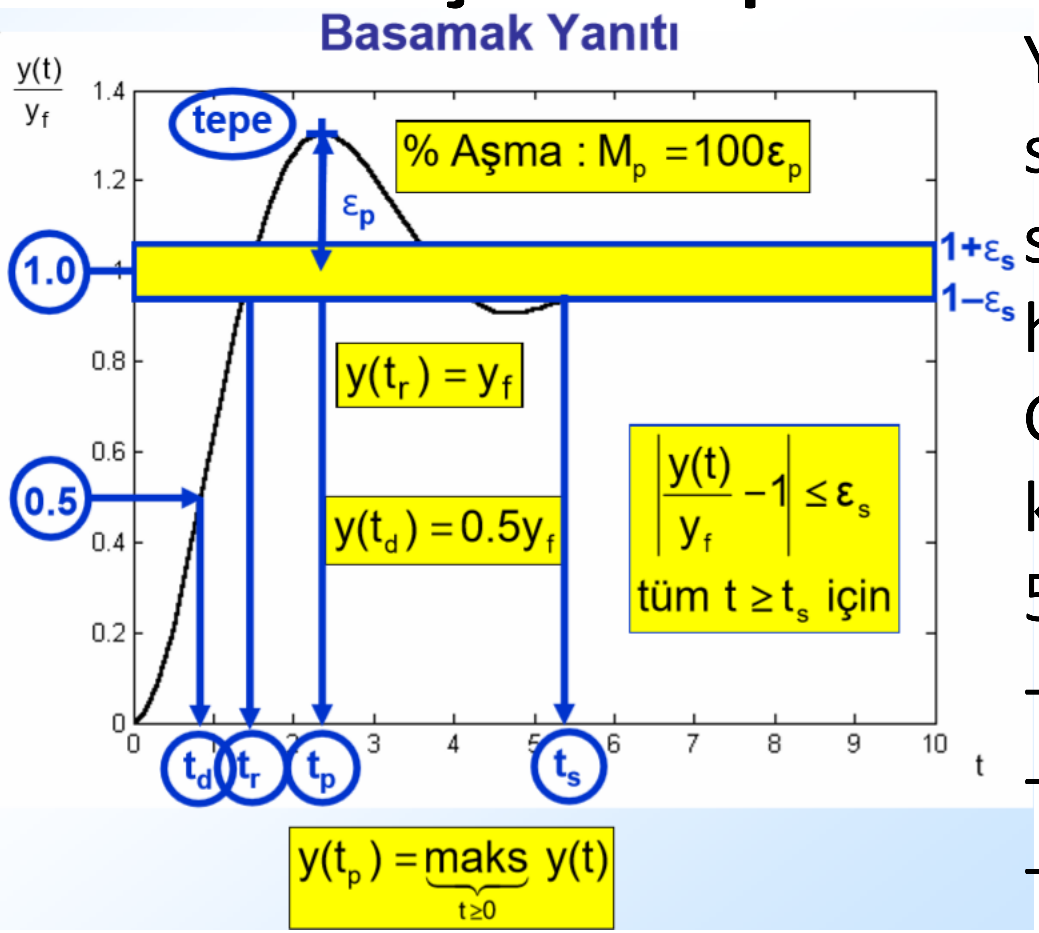
Otomatik Kontrol

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Hazırlayan: Dr. Nurdan Bilgin

Sistemlerin Geçici Cevapları ile İlgili Tanımlar



Yerleşme zamanından önceki dinamik davranışa sistemlerin geçici cevabı adı verilir. Geçici cevap sistem dinamiğinin diferansiyel denklemin homojen çözümüyle ilgilidir.

Geçici cevap adım giriş ile incelenir. Başlangıç koşulları 0 dır. Sistemin geçici davranış özellikleri 5 parametre aracılığıyla tanımlanır.

-Gecikme zamanı, t_d

-Yükselme zamanı, t_r

-Aşma zamanı, t_p

-Yerleşme zamanı, t_s

-En fazla aşma, M_p

Bu beş parametre ile

i.) Cevabın Hızı; Sistem durgun duruma ne kadar sürede ulaşıyor;

ii.) Göreceli Kararlılık; Sistem yanıtının ne kadar salınımlı ve/veya ne kadar aşmalı olduğu konularında karar verilir.

Gecikme zamanı, td

$$\frac{y(t)}{y_f} = 0.5$$

ilişkisinden bulunacak en küçük t zamanıdır.

Yükselme zamanı, tr

$$\frac{y(t)}{y_f} = 1$$

ilişkisinden bulunacak en küçük t zamanıdır.

tr ayrıca 0 dan %100' e yükselme zamanı olarak da adlandırılır.

Aşma zamanı, tp ; y(t)'nin maksimum değeri aldığı zamandır. y(t)'nin maksimum değerine y_p denir.

$$y_p = \max_{t \geq 0} y(t)$$

Yerleşme zamanı, ts

Verilen tolerans bantı ε_s'in içerisine çıkmamak üzere girme zamanına yerleşme zamanı adı verilir. Bu bant genişliği genellikle %2-5 arasında verilmektedir. t_s şu şekilde bulunur.

$$\left|\frac{y(t)}{y_f} - 1\right| \leq \varepsilon_s$$

En fazla aşma, Mp

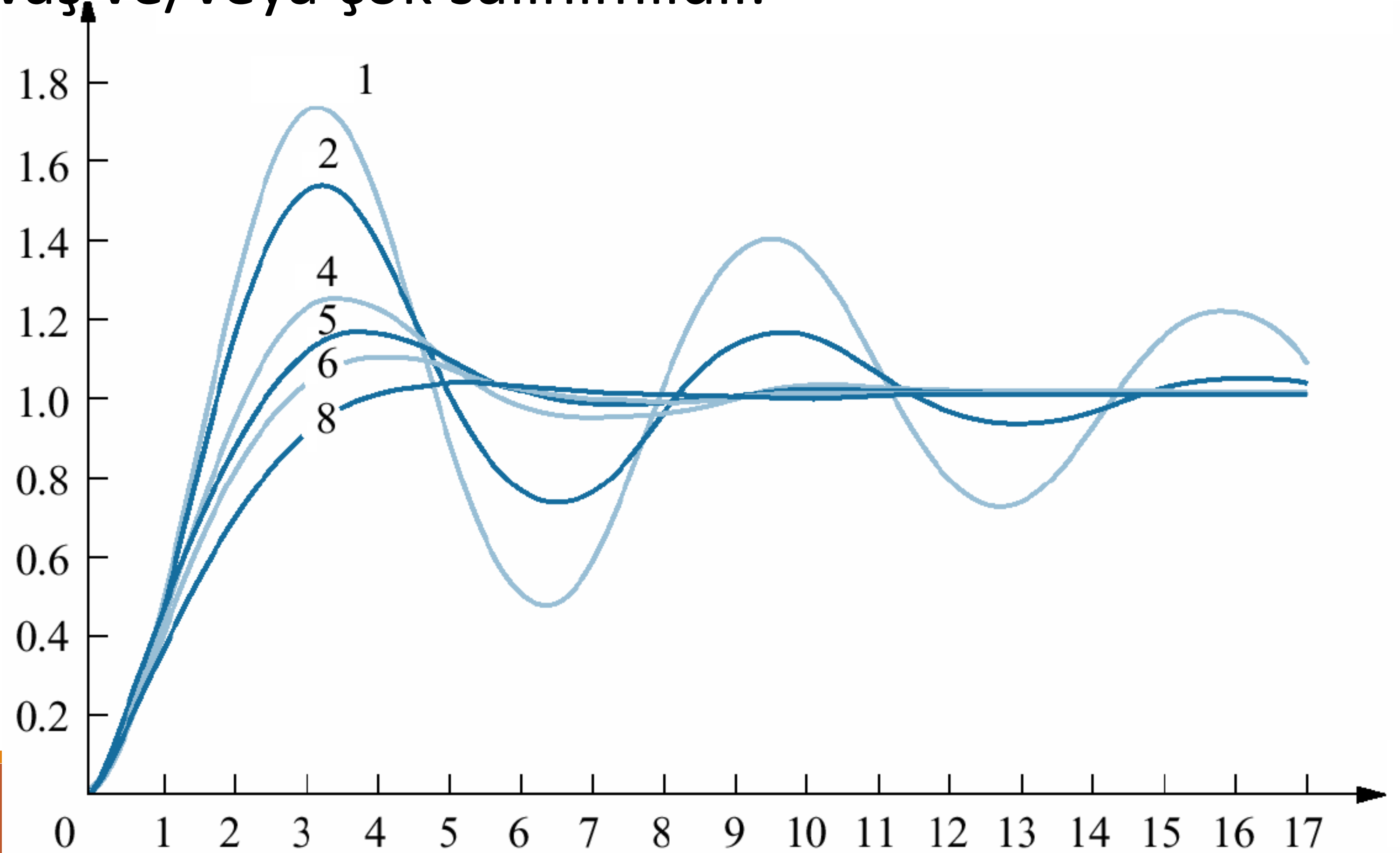
$$\frac{y_p}{y_f} - 1 = \varepsilon_p$$

$$M_p = 100\varepsilon_p$$

-Gecikme zamanı, td; -Yükselme zamanı, tr ve -Aşma zamanı, tp; sistemin hızıyla ilgilidir. Bu zamanlar küçük olduğunda sistem hızlı demektir.

-En fazla aşma, Mp; göreli kararlılıkla ilgilidir. Küçük Mp daha sönümlü bir hareket demektir. Sistem az salınımlı ve aşırı aşmalar yoktur.

-Yerleşme zamanı, ts ; Hem sistemin hızıyla hem de kararlılığıyla ilgilidir. Eğer ts büyükse sistem yavaş ve/veya çok salınımlıdır.



Az Sönümlü İkinci Derece Sistemin Geçici Cevapları ile İlgili Tanımlar

Sistemin TF'u

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \; ya\ da\ G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Şeklinde ifade edilebilir.

$$\frac{y(t)}{y_f} = 1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$$

$$a_0 = \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta\xi + 1}}{\sqrt{1-\xi^2}}; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{1-\xi^2}}\right);$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = Sönümlü\ doğal\ frekans$$

Aşma Zamanı (t_p)

$$t_p = \frac{\phi + \beta + \frac{\pi}{2}}{\omega_d} \quad \eta \neq 0$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \eta = 0$$

İspat: $\frac{\dot{y}(t)}{y_f} = 0$

$$\xi\omega_n a_0 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi) + \omega_d a_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \phi) = 0$$

$$\omega_n a_0 e^{-\xi\omega_n t}\left[\xi\cos(\omega_d t - \phi) + \sqrt{1-\xi^2}\sin(\omega_d t - \phi)\right] = 0$$

$$\omega_n a_0 e^{-\xi\omega_n t} \neq 0$$

$$\left[\xi\cos(\omega_d t - \phi) + \sqrt{1-\xi^2}\sin(\omega_d t - \phi)\right] = 0$$

Aşma Zamanı (t_p)

İspat devam:

$$\left[\xi\cos(\omega_d t-\phi)+\sqrt{1-\xi^2}\sin(\omega_d t-\phi)\right]=0$$

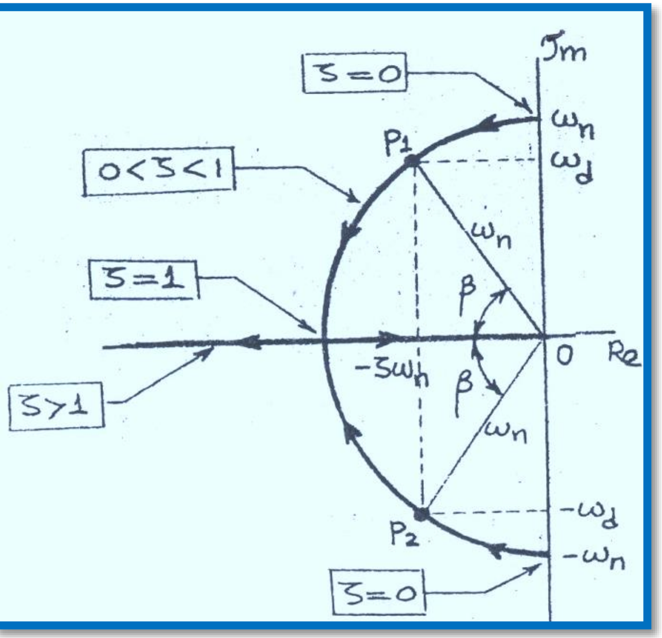
Sönüm açısı β'yı tanımlarken; $\xi = cos\beta$ ve $\sqrt{1-\xi^2}=\sin\beta$ olduğunu göstermiştik;

$$[cos\beta\cos(\omega_d t-\phi)+\sin\beta\sin(\omega_d t-\phi)]=0$$

$$\cos(\omega_d t-\phi-\beta)=0$$

$$\omega_d t-\phi-\beta=\mathrm{n}\frac{\pi}{2}\quad \mathrm{n}=\pm 1,\pm 2\ldots$$

$$t_p=\frac{\frac{\pi}{2}+\phi+\beta}{\omega_d}\quad \eta\neq 0$$



Eğer $\eta=0$ ise, $\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=\frac{\pi}{2}-\beta \therefore t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$

En Fazla Aşma (ε_p)

$$\varepsilon_p = \frac{y_p}{y_f} - 1$$

$$\varepsilon_p = a_0 \sin(\beta) \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\phi + \beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad \eta \neq 0$$

$$\varepsilon_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \qquad \eta = 0$$

Yükselme Zamanı (t_r)

$$\frac{y(t)}{y_f} = 1$$

ilişkisinden bulunacak en küçük t zamanıdır.

t_r ayrıca 0 dan %100’ e yükselme zamanı olarak da adlandırılır.

$$t_r = \frac{\phi + \frac{\pi}{2}}{\omega_d} \quad \eta \neq 0$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad \eta = 0$$

Gecikme zamanı, t_d $\frac{y(t)}{y_f} = 0.5$ ilişkisinden bulunabilir.

Yerleşme Zamanı (t_s)

$$t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} ln\left(\frac{a_0}{\varepsilon_s}\right) \qquad \eta \neq 0$$

$$t_s \cong \begin{cases} \dfrac{4}{\xi\omega_n} & \varepsilon_s = 0.02\ için \\ \dfrac{3}{\xi\omega_n} & \varepsilon_s = 0.05\ için \end{cases} \qquad \eta = 0$$

İspat:

$$1 + a_0 e^{-\xi\omega_n t} = 1 + \varepsilon_s$$

$$e^{\xi\omega_n t} = \frac{a_0}{\varepsilon_s} \Rightarrow t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} ln\left(\frac{a_0}{\varepsilon_s}\right) \eta \neq 0$$

Yerleşme Zamanı (t_s)

İspat Devam:

$$E\breve{g}er\ \eta = 0 \Longrightarrow\ a_0 = \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta\xi + 1}}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} ln\left(\frac{1}{\varepsilon_s\sqrt{1-\xi^2}}\right)\eta = 0$$

Ancak, yukarıda bulduğumuz ifadeyi yaklaşık ama çok daha basit bir ifadeye dönüştürebiliriz.

$$t_s = \frac{1}{\xi\omega_n}\left[ln\left(\frac{1}{\varepsilon_s}\right) - \frac{1}{2}ln(1-\xi^2)\right]$$

$$ln\left(\frac{1}{\varepsilon_s}\right) = \begin{matrix} 3.91 \cong 4 & \varepsilon_s = 0.02\ i\c{c}in \\ 2.99 \cong 3 & \varepsilon_s = 0.05\ i\c{c}in \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2}ln(1-\xi^2) \approx 0\ 0 \le \xi < 0.9$$

Örnekler

Örnek 1:

$$G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ikinci dereceden az sönümlü sistem için $\eta = 0$ ve $\varepsilon_p \leq 0.1; t_p \leq 1\ s$

$ve\ \%2\ yer.kriteri\ ile\ t_s \leq 1.5\ s$ olsun istenmektedir. Bu şartları sağlayacak kutupların bulunacağı bölgeyi çizerek gösteriniz.

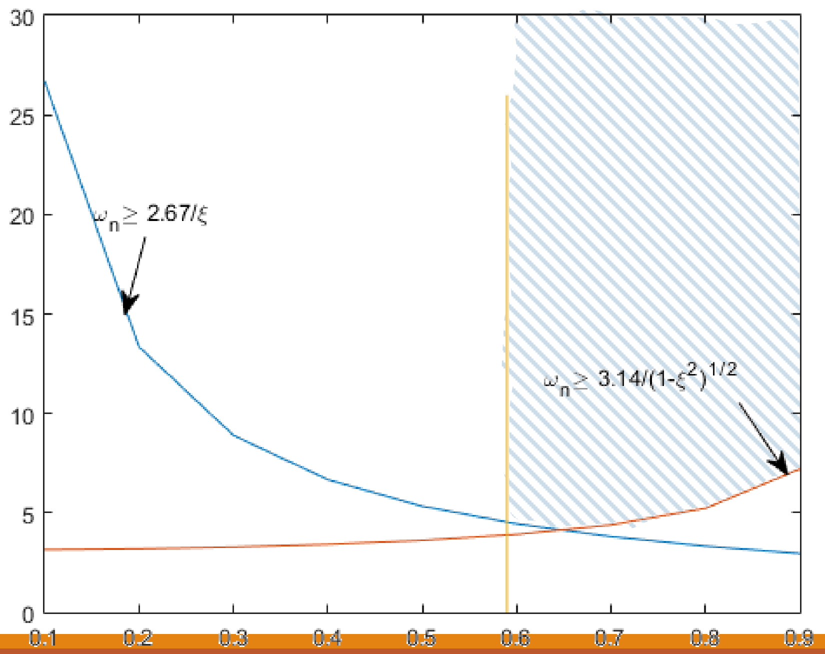
Çözüm 1:

$$\varepsilon_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \leq 0.1 \Longrightarrow \frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \geq \boldsymbol{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0.1}}\right) \Longrightarrow$$

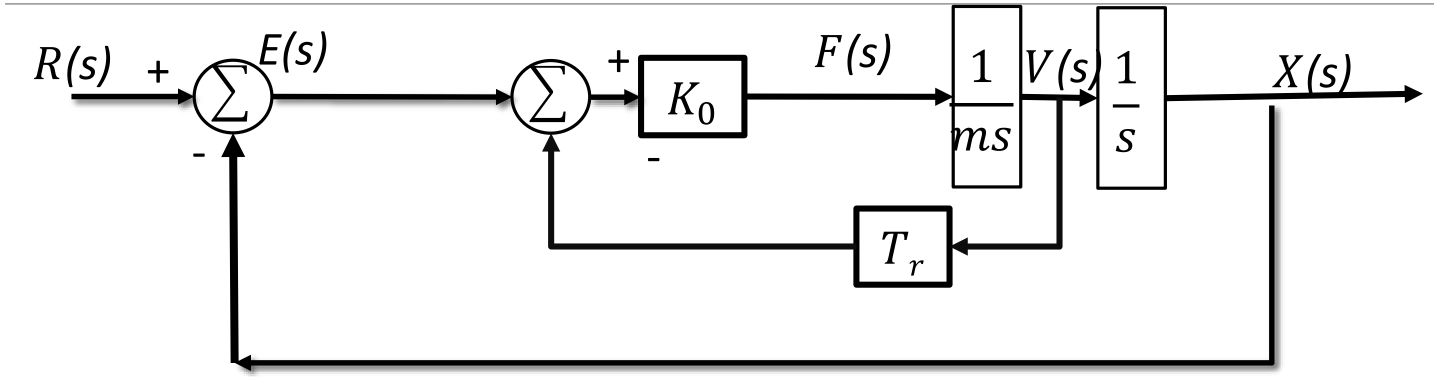
$$\boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{53.76}° \Longrightarrow \xi \geq 0.59$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \leq \mathbf{1} \Longrightarrow \omega_n \geq \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq \mathbf{1.5} \Longrightarrow \omega_n \geq \frac{2.67}{\xi}$$



Örnekler



Kütle pozisyonlama için kullanılan yukarıdaki servo sistemde kontrolcü olarak P kontrol ve hızın geri beslemesi kullanılmaktadır. $M_p = \%10$ ve $T_p = 1\ s$ olması için K_0 ve T_r parametrelerini bulunuz.

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K_0}{s^2 + K_0 \mathrm{T}_r s + K_0}$$

$$\varepsilon_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 0.1 \Rightarrow \frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \geq \boldsymbol{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0.1}}\right) \Rightarrow \xi \geq 0.59$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \mathbf{1} \Rightarrow \omega_n = 3.89\, rad/s$$

$$K_0 = \omega_n^2 = 15.13 \mathrm{N/m}\ \mathrm{T}_r = \frac{2\xi}{\omega_n} = 0.303\ \mathrm{s}$$