Otomatik Kontrol

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Hazırlayan: Dr. Nurdan Bilgin

Kapalı Çevrim Kontrol

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

Tüm uygulamalar için aşağıdaki genel gereklilikler karşılanmaksızın bir kontrol sisteminin genel performansı tatmin edici olmaz:

- ✓ **Kararlılık**
- ✓ **Sistemlerin Kalıcı Durum Davranışı**
- ✓ **Sistemlerin Geçici Durum Davranışı**
  - ✓ **Birinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı**
  - ✓ **İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı**
  - ✓ **Geçici Durum Davranışı Parametreleri**

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri
İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

gibi doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi ele alalım. Bu sistemin adım girişe cevabıyla ilgileniyoruz;

$$\boxed{Y(s) = G(s)X(s)}$$

Adım, $x(t) = x_o h(t)$;

$$X(s) = \frac{x_o}{s}$$

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_0\left(\frac{b_1}{b_0}s + 1\right)}{a_0\left(\frac{a_2}{a_0}s^2 + \frac{a_1}{a_0}s + 1\right)} = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

$$G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$K = \dfrac{b_0}{a_0}; Durgun\ Durum\ Kazancı; T = \sqrt{\dfrac{a_2}{a_0}}$, sistemin karakteristik zamanı;

$T_0 = \dfrac{b_1}{b_0}$, paydanın karakteristik zamanı; $2\xi T = \dfrac{a_1}{a_0} \Longrightarrow \xi = \dfrac{a_1/a_0}{2T} = \dfrac{a_1/a_0}{2\omega_n}$

Çünkü $\omega_n = \frac{1}{T} = sönümlenmemiş\ doğal\ frekans$;

ξ=sönümleme oranı; $\eta = \frac{T_0}{T} = \omega_n T_0$; Karakteristik zaman oranı

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

$$G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\sigma = \xi\omega_n = sönümlenme\ hızı;\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = Sönümlü\ doğal\ frekans$

ξ'ye göre sınıflandırma

$\xi = 0 \Longrightarrow$ Sönümsüz Sistem

$0 < \xi < 1 \Longrightarrow$ Az Sönümlü Sistem

$\xi = 1 \Longrightarrow$ Kritik Sönümlü Sistem

$\xi > 1 \Longrightarrow$ Aşırı Sönümlü Sistem

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemin Genel Gereklilikleri

İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sistemin kutup ve sıfırlarını bulalım.

Sıfır; $z_1 = -\dfrac{1}{T_0} = -\dfrac{\omega_n}{\eta}$

Kutuplar; $p_{1,2} = -\xi\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$; Dolayısıyla

$\xi > 1 \Longrightarrow$ 2 farklı gerçek kök $p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$

$\xi = 1 \Longrightarrow$ 2 eşit gerçek kök $p_{1,2} = -\omega_n$

$0 < \xi < 1 \Longrightarrow$ 2 kompleks eşlenik kök $p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = -\sigma \pm j\omega_d$

$\xi = 0 \Longrightarrow$ 2 sanal kök $p_{1,2} = \mp j\omega_n$

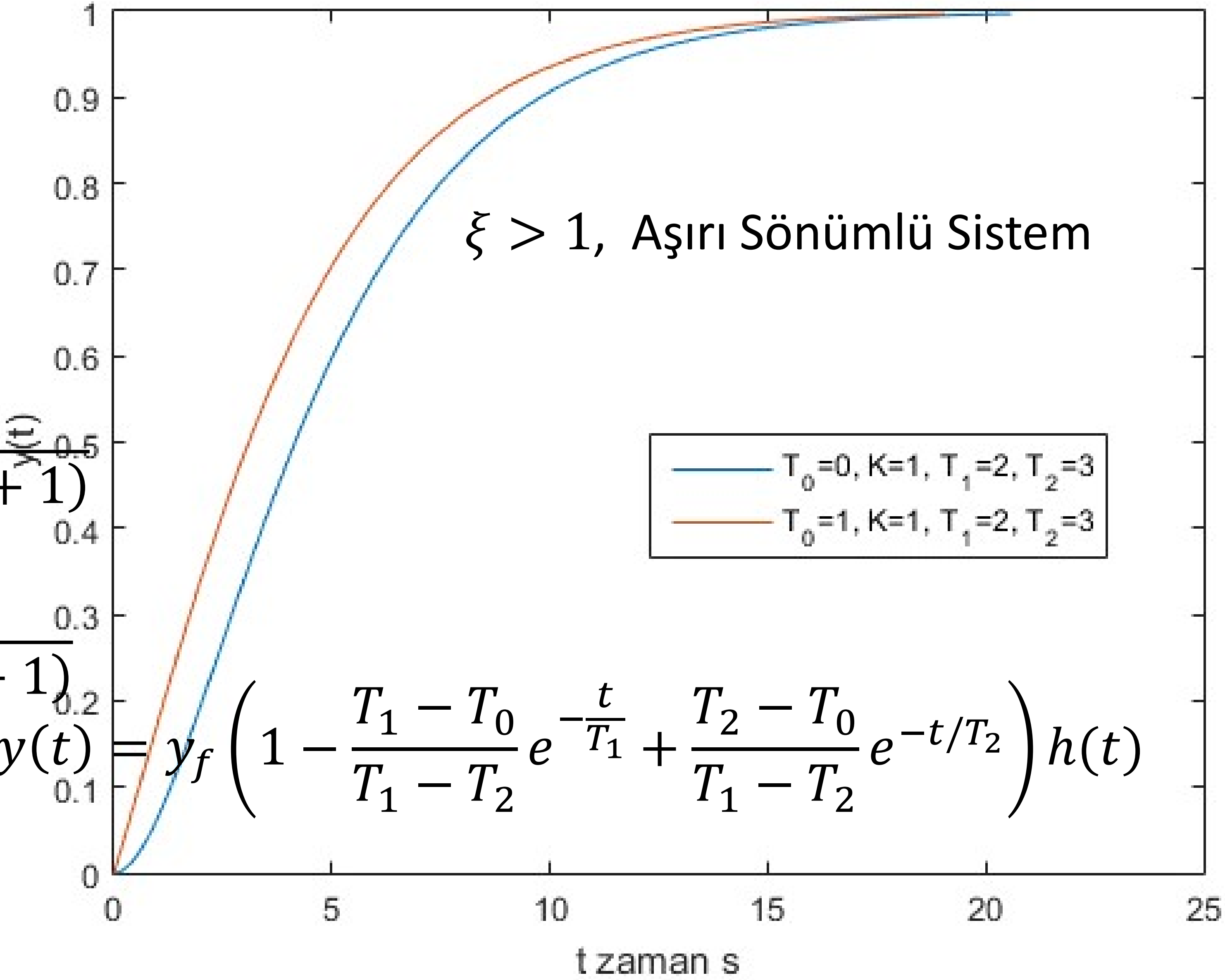
$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

$$ya\ da$$

$$G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{K_1}{(T_1 s + 1)} - \frac{K_2}{(T_2 s + 1)}$$



$\xi > 1$, Aşırı Sönümlü Sistem

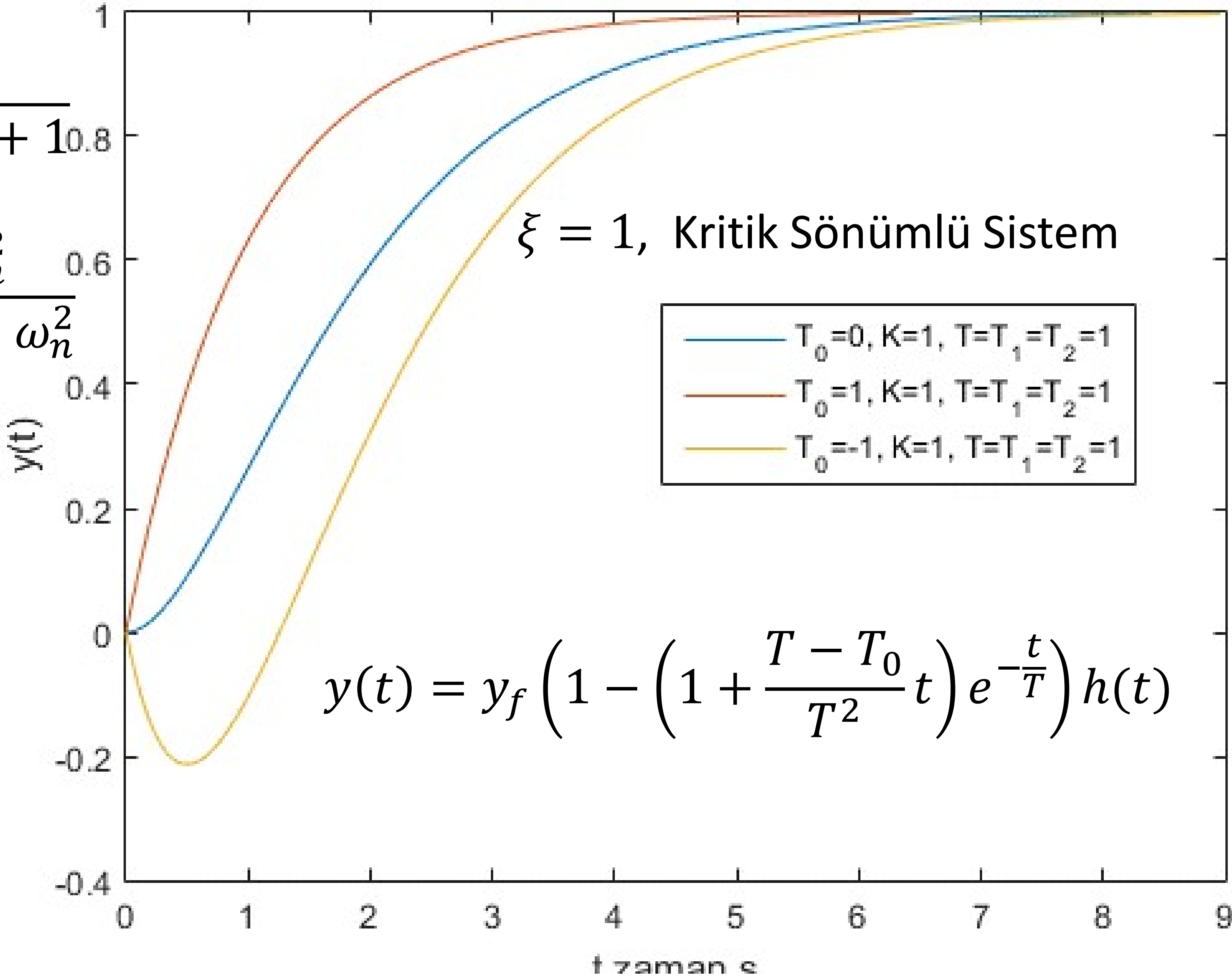
$$y(t) = y_f\left(1 - \frac{T_1 - T_0}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_2}e^{-t/T_2}\right)h(t)$$

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

ya da

$$G(s) = K\frac{\eta \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{(Ts + 1)^2}$$



$\xi = 1$, Kritik Sönümlü Sistem

$$y(t) = y_f\left(1 - \left(1 + \frac{T - T_0}{T^2}t\right)e^{-\frac{t}{T}}\right)h(t)$$

$$G(s) = K\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d; \sigma = \xi\omega_n$$

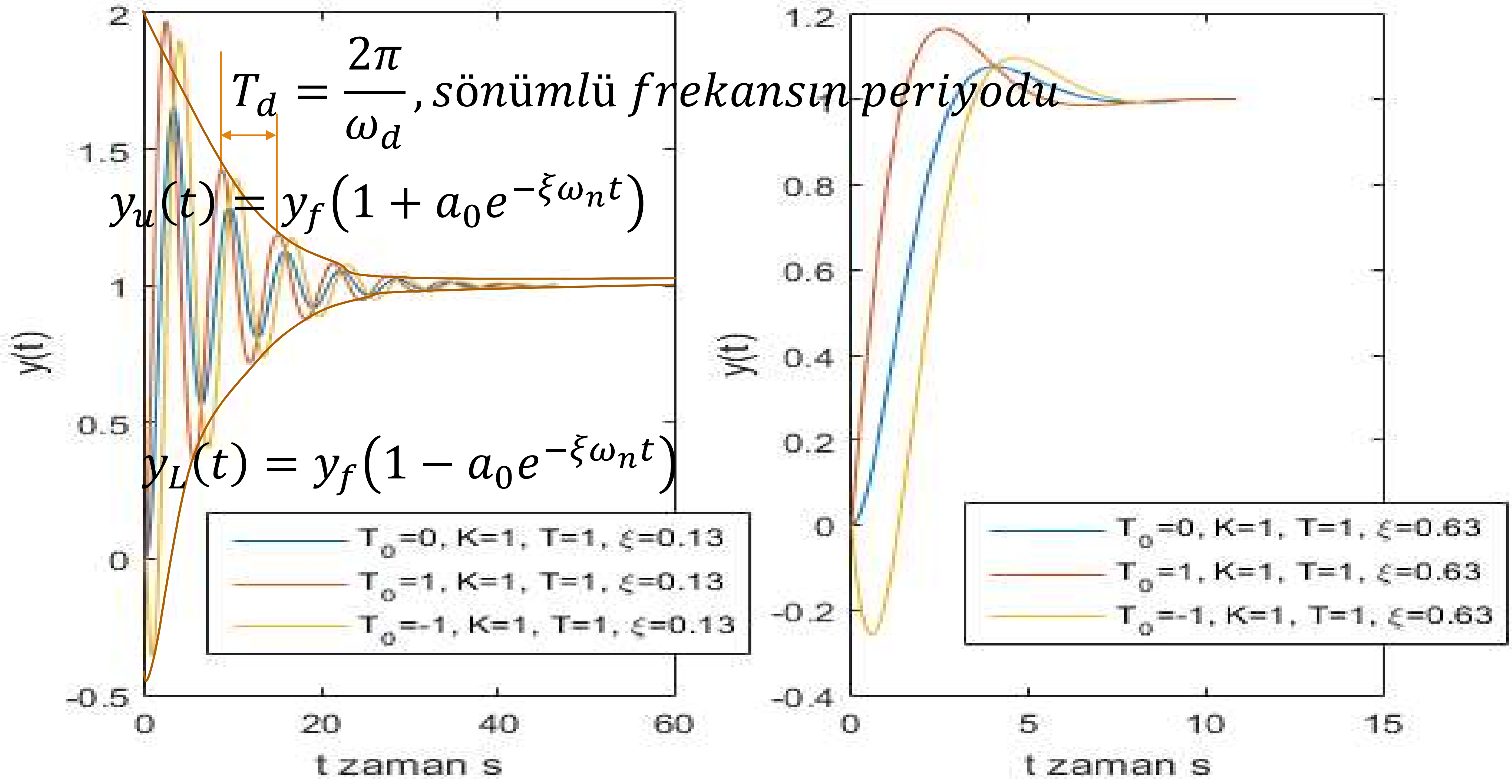
$$y(t) = y_f\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi - \eta}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right)\right)h(t)$$

$$y(t) = y_f\big(1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)\big)h(t)$$

$$y(t) = y_f\big(1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \psi)\big)h(t)$$

$$a_0 = \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta\xi + 1}}{\sqrt{1-\xi^2}}; \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = Sönümlü\ doğal\ frekans$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \qquad \psi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - \eta}\right)$$

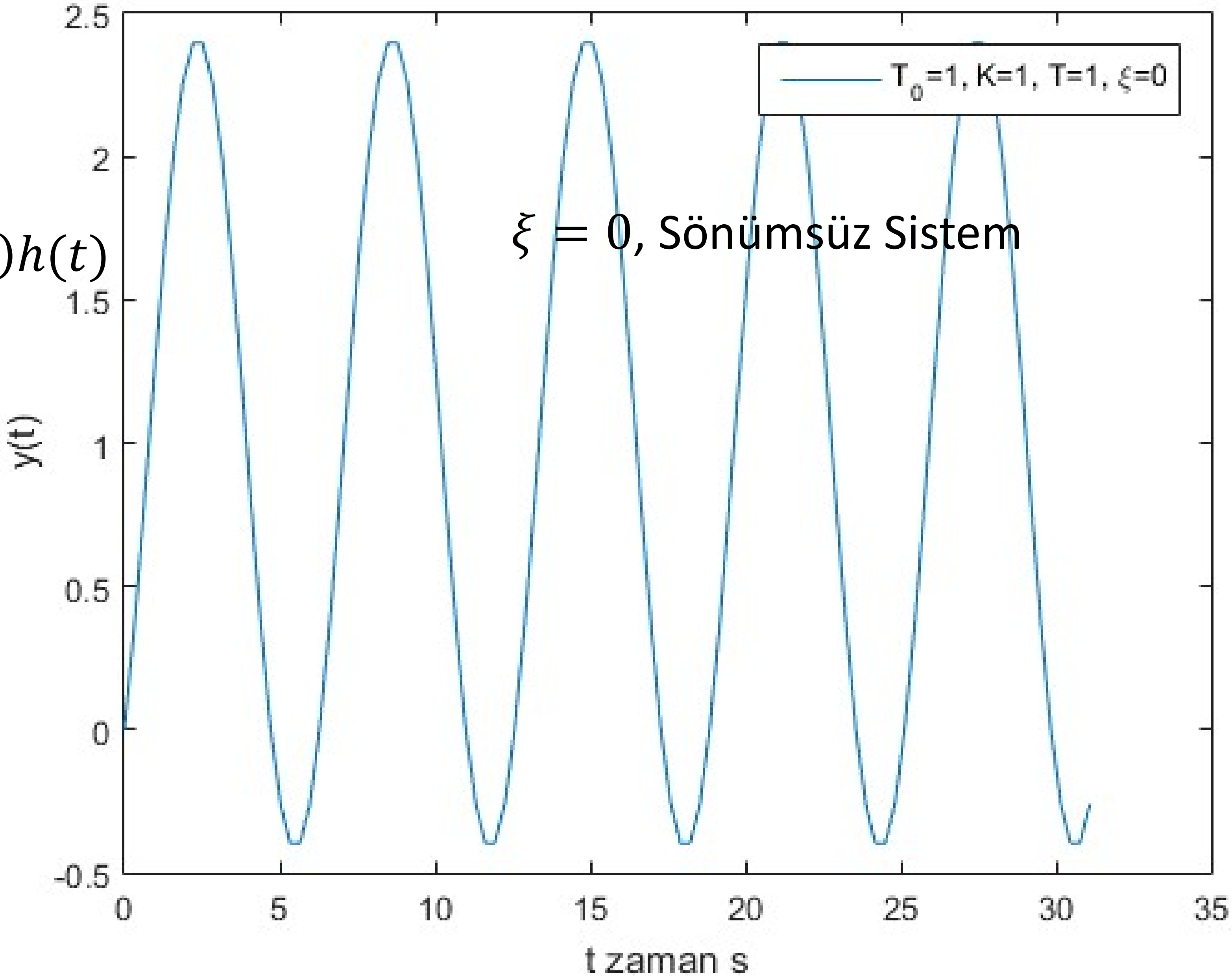

$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$, sönümlü frekansın periyodu
$y_u(t) = y_f\left(1 + a_0 e^{-\xi\omega_n t}\right)$
$y_L(t) = y_f\left(1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\right)$
y(t)
t zaman s
T_o=0, K=1, T=1, ξ=0.13
T_o=1, K=1, T=1, ξ=0.13
T_o=-1, K=1, T=1, ξ=0.13
y(t)
t zaman s
T_o=0, K=1, T=1, ξ=0.63
T_o=1, K=1, T=1, ξ=0.63
T_o=-1, K=1, T=1, ξ=0.63

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

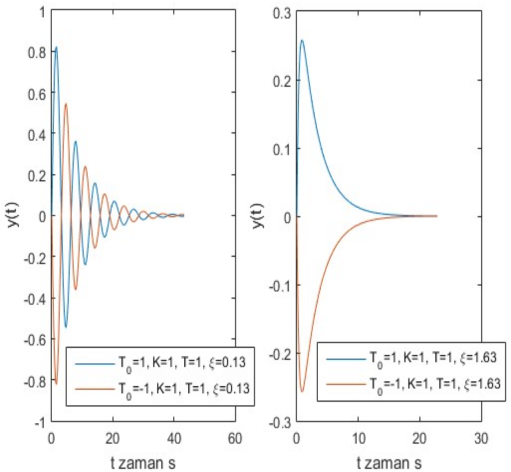
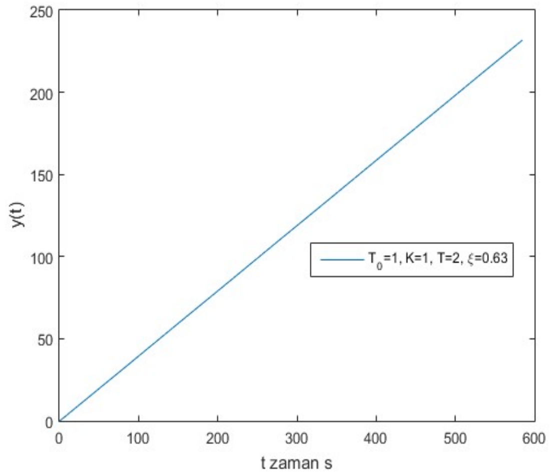
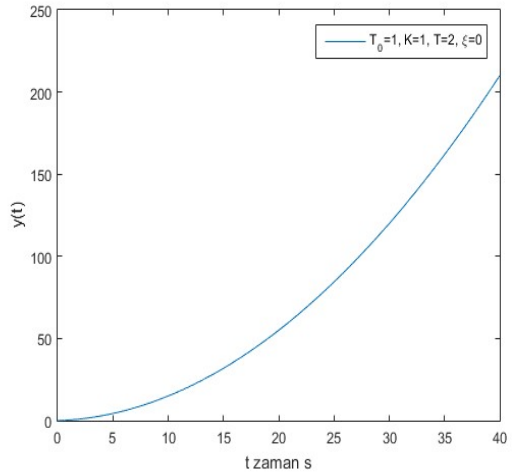
$$p_{1,2} = \mp j\omega_n$$

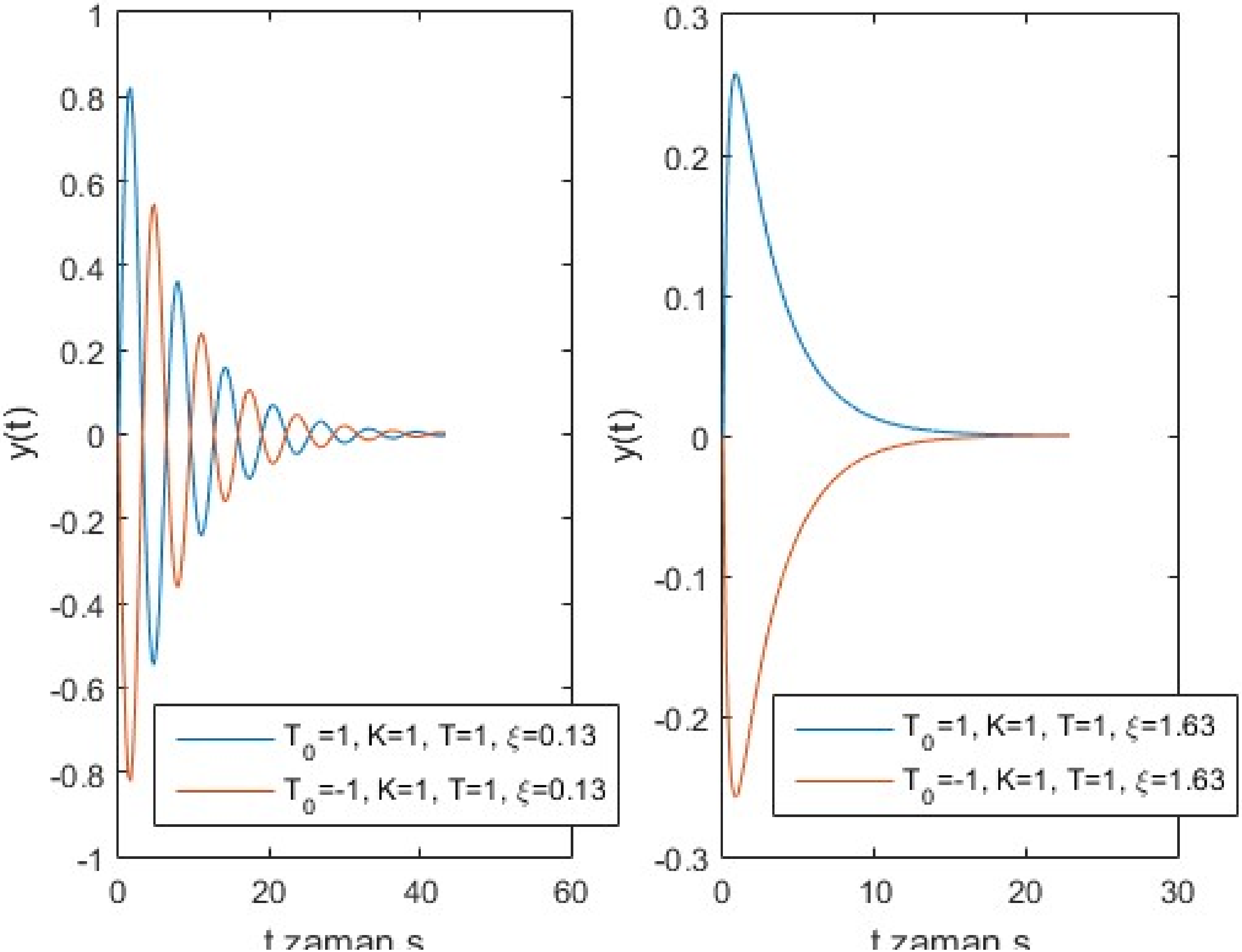
$$y(t) = y_f(1 - \cos(\omega_n t))h(t)$$

$\xi = 0$, Sönümsüz Sistem

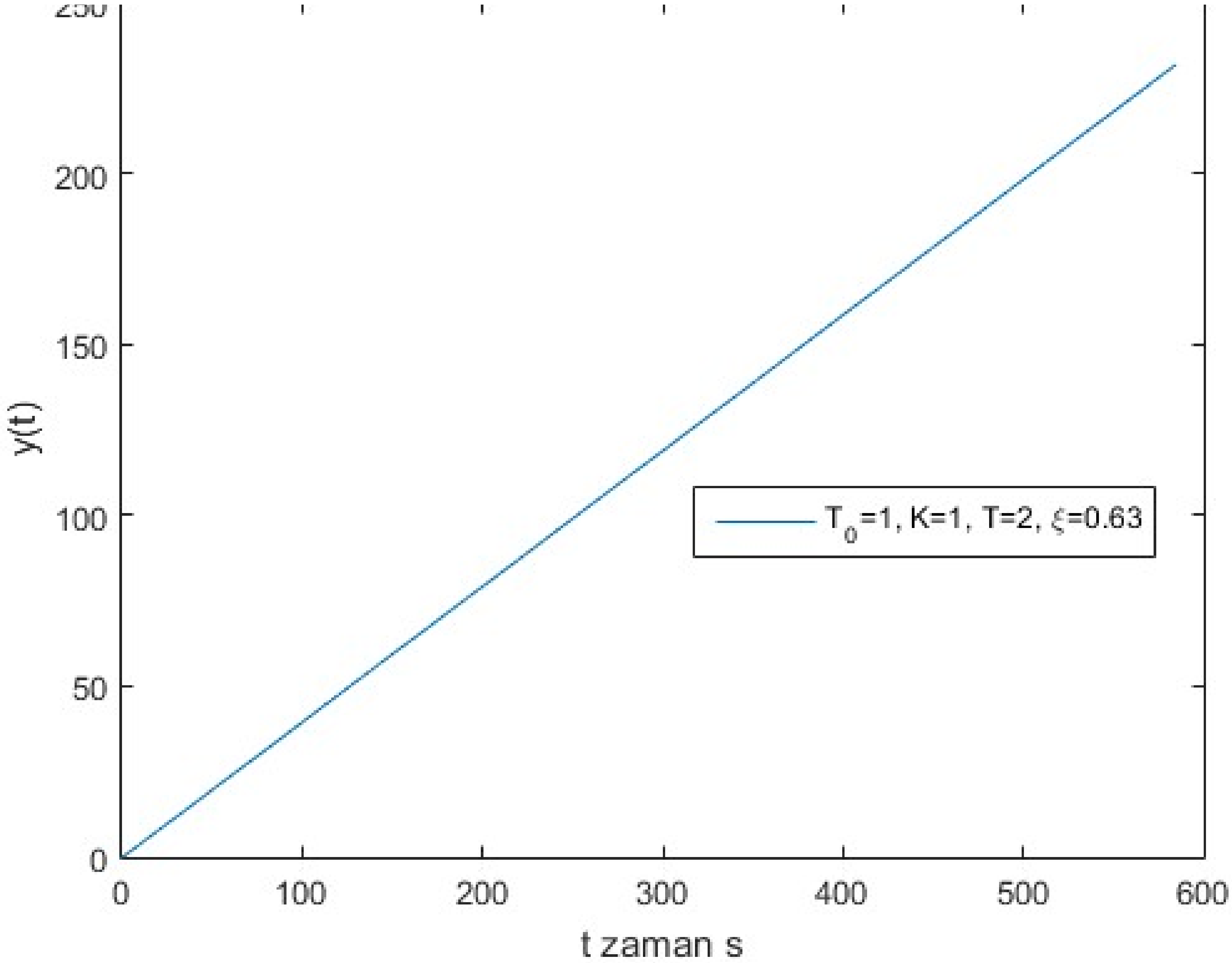


Bozulmuş (Dejenere) İkinci Derece Sistemlerin Adım Girişe Cevabı

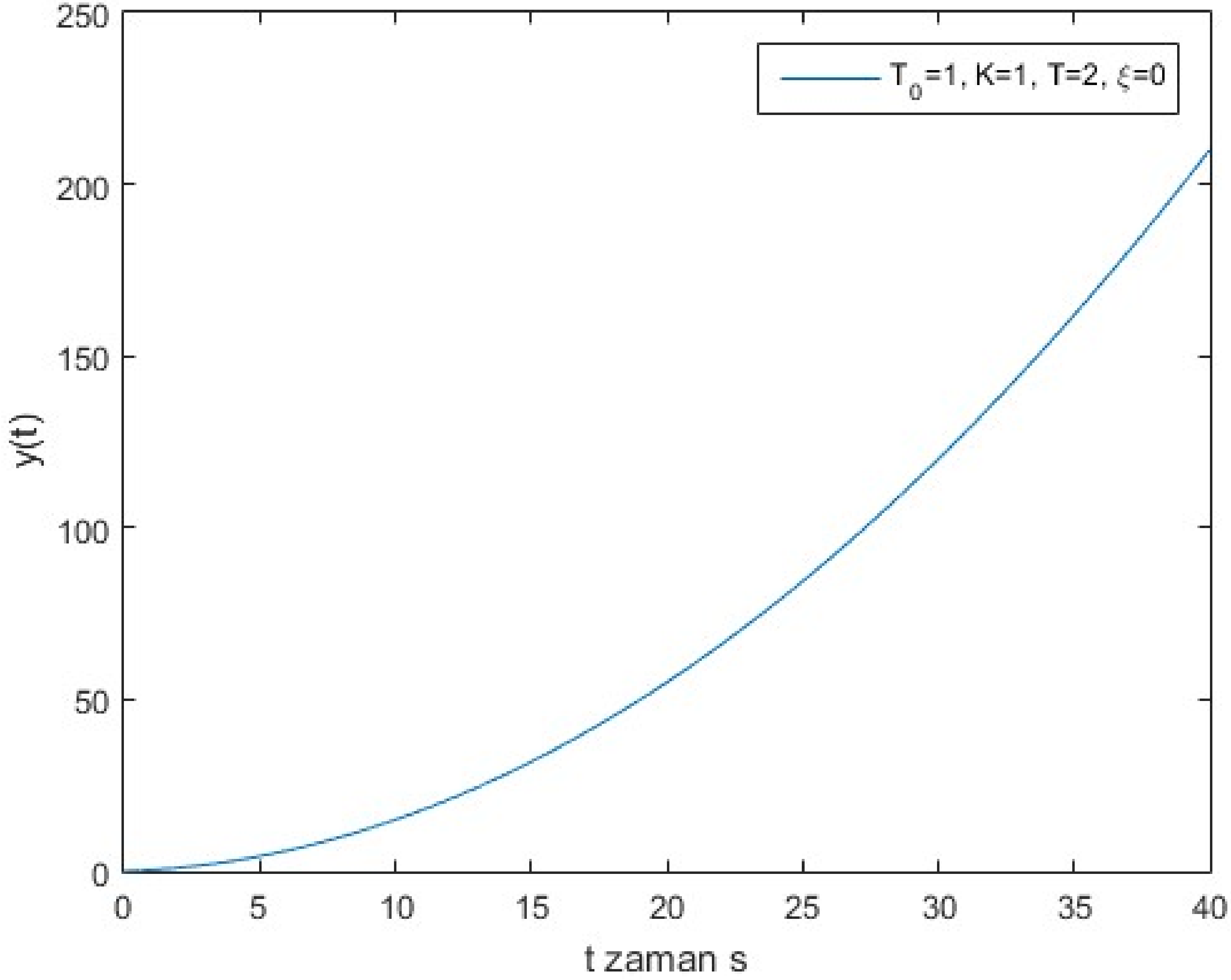
<table>
<tr><td>Standart TF</td><td colspan="3">$$G(s) = K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}\ ya\ da\ G(s) = K\frac{\eta \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$</td></tr>
<tr><td>İsmi</td><td>Pay da serbest «s»</td><td>Payda da serbest «s»</td><td>Payda da serbest «s^2»</td></tr>
<tr><td>TF’nin Özel Formu</td><td>$$K\frac{T_0 s}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$</td><td>$$K\frac{T_0 s + 1}{s(Ts + 1)}$$</td><td>$$K\frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2}$$</td></tr>
<tr><td>t-y(t) grafiği</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>



y(t)
t zaman s
T_0=1, K=1, T=1, ξ=0.13
T_0=-1, K=1, T=1, ξ=0.13
T_0=1, K=1, T=1, ξ=1.63
T_0=-1, K=1, T=1, ξ=1.63



250
200
150
100
50
0
y(t)
0
100
200
300
400
500
600
t zaman s
T0=1, K=1, T=2, ξ=0.63


250
200
150
100
50
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
y(t)
t zaman s
T_0=1, K=1, T=2, ξ=0

Yüksek Dereceli Sistemler

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{b_m\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{a_n\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$G(s)=K\frac{{T_0}^m s^m+{T_0}^{m-1}\beta_{m-1}s^{m-1}+\cdots+\beta_1 T_0 s+1}{T^n s^n+\alpha_{n-1}T^{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 T s+1}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(T_{0j}s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}$$

$$G(s)=K\frac{\eta^m{\omega_n}^{n-m}s^m+\cdots+\eta\beta_1\omega_n^{n-1}s+\omega_n^n}{s^n+\alpha_{n-1}\omega_n s^{n-1}+\alpha_1\omega_n s+\omega_n^n}$$

$$K=\frac{b_0}{a_0};Durgun\ Durum\ Kazancı;T=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}},sistemin\ karakteristik\ zamanı;$$

$$T_0=\sqrt[m]{\frac{b_m}{b_0}},paydanın\ karak.zamanı;\eta=\frac{T_0}{T}=\omega_n T_0;\ Karak.\ zaman\ oranı$$

$$\alpha_k=\frac{a_k}{a_0T^k}\ ,k=0,1,2,\ldots,n;\beta_k=\frac{b_k}{b_0{T_0}^k}\ ,k=0,1,2,\ldots,m;n\geq 3\ ve\ m<n$$

Yüksek Dereceli Sistemlerin Ayrıştırılması

n. Dereceden farklı kutuplara sahip kararlı bir doğrusal zamanla değişmez sistem düşünelim

r= birbirinden farklı gerçek kutupların sayısı olsun.

N-r=2k, farklı kompleks kutupların sayısıdır. (k kompleks eşlenik çift sayısı)

$$G(s) = K\frac{{\omega_n}^n\left({T_0}^m s^m + {T_0}^{m-1}\beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_1 T_0 s + 1\right)}{(s+\rho_1)\cdots(s+\rho_r)(s^2+2\sigma_1 s+\omega_1^2)\cdots(s^2+2\sigma_k s+\omega_k^2)}$$

Kısmi kesirlere ayırma yöntemiyle

$$G(s) = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{c_i}{s+\rho_i}\right) + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d_j s + e_j}{s^2+2\sigma_j s+\omega_j^2}\right)$$

Burada $\sigma_j = \xi_j \omega_j$

Adım Cevabı ve Kutupların Yerleri Arasındaki İlişkiler

Birinci Derece Sistemlerde, küçük zaman sabiti yani büyük kutup (kök) sistemi hızlı kılar. Yani sistem son değerine hızlıca oturur.

İkinci Derece Sistemlerde,

$\xi > 1 \Longrightarrow$ sistem 2 adet birinci derece sisteme eşittir.

$\xi = 1 \Longrightarrow$ Sistemin cevabı aşırı sönümlü sisteme denktir.

$0 < \xi < 1 \Longrightarrow$ 2 kompleks eşlenik kök

$$p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right) = -\sigma \pm j\omega_d$$

σ büyük olursa, hızlı tepki, ω_d büyük olursa salınım periyodu küçük ve daha çok salınım.

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + {\omega_d}^2$$

Bu kompleks düzlemde ω_n yarıçaplı daire demektir.

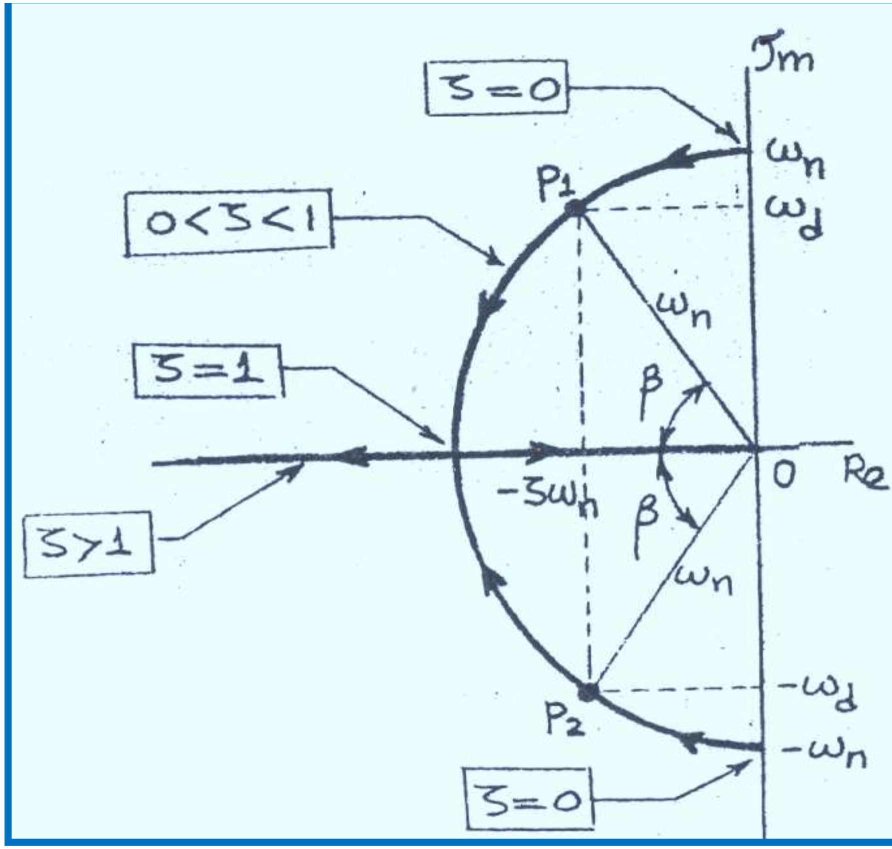
$\beta - sönüm\ \ açıçı$

$\omega_d = \omega_n \sin\beta$

$\sigma = \omega_n \cos\beta$

$$\tan\beta = \frac{\omega_d}{\sigma} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\omega_n\xi} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

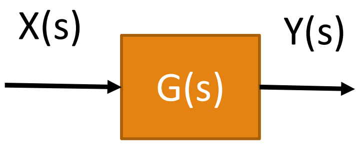
Burada $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$



ω_n sabit, $\xi \uparrow \Rightarrow \sigma \uparrow, \omega_d \downarrow \Rightarrow$ Sistem, hıızlı az salıalınım

ξ sabit, yani β sabit $\omega_n \uparrow \Rightarrow \sigma \uparrow, \omega_d \uparrow \Rightarrow$ Sistem, hıızlı çok salıalınım

Baskın Kutup ve Sistemin Basitleştirilmesi



gibi doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi ele alalım.

$|Re(p_i)|$ Küçük bir değerse, p_i imajiner eksene yakın demektir. p_i baskın kutuptur. En yavaş kutup olduğundan, sistemin hızını bu kutup belirler.

$G(s)$ transfer fonksiyonu daha basit bir tarnsfer fonksiyonuna yakınsayabilir. Burada yakınsak TF $G_a\ (s)$ in derecesi $G(s)$ ‘den daha düşüktür.

Yakınsak TF $G_a\ (s)$ in belirlenme kuralları

I. $G(s)$'de $(s-pi)$ ve $(s-z_j)$'ler eğer $p_i \cong z_j$ ise birbirlerini götürebilir.

II. Eğer $\left|\frac{Re(p_j)}{Re(p_i)}\right| > 5$ ise o zaman Yani p_j nin geçici cevap üzerindeki etkisi ihmal edilebilir. Yani G(s)'deki $(s-p_j)$ terimi ihmal edilebilir.

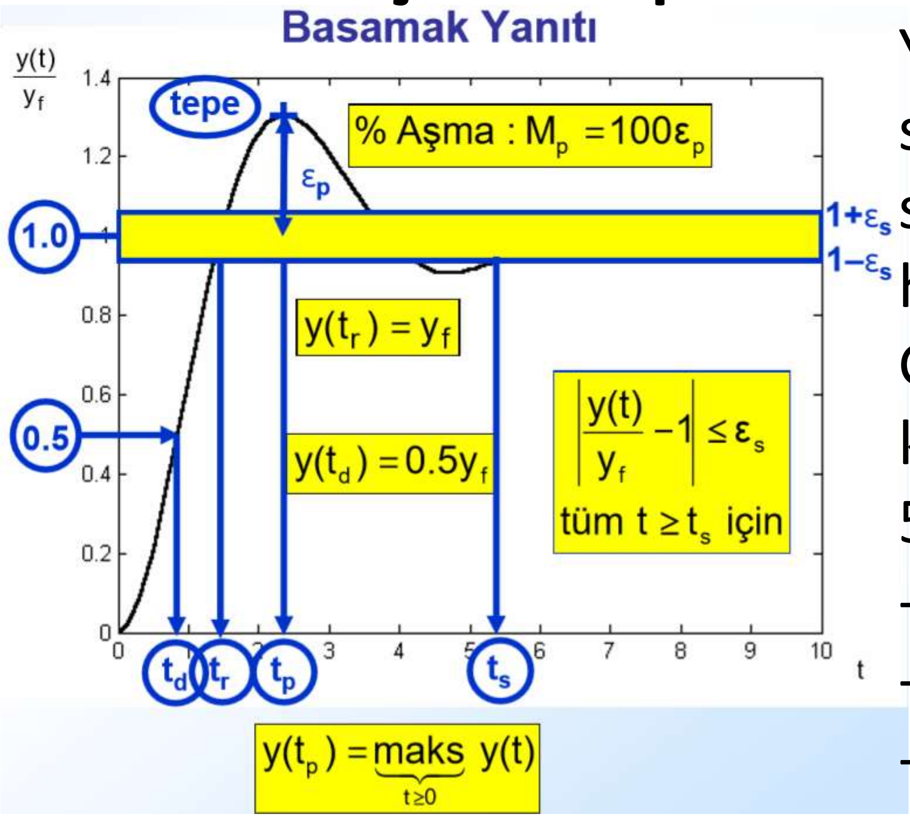
p_j'nin ihmaline daha çok şu şartlar sağlandığında karar verilir.

a.) p_i diğer kutuplara yakın ve sıfırlardan uzaksa

b.) p_j diğer kutuplardan uzak ve sıfırlara yakınsa

III. Bütün girişler x(t) için $y_f = (y_a)_f$ olmalıdır. Bunu için $\mathrm{G}(0) = G_a\ (0)$ şartı sağlanmalıdır.

Sistemlerin Geçici Cevapları ile İlgili Tanımlar



Yerleşme zamanından önceki dinamik davranışa sistemlerin geçici cevabı adı verilir. Geçici cevap sistem dinamiğinin diferansiyel denklemin homojen çözümüyle ilgilidir.

Geçici cevap adım giriş ile incelenir. Başlangıç koşulları 0 dır. Sistemin geçici davranış özellikleri 5 parametre aracılığıyla tanımlanır.

-Gecikme zamanı, t_d

-Yükselme zamanı, t_r

-Aşma zamanı, t_p

-Yerleşme zamanı, t_s

-En fazla aşma, M_p

Bu beş parametre ile

i.) Cevabın Hızı; Sistem durgun duruma ne kadar sürede ulaşıyor;

ii.) Göreceli Kararlılık; Sistem yanıtının ne kadar salınımlı ve/veya ne kadar aşmalı olduğu konularında karar verilir.

Gecikme zamanı, td

$$\frac{y(t)}{y_f} = 0.5$$

ilişkisinden bulunacak en küçük t zamanıdır.

Yükselme zamanı, tr

$$\frac{y(t)}{y_f} = 1$$

ilişkisinden bulunacak en küçük t zamanıdır.

tr ayrıca 0 dan %100’ e yükselme zamanı olarak da adlandırılır.

Aşma zamanı, tp ; y(t)’nin maksimum değeri aldığı zamandır. y(t)’nin maksimum değerine y_p denir.

$$y_p = \max_{t \geq 0} y(t)$$

Yerleşme zamanı, ts

Verilen tolerans bantı ε_s'in içerisine çıkmamak üzere girme zamanına yerleşme zamanı adı verilir. Bu bant genişliği genellikle %2-5 arasında verilmektedir. t_s şu şekilde bulunur.

$$\left|\frac{y(t)}{y_f} - 1\right| \leq \varepsilon_s$$

En fazla aşma, Mp

$$\frac{y_p}{y_f} - 1 = \varepsilon_p$$

$$M_p = 100\varepsilon_p$$

-Gecikme zamanı, td; -Yükselme zamanı, tr ve -Aşma zamanı, tp; sistemin hızıyla ilgilidir. Bu zamanlar küçük olduğunda sistem hızlı demektir.

-En fazla aşma, Mp; göreli kararlılıkla ilgilidir. Küçük Mp daha sönümlü bir hareket demektir. Sistem az salınımlı ve aşırı aşmalar yoktur.

-Yerleşme zamanı, ts ; Hem sistemin hızıyla hem de kararlılığıyla ilgilidir. Eğer ts büyükse sistem yavaş ve/veya çok salınımlıdır.