FORMÜL KAĞIDI

$x = x(a, b)$ şeklinde bir fonksiyon olduğu durumda bu fonksiyondaki belirsizlik aşağıdaki şekilde genelleştirilebilecek bir ifade ile bulunabilmektedir.

$$\frac{\delta x}{x} = \underbrace{\frac{a}{x}\frac{\partial x}{\partial a}}_{S_a^x}\frac{\delta a}{a} + \underbrace{\frac{b}{x}\frac{\partial x}{\partial b}}_{S_b^x}\frac{\delta b}{b}$$

	ADIM $\boldsymbol{r(t) = r_0 h(t)}$	**RAMPA** $\boldsymbol{r(t) = r_1 t h(t)}$	**İVME** $\boldsymbol{r(t) = r_2 t^2 h(t)}$
N	**ess**	**ess**	**ess**
0	$\frac{r_0}{(1 + K_{OL})}$	∞	∞
1	0	$\frac{r_1}{K_{OL}}$	∞
2	0	0	$\frac{r_2}{K_{OL}}$
≥ 3	0	0	0

Son değer teoremi;

$$lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

İlk değer teoremi;

$$lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \text{ yada } G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{y(t)}{y_f} = 1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi);$$

$$\xi = cos\beta \;\; ve \;\; \sqrt{1 - \xi^2} = sin\beta;$$

$$a_0 = \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta\xi + 1}}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right); \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$t_p = \frac{\phi + \beta + \frac{\pi}{2}}{\omega_d} \quad \eta \neq 0$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \eta = 0$$

$$\varepsilon_p = a_0 \sin(\beta) \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\left(\phi + \beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \eta \neq 0$$

$$\varepsilon_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \quad \eta = 0$$

$$t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} ln\left(\frac{a_0}{\varepsilon_s}\right) \quad \eta \neq 0$$

$$t_s \cong \begin{cases} \frac{4}{\xi\omega_n} & \varepsilon_s = 0.02 \; için \\ \frac{3}{\xi\omega_n} & \varepsilon_s = 0.05 \; için \end{cases} \quad \eta = 0$$

$$t_r = \frac{\phi + \frac{\pi}{2}}{\omega_d} \quad \eta \neq 0$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad \eta = 0$$

Gecikme zamanı,

t_d $\frac{y(t)}{y_f} = 0.5$ ilişkisinden bulunabilir.

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \left|\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}\right| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|} \Rightarrow M(\omega) = \frac{\sqrt{N_r^2(\omega) + N_i^2(\omega)}}{\sqrt{D_r^2(\omega) + D_i^2(\omega)}}$$

$$\phi(\omega) = atan2\left[\frac{N_i(\omega)}{N_r(\omega)}\right] - atan2\left[\frac{D_i(\omega)}{D_r(\omega)}\right]$$

Düşük ve yüksek frekans asimptotları köşe frekansında kesişirler. $\omega_c = \omega_n = 1/T$;

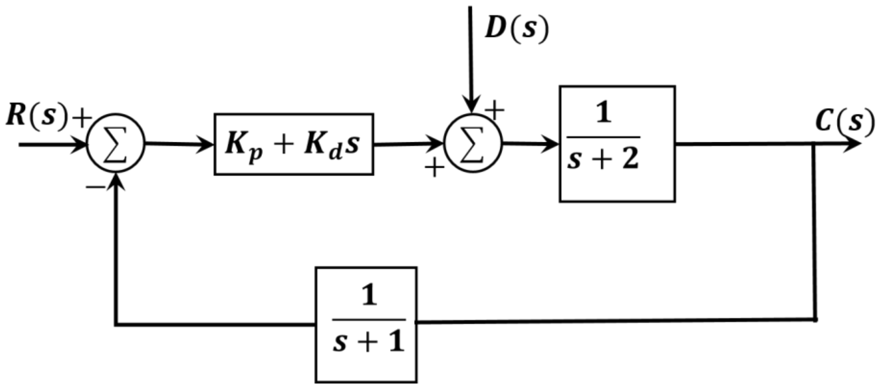
$Y_f\,(t) = A_y sin(\omega t + \alpha + \phi)$ Frekans Cevap[Durgun Durum Çözümü]

Köşe frekansında $M(\omega_c) = 1/2\xi \Rightarrow \bar{M}(\omega_c) = 20\,log(1/2\xi)$

ϕ İçin Doğrusal Yakınsama

$\omega < 10^{-\xi}\omega_n$ için $\phi \cong 0$; $\phi, 10^{-\xi}\,\omega_n < \omega < 10^{\xi}\omega_n$ frekans aralığında eğimi $-90\,/\xi°\,/onluk$ olmak üzere $(\omega_n, -90°)$'den geçen yaklaşık doğrusal bir çizgidir. $\omega > 10^{\xi}\omega_n$ *için* $\phi \cong -180°$dir.

Soru 1:



Geri bildirim kontrol stratejisi olarak, oransal-türevsel kontrol kullanılan yukarıdaki sistemde C(s) çıkışı ile D(s) bozucu girişi arasındaki transfer fonksiyonu

$$M_D(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s+1}{s^2 + (3 + K_d)s + (2 + K_p)}$$

şeklinde bulunmuştur. Durgun durumda bozucu giriş ile çıkış arasındaki transfer fonksiyonunun K_d'ye bağlı hassasiyetini $\left(S_{K_d}^{M_D}\right)$ bulunuz.

Çözüm:

$$S_{K_d}^{M_D} = \frac{K_d}{M_D}\frac{\partial M_D}{\partial K_d} = \frac{K_d}{\frac{s+1}{s^2 + (3 + K_d)s + (2 + K_p)}} \frac{-s(s+1)}{\left(s^2 + (3 + K_d)s + (2 + K_p)\right)^2}$$

$$S_{K_d}^{M_D} = \frac{-K_d s}{s^2 + (3 + K_d)s + (2 + K_p)} \Longrightarrow \left(S_{K_d}^{M_D}\right)_{ss} = \underset{s \to 0}{S_{K_d}^{M_D}} = 0$$

Soru 2: Aşağıda verilen transfer fonksiyonunda Routh tablosu kullanarak marjinal kararlılığa neden olan kökleri bulunuz.

$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s}{s^3 + 3s^2 + 8s + 24}$$

s^3	1	8	0
s^2	3	24	
s^1	0 6	0	
s^0	24		

Yardımcı polinom: $3s^2 + 24 = 0$ Türevini alırsak; $6s$. Türev ile yeni değer ekledikten sonra tabloda işaret değişikliği olmadı o halde sistem marjinal kararlıdır. Marjinal kararlılığı neden olan kökler yardımcı polinomun çözümü ile bulunur. $s_{1,2} = \sqrt{-8} = \pm 2\sqrt{2}i$

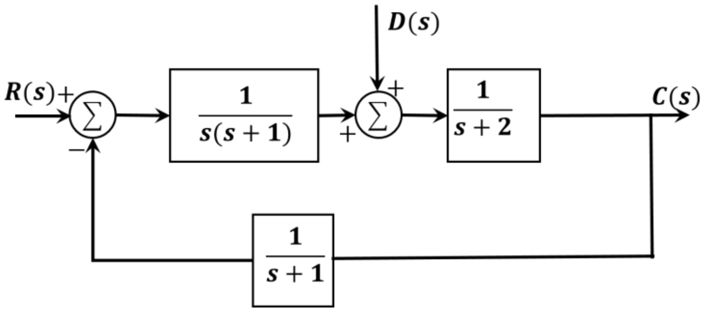
Soru 3: Aşağıda verilen, açık çevrim transfer fonksiyonları birim geri bildirimle kontrol edilmektedir. Sistemlerin kararlılık durumunu, tip numaralarını, açık çevrim kazançlarını ve birim adım, rampa ve ivme giriş verilmesi durumunda kalıcı durum hatalarını belirleyiniz.

Açık Çevrim Transfer Fonk.	Kararlılık Durumu	Tip Numarası	Açık Çevrim Kazancı	Kalıcı Durum Hatası		
				Adım Giriş	Rampa Giriş	İvme Giriş
$\frac{3(s+2)}{s^2+4s+24}$	Kararlı	0	1/4	1/(1+1/4)=0.8	∞	∞
$\frac{s+1}{s^3+4s}$	Kararlı değil	-	-	-	-	-

$D(s) = Num(1+G_{OL}) = Num\left(1+\frac{3(s+2)}{s^2+4s+24}\right) = s^2+7s+30$ 2. Derece hurwitzi geçiyor kararlı

$D(s) = Num(1+G_{OL}) = Num\left(1+\frac{s+1}{s^3+4s}\right) = s^3+5s+1$ Kayıp s^2 terimi hurwitzi geçemiyor kararlı değil

Soru 4: Yanda blok diyagramı verilen sistemde hem referans giriş hem de bozucu giriş birim adım giriş formundadır, sistemin kalıcı durum hatasını belirleyiniz. Sensör dinamiği $\frac{1}{0.1s+2}$ olsaydı, kalıcı durum hatası hakkında ne söylerdiniz.



İkinci sistem için transfer fonksiyonunu elde edersek;

$$\left\{\left[R(s) - \frac{1}{s+1}C(s)\right]\frac{1}{s(s+1)} + D(s)\right\}\frac{1}{s+2} = C(s)$$

$$\left\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}R(s) + \frac{1}{s+1}D(s)\right\} = C(s)\left\{1+\frac{1}{s(s+2)(s+1)^2}\right\}$$

$$\left\{\frac{(s+1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}R(s) + \frac{s(s+2)(s+1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}D(s)\right\} = C(s)$$

Sistem kararlı değilse durgun durum hatasından söz edilemez o halde önce sistemin kararlı olup olmadığı incelemesi yapmalıyız. Karakteristik denklem Hurwitz'i geçiyor. Routh tablosu ile kararlılığı garanti edelim.

s^4	1	5	1
s^3	4	2	
s^2	18/4	1	
s^1	20/18		
s^0	1		

Hata tanımı gereği

$$E(s) = R(s) - C(s) \Longrightarrow C(s) = R(s) - E(s)$$

$$\left\{\frac{(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\,R(s) + \frac{s(s+2)(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\,D(s)\right\} = R(s) - E(s)$$

$$E(s) = \left(1-\frac{(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\right)R(s) - \frac{s(s+2)(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\,D(s)$$

Son değer teoremini uygularsak;

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = s\left\{\left(1-\frac{(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\right)R(s) - \frac{s(s+2)(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\,D(s)\right\}$$

$$R(s) = \frac{1}{s}\, ve\ \ D(s) = \frac{1}{s}\ birim\ adım\ giriş\ olarak\ verilmiş.$$

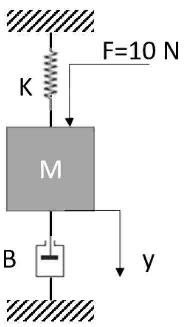
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = s\left\{\left(1-\frac{(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\right)\frac{1}{s} - \frac{s(s+2)(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\frac{1}{s}\right\}$$

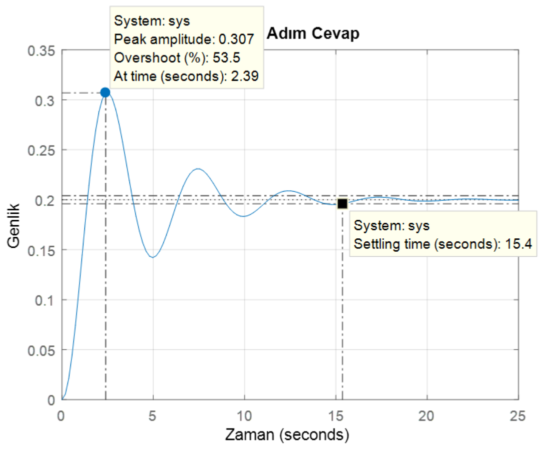
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \left\{\left(1-\frac{(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\right) - \frac{s(s+2)(s\ +\ 1)}{s^4+4s^3+5s^2+2s+1}\right\}$$

$$e_{ss} = (1-1) - 0 = 0$$

Sensör dinamiği $\frac{1}{0.1s+2}$ olsaydı 1-1=0 durumu ortaya çıkmayacak bunun yerine (1-1/2)=0.5 oranında bir hata olacaktır.

Soru 5: Şekilde görünen, kütle, yay, damper sistemi 10 N'luk kuvvetin etkisi altında salınmaktadır. Sistemin adım giriş cevabı yandaki grafikte verildiğine göre, kütle, yay ve damper büyüklüklerini belirleyiniz.





$$M\ddot{y} = F - B\dot{y} - Ky$$

$$(Ms^2 + Bs + K)Y(s) = F(s)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2+Bs+K} = \frac{1/M}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{K}{M}}$$

$$Y_{ss} = 0.2 = \lim_{s\to 0} sY(s) = sF(s)\frac{1}{Ms^2+Bs+K} = \lim_{s\to 0} s\frac{10}{s}\frac{1}{Ms^2+Bs+K}$$

$$0.2 = \frac{10}{K} \Longrightarrow K = 50$$

$$\varepsilon_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow ln\varepsilon_p = -\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = -\frac{\pi}{ln\varepsilon_p} \Rightarrow \frac{sin\beta}{cos\beta} = -\frac{\pi}{ln\varepsilon_p}$$

$$tan\beta = -\frac{\pi}{ln0.535} = 5.022 \Rightarrow \beta = \tan^{-1} 5.022 = 78.7397^0$$

$$\xi = cos\beta = 0.1953$$

$$\frac{4}{\xi\omega_n} = 15.4 \Rightarrow \xi\omega_n = \frac{4}{15.4} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{15.4 * 0.1953} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{K}{M} = \omega_n^2 \Rightarrow M = \frac{K}{\omega_n^2} = 28.25\ kg$$

$$2\xi\omega_n = \frac{B}{M} \Rightarrow B = 14.675$$

Soru 6:

Aşağıda transfer fonksiyonu verilen sistemin

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+6s+36}$$

a.) $x(t) = (5sin6t)h(t)$ girişi için sistemin durgun durum cevabını belirleyiniz.
Verilen girişe göre; genlik $A_x = 5\ ve\ \omega = 6$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega+3}{(j\omega)^2+6j\omega+36} = \frac{j\omega+3}{6j\omega+36-\omega^2} \Rightarrow M(\omega) = \frac{\sqrt{3^2+\omega^2}}{\sqrt{(36-\omega^2)^2+(6\omega)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{6}$$

$$M(\omega) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{3\sqrt{5}}{6} \Rightarrow A_y = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi(\omega) = atan2\left[\frac{N_i(\omega)}{N_r(\omega)}\right] - atan2\left[\frac{D_i(\omega)}{D_r(\omega)}\right]$$

$$\phi(\omega) = 1.1071 - 1.5708 = 63.43 - 90 = -26.07$$

$Y_f\ (t) = \frac{5\sqrt{5}}{2} sin(6t - 26.07)$ *Frekans Cevap[Durgun Durum Çözümü]*

b.) Verilen transfer fonksiyonunu temel faktörler cinsinden ifade ediniz ve köşe frekanslarını bulunuz.

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+6s+36} = \frac{3\left(\frac{1}{3}s+1\right)}{36(\frac{1}{36}s^2+\frac{1}{6}s+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}s+1\right)\frac{1}{\frac{1}{36}s^2+\frac{1}{6}s+1}$$

$$G_1 = \frac{1}{12}$$

$$G_2 = \frac{1}{3}s + 1 \Rightarrow \omega_{c2} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3\ rad/s$$

$$G_3 = \frac{1}{\frac{1}{36}s^2 + \frac{1}{6}s + 1} \Rightarrow T^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow T = \frac{1}{6} \Rightarrow \omega_{c3} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6\frac{rad}{s}$$

c.) Aşağıda verilen 2 farklı Bode diyagramından hangisi verilen sistemin diyagramıdır. Seçiminizi gerekçelendiriniz.

$$G_1' den\ \bar{M}(\omega) = 20\log\left(\frac{1}{12}\right) = -21.58$$

Olarak bulunur buradan grafiğin kesik çizgi ile çizilen grafik olacağını ön görebiliriz. Ancak daha detaylı bakmak gerekir.

$G_2\ ve\ G_3'$ün köşe frekanslarını sırasıyla 3 ve 6 olarak bulmuştuk bunu arayacak olursak, yine kesik çizgi ile çizilmiş grafikte 3 rad/s'de yukarı doğru eğim başlamış 6 rad/s'de ise eğimin yönü değişmiştir. Bu beklenen bir durumdur. Yukarıdaki birinci dereceden sistemin yukarı yönlü 20 dB'li eğimi ile aşağıdaki ikinci derece sistemin 40 dB'lik eğimlerinin toplamı aşağı yönlü 20dB'lik bir eğim oluşturmaktadır.

Cevabımızdan emin olmak için faz diyagramına da bakalım. G_3 ikinci dereceden bir sistem dolayısıyla $10^{-\xi}\ \omega_n < \omega < 10^{\xi}\omega_n$ frekans aralığında eğimi $-90\ /\xi°\ /onluk$ olmalı bu aralığı bulalım. Bu kritere ve b şıkkında bulunan köşe frekanslarına göre sistemin Bode diyagramının hangisi olduğuna karar verebiliriz.

$$G_3' de\ ortadaki\ terim\ 2\xi T = \frac{1}{6} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}$$

$$10^{-\xi}\ \omega_n < \omega < 10^{\xi}\omega_n \Rightarrow 10^{-\frac{1}{2}} * 6 = 1.89 < \omega < 10^{\frac{1}{2}} * 6 = 3$$

$$1.89 < \omega < 6 = 3$$

Dolayısıyla cevap kesik çizgi ile gösterilen diyagramdır.