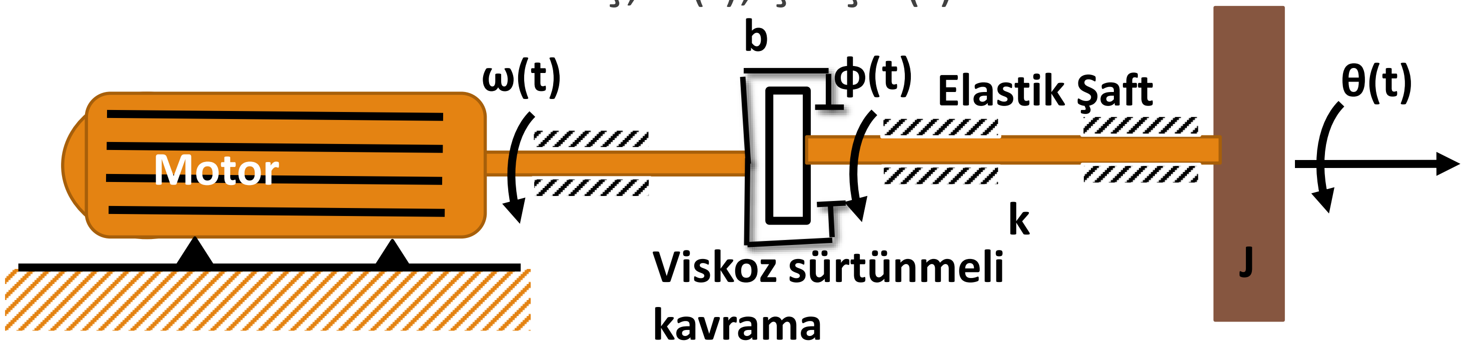
İkinci Durum Çıkış ϕ(t)

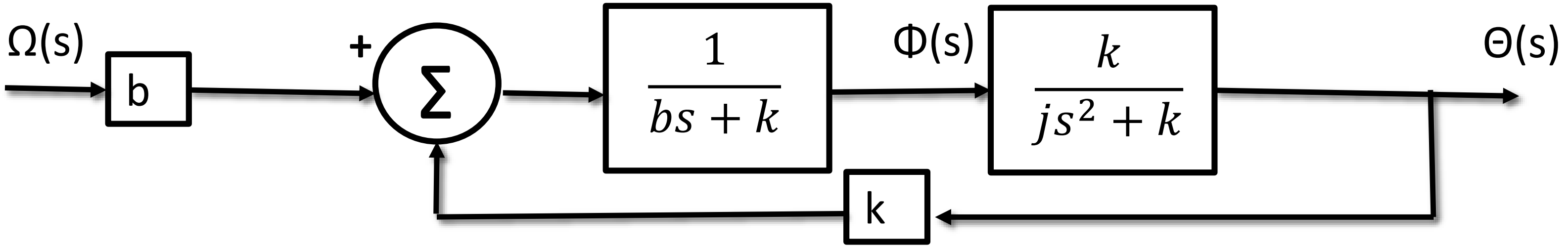


Blok diyagramlar

Sistemlerin Blok Diyagramı Şeklinde Gösterimi

Örnek 2: Birinci Durum Giriş; ω(t), Çıkış θ(t)

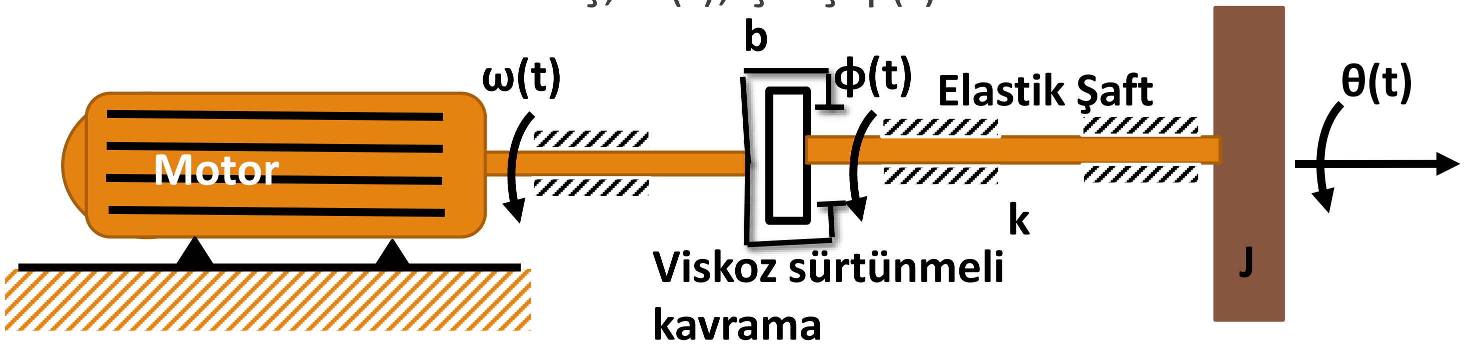


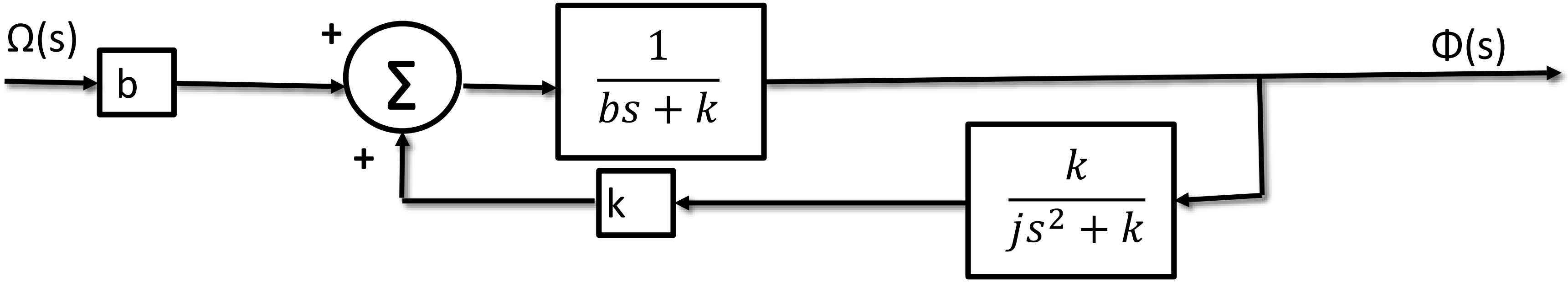


Blok diyagramlar

Sistemlerin Blok Diyagramı Şeklinde Gösterimi

Örnek 2: İkinci Durum Giriş; ω(t), Çıkış ϕ(t)





Özet

Bu derste,

- Transfer fonksiyonlarına giriş yaptık.
- LTI (Doğrusal Zamanla Değişmez) sistemleri tanıdık.
- Doğrusallık kavramını yeniden hatırladık.
- Laplace dönüşümünü hatırladık.
- Transfer fonksiyonunun tanımını yaptık ve özelliklerini inceledik
- Giriş-Çıkış sayılarına göre sistemleri sınıflandırdık.
- Blok diyagramların kademeli ve eklemeli birleşimini, çarpanlara ayrılmasını ve geri bildirim birleşimi özelliklerini gördük
- Sistemlerin Blok diyagramı olarak gösterilmesini çalıştık