

# MAK403 OTOMATİK KONTROL

## KISA SINAV 5

21/12/2018

Dr. Nurdan Bilgin

Gerekli Olabilecek Formüller:

$$G(s) = K \frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \text{ ya da } G(s) = K \frac{\eta \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\xi = \cos\beta \text{ ve } \sqrt{1 - \xi^2} = \sin\beta; \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

**Soru 1:** Aşağıda verilen yüksek dereceli sistemin ikinci derece bir sistemin davranışını gösterdiği gözlenmiştir.

$$G(s) = \frac{3(s + 2)}{(s^2 + 5s + 6)(s^2 + s + 4)}$$

- Transfer fonksiyonuna bakarak sistemin kararlılığı konusunda yorum yapmanız istenirse sistemin kararlılığı hakkında ne söylersiniz.
- Verilen sistem ikinci derece sisteme indirgenğinde elde edilecek transfer fonksiyonunu bulunuz.
- Elde ettiğiniz ikinci derece sistemin doğal frekansını ve sönüm oranını bulunuz.
- Sönümlü doğal frekans ve  $\beta$  açısını belirleyiniz.
- Sönüm oranına bakarak sistemin davranışı hakkında yorum yapmanız istenirse ne söylersiniz.

### Çözüm 1:

- Sistem kararlıdır. Karakteristik denklem iki ikinci dereceden polinomun çarpımı şeklindedir. İkinci derece sistemler için pratik olarak, Hurwitz testini geçiyorsa kararlı olduklarını söyleyebiliriz.
- Önce sistemin payını çarpanlara ayırılım, ikinci dereceden sistemlerin köklerini bulmaya gereksinimimiz var;

$$s^2 + 5s + 6 \Rightarrow p_1 = -2; p_2 = -3$$

$$s^2 + s + 4 \Rightarrow p_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm 1.936i = -0.5 \pm 1.936i$$

Birinci kutup  $p_1 = -2$  ile sistemin sıfırı arasında kutup sıfır sadeleşmesi var.

İkinci kutup üçüncü ve dördüncü kutubun gerçek kısmına göre imajiner eksene 5 katından daha fazla uzaklıkta Dolayısıyla sistemi aynı davranışı gösterecek şekilde daha alt sisteme indirgediğimizde

$$G_a(s) = \frac{3K_a}{s^2 + s + 4}$$

Yazabiliriz. Burada  $K_a$

$$G(0) = G_a(0) \Rightarrow \frac{6}{24} = \frac{3K_a}{4} \Rightarrow K_a = \frac{1}{3}$$

Dolayısıyla

$$G_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 4}$$

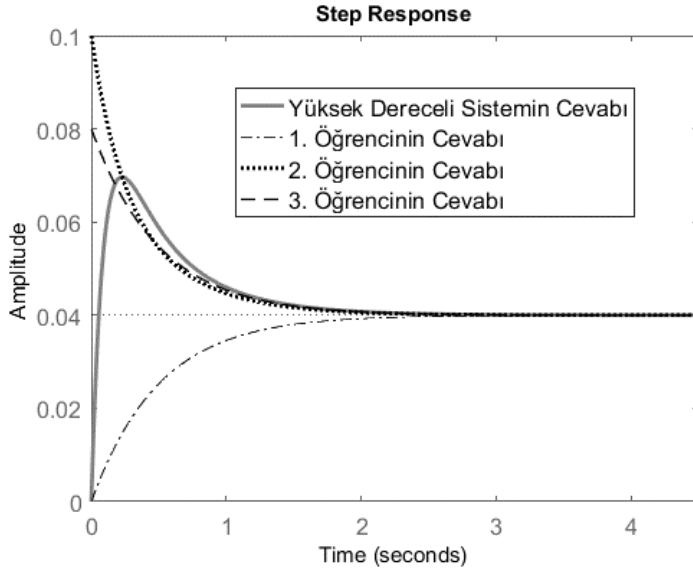
Olur.

- $\omega_n = \sqrt{4} = 2$  ve  $2\xi\omega_n = 1 \Rightarrow \xi = 0.25$
- $\tan\beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \Rightarrow \beta = 75.52^\circ; \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 2\sqrt{1-0.25^2} = 1.9365$
- $\xi = 0.25 \therefore 0 < \xi < 1 \therefore$  Sistem az sönümlü

**Soru 2:** Üç arkadaş kendilerine verilen ödev sorularından yüksek dereceli sistemi daha alt dereceli bir sisteme indirgeme problemi üzerinde çalışmış aşağıdaki gibi üç farklı sonuç bulmuşlardır; Ardından birim adım giriş vererek aşağıdaki grafikleri elde etmişler, sonucunda sadece bir öğrencinin çözümünün doğruluğuna karar vermişlerdir.

$$G(s) = \frac{(s+4)(s+1)}{(s+10)(s+5)(s+2)}$$

$$I. \text{ Öğr. Sonucu } G_a(s) = \frac{0.08}{(s+2)}; II. \text{ Öğr. Son. } G_a(s) = \frac{0.1(s+4)(s+1)}{(s+5)(s+2)}; III. \text{ Öğr. Son. } G_a(s) = \frac{0.08(s+1)}{(s+2)}$$



- Hangi sonucun doğru olduğunu işlem yaparak kanıtlayınız..
- Hem verilen sistemin hemde yakınsatılmış sistemlerin durgun durum hatasını ve durgun durum kazancını bulunuz.
- Üç sonucu çıkış fonksiyonlarının başlangıç ve son değerleri açısından karşılaştırınız.
- Yüksek dereceli sistemin tip numarasını ve derecesini ifade ediniz.
- Sistemin kutuplarına bakarak davranışının ikinci dereceden mi yoksa birinci dereceden mi bir sisteme benzeyeceğine karar verebilir miyiz? Nasıl?

### Çözüm 2:

- Verilen sistemin kutupları incelendiğinde hepsinin negatif ve sadece gerçek köklerden oluştuğu görülmektedir. Sistemdeki baskın kutup bu durumda imajiner eksene en yakın kutup olacaktır. Bu durumda 2'nin baskın kutup olduğu görülecektir. Verilen sistemle, benzetilen sistemin başlangıç  $y_0$  ve  $y_f$ 'de aynı değere sahip olması gerekir. Bu koşulları sağlayan sadece birinci öğrencinin yaptığı yakınsamadır. İlk değer teoremini uyguladığımızda;

$$y_0^+ = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s} = 0$$

Son değer teoremini uyguladığımızda;

$$y_f = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = 0.04$$

Bu koşulların her ikisininide sağlayan tek çözüm, birinci öğrencinin çözümüdür.

- Tüm sistemlerde durgun durum kazancı ve durgun durum hatası eşittir.  $K = 0.04$  ve  $e_{ss} = 0.96$
- Grafik verilmeyip sadece fonksiyonlar verilse idi ilk değer teoremini kullanarak her bir çözümün ilk değerini bulurduk ancak grafik verildiği için direk grafikten, birinci çözüm için  $y_0^+ = 0$ , İkinci çözüm için  $y_0^+ = 0.1$ , Üçüncü çözüm için  $y_0^+ = 0.08$  olarak okunmaktadır.  $y_f$ 'ler üçü içinde aynıdır.
- Tip numarası  $N = 0$ , Sistemin derecesi 3 dür.
- Evet verebiliriz. Verilen sistemin tüm kutupları birbirinden farklı, negatif ve sadece gerçek kısımları olan kutuplardır. Dolayısıyla sistem **aşırı sönümlü**  $\xi > 1$  bir sistemdir ve birinci dereceden sistemlerin davranışına benzer bir davranış sergileyeceğini söyleyebiliriz.