MAK403 OTOMATİK KONTROL
KISA SINAV 4
14/12/2018
Dr. Nurdan Bilgin

	ADIM (Basamak) $r(t) = r_0 h(t)$	RAMPA $r(t) = r_1 t h(t)$	İVME $r(t) = r_2 t^2 h(t)$
N	**ess**	**ess**	**ess**
0	$\frac{r_0}{(1+K_{OL})}$	∞	∞
1	0	$\frac{r_1}{K_{OL}}$	∞
2	0	0	$\frac{r_2}{K_{OL}}$
≥ 3	0	0	0

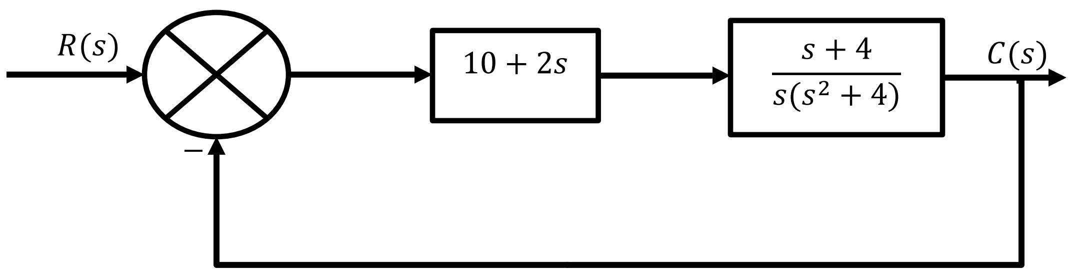
Soru 1 (100 puan): Açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G_{OL} = \frac{s+4}{s(s^2+4)}$$

şeklinde bulunan dinamik bir sistem doğası gereği kararsız bir sistemdir. Sistemi kararlı kılmak üzere oransal türevsel kontrol PD ve birim geri bildirim kullanan tasarımcı oransal kazanç katsayısını 10 türevsel kazanç katsayısınıda 2 olarak seçmiştir,

a.) Yapılan seçimin sistemi kararlı kıldığını kanıtlayınız.
b.) Birim adım giriş
c.) Birim rampa giriş için kalıcı durum hatasını belirleyiniz.

Çözüm 1:



a.) Kapalı çevrimin transfer fonksiyonu

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{(10+2s)(s+4)}{s(s^2+4)}}{1+\frac{(10+2s)(s+4)}{s(s^2+4)}} = \frac{(10+2s)(s+4)}{s^3+2s^2+22s+40}$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonda karakteristik denklemin üçüncü dereceden bir polinom olduğu görülmektedir. Polinomda içteki katsayıların çarpımı dıştaki katsayıların çarpımından büyük olduğu için pratik olarak sistemin kararlı olduğuna karar verebiliriz. Aynı sonucu Routh tablosu oluşturarakta bulabiliriz.

b.) Kontrol eklenmiş sistemde yeni açık çevrim transfer fonksiyonu

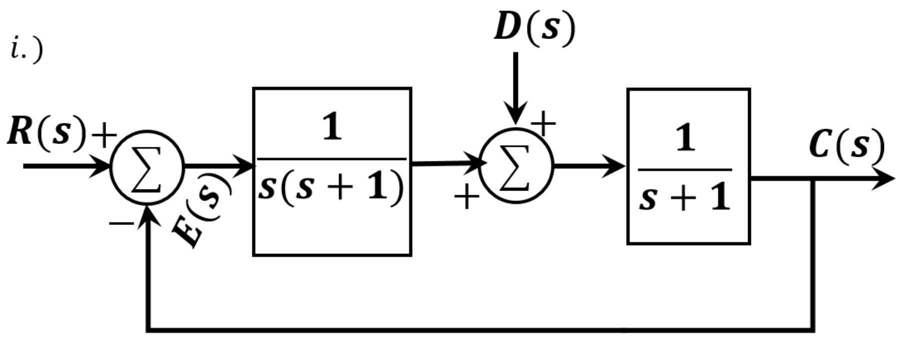
$$G_{OL} = \frac{(10+2s)(s+4)}{s(s^2+4)} = \frac{10*4*(1+0.2s)(0.25s+1)}{4s(s^2+1)}$$

Olarak bulunur. Tip numarası N=1, Açık çevrimin kazancı $K_{OL} = 10$.Tabloya göre değerlendirdiğimizde birim adım için $e_{ss} = 0$ olmaktadır.

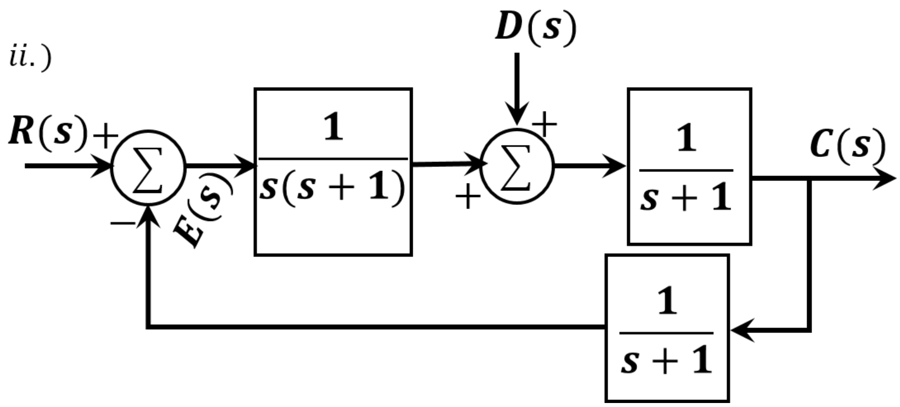
c.) Birim rampa giriş için kalıcı durum hatası $e_{ss} = \frac{1}{10} = 0.1$ olarak bulunur.

Soru 2: Aşağıda $i\ ve\ ii$ olarak numaralandırılmış sistemde birinde birim geri bildirim diğerinde ise sensör dinamiği ideal olmayan bir sistem görülmektedir.

$i.)$



$ii.)$



a.) Her iki sistem için kalıcı durum hatasını R(s)=1/s ve D(s)=1/s adım giriş vererek bulunuz **(Bonus).**

b.) Sensör dinamiğinin sistemin kalıcı durum hatasına etki edip etmediğini belirleyiniz **(Bonus).**

c.) Sensör dinamiği $\frac{1}{0.1s+1}$ olsaydı, kalıcı durum hatası hakkında ne söylerdiniz **(Bonus).**

Not: Son değer teoremi $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[sF(s)]$

Revizyon Notu: Soru sevhen yapılan bir hata barındırmaktadır. "ii" seçeneğindeki blok diyagram kararsız olduğu için kalıcı durum hatası değerlendirmesi yapılamaz. Sınıfın iki kişi hariç tamamı, soru regülatör problemi olmadığı halde soruyu regülatör problemi gibi çözmeye çalışmıştır. Dolayısıyla, yapılma oranındaki düşüklük ve sorunun barındırdığı hata nedeniyle sorunun değerlendirmesi bonus olarak yapılmıştır.

Sorunun düzgün hali, D(s) ile C(s) arasındaki transfer fonksiyonu $\frac{1}{s+2}$ alınarak aynen çözülebilir.

Bu sefer olmadı finalde çözersiniz artık ☺

Çözüm 2:

i) Birinci sistem için transfer fonksiyonunu elde edersek;

$$\left\{[R(s)-C(s)]\frac{1}{s(s+1)}+D(s)\right\}\frac{1}{s+1}=C(s)$$

$$\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}R(s)+\frac{1}{s+1}D(s)\right\}=C(s)\left\{1+\frac{1}{s(s+1)^2}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{s(s+1)^2+1}R(s)+\frac{s(s+1)}{s(s+1)^2+1}D(s)\right\}=C(s)$$

$$E(s)=R(s)-C(s)\Longrightarrow C(s)=R(s)-E(s)$$

$$\left\{\frac{1}{s(s+1)^2+1}R(s)+\frac{s(s+1)}{s(s+1)^2+1}D(s)\right\}=R(s)-E(s)$$

$$E(s)=\left(1-\frac{1}{s(s+1)^2+1}\right)R(s)-\frac{s(s+1)}{s(s+1)^2+1}D(s)$$

$$E(s) = \left(\frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2+1}\right)R(s) - \frac{s(s+1)}{s(s+1)^2+1}D(s)$$

Son değer teoremini uygularsak;

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = s\left\{\left(\frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2+1}\right)R(s) - \frac{s(s+1)}{s(s+1)^2+1}D(s)\right\}$$

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = s\left\{\left(\frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2+1}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{s(s+1)}{s(s+1)^2+1}\right)\frac{1}{s}\right\}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{\left(\frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2+1}\right) - \left(\frac{s(s+1)}{s(s+1)^2+1}\right)\right\} = 0$$

ii) İkinci sistem için transfer fonksiyonunu elde edersek;

$$\left\{\left[R(s) - \frac{1}{s+1}C(s)\right]\frac{1}{s(s+1)} + D(s)\right\}\frac{1}{s+1} = C(s)$$

$$\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}R(s) + \frac{1}{s+1}D(s)\right\} = C(s)\left\{1 + \frac{1}{s(s+1)^3}\right\}$$

$$\left\{\frac{s+1}{s(s+1)^3+1}R(s) + \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}D(s)\right\} = C(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s) \Longrightarrow C(s) = R(s) - E(s)$$

$$\left\{\frac{s+1}{s(s+1)^3+1}R(s) + \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}D(s)\right\} = R(s) - E(s)$$

$$E(s) = \left(1 - \frac{s+1}{s(s+1)^3+1}\right)R(s) - \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}D(s)$$

$$E(s) = \left(\frac{s((s+1)^3-1)}{s(s+1)^3+1}\right)R(s) - \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}D(s)$$

$$E(s) = \left(\frac{s(s^3+3s^2+3s+1-1)}{s(s+1)^3+1}\right)R(s) - \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}D(s)$$

$$E(s) = \left(\frac{s^2(s^2+3s+3)}{s(s+1)^3+1}\right)R(s) - \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}D(s)$$

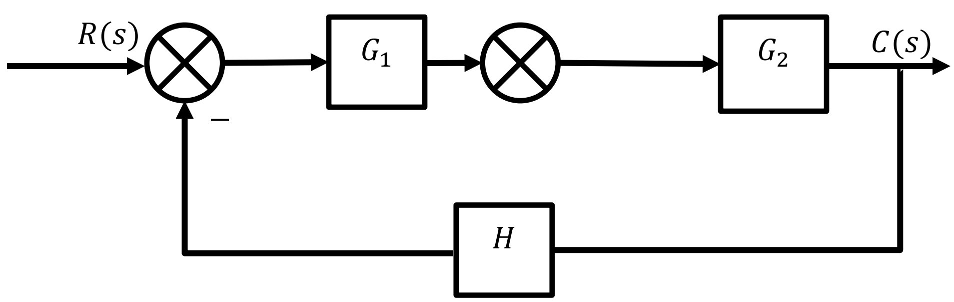
Son değer teoremini uygularsak;

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = s\left\{\left(\frac{s^2(s^2+3s+3)}{s(s+1)^3+1}\right)R(s) - \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}D(s)\right\}$$

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = s\left\{\left(\frac{s^2(s^2+3s+3)}{s(s+1)^3+1}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}\right)\frac{1}{s}\right\}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{\left(\frac{s^2(s^2+3s+3)}{s(s+1)^3+1}\right) - \left(\frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^3+1}\right)\right\} = 0$$

b.)



a şıkkında verilen bir ideal sensör bir de dinamiği tip 1 ve kazancı 1 olan sensör için kalıcı durum hatası $e_{ss} = 0$ bulunmuştur. Bu durumun tesadüfi bir durum mu olduğunu yoksa sensör dinamiğinin sistemin kalıcı durum hatasına etki edip etmediğini belirlemek üzere genel bir çözüm ortaya koymamız gerekir. Şöyle ki

$$\{[R(s) - H(s)C(s)]G_1 + D(s)\}G_2 = C(s)$$
$$G_1G_2R(s) + G_2D(s) = C(s)\big(1 + G_1(s)G_2(s)H(s)\big)$$
$$\frac{G_1G_2}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s) = C(s)$$
$$E(s) = R(s) - C(s) \Longrightarrow C(s) = R(s) - E(s)$$
$$E(s) = \left(1 - \frac{G_1G_2}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\right)R(s) - \frac{G_2}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

R(s)=1/s ve D(s)=1/s için

$$\lim_{s\to 0}\frac{G_1G_2}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = 1$$
$$\lim_{s\to 0}\frac{G_1G_2(1)}{G_1G_2\left(\frac{1}{G_1G_2} + H\right)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{s(s+a_0)}\frac{1}{(s+b_0)}} + \frac{1}{(c_1s + c_0)}} = \frac{1}{0 + \frac{1}{c_0}}$$

Sistem kararlı; G_1, tip 1 bir sistem, G_2 tip 0 sistem ve H kazancı yani $c_0 = 1$ olan tip 0 bir sistem olduğu sürece referans girişin kalıcı durum hatasına etkisi sıfır olur. Yukarıda gösterilen limit değerinin 1 olması ve 1'den çıkarıldığında sıfır değerini vermesi için tek koşul c_0'ın 1 olmasıdır.

Diğer taraftan;

$$\lim_{s\to 0}\left(-\frac{G_2}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\right) = 0$$
$$\lim_{s\to 0}\left(-\frac{\frac{1}{s+b_0}}{1 + \frac{1}{s(s+a_0)}\frac{1}{(s+b_0)}\frac{1}{(c_1s + c_0)}}\right) = -\frac{\frac{1}{b_0}}{1+\infty} = 0$$

G_1, tip 1 bir sistem, G_2 ve H tip 0 sistemler olduğu sürece bozucu girişin kalıcı durum hatasına etkisi sıfırdır. Dolayısıyla verilen örnekte olduğu gibi sensör dinamiğinin kazancı 1 ise sensörün kalıcı durum hatasına etkisi yoktur. Başka bir sonlu değer aldığında sensörün kalıcı durum hatası üzerindeki etkisi görülecektir.

c.) Sensör dinamiği $\frac{1}{0.1s+1}$ olsaydı, kalıcı durum hatası yine sıfır olurdu çünkü sensör dinamiği b şıkkında yaptığımız çıkarımla aynı biçimdedir yani kazancı 1'dir.