ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MAK403 OTOMATİK KONTROL
DÖNEM SONU SINAVI 19/01/2023
Dr. Nurdan Bilgin

Öğrenci Adı Soyadı:
Öğrenci Numarası:
FORMÜL KAĞIDI

Aşırı Sönümlü Sistem

$$\mathrm{G(s)} = \mathrm{K}\frac{\mathrm{T_0 s} + 1}{\mathrm{T^2 s^2} + 2\xi \mathrm{Ts} + 1} \text{ yada } G(s) = \frac{K_1}{(T_1 s + 1)} - \frac{K_2}{(T_2 s + 1)}$$

$T_1 > T_2$ durumu için $y(t) = y_f\left(1 - \frac{T_1 - T_0}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}\right) h(t)$ Kararlılık için $T_1, T_2 > 0$

$t_p = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} ln\left(\frac{T_1}{T_2}\frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1}\right)$	*Eğer* $T_0 > T_1 > T_2$ *olursa* $\varepsilon_p = \frac{T_0 - T_1}{T_1 - T_2}\left[\frac{T_1}{T_2}\frac{(T_0 - T_2)}{(T_0 - T_1)}\right]^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}} + \frac{T_0 - T_2}{T_1 - T_2}\left[\frac{T_1}{T_2}\frac{(T_0 - T_2)}{(T_0 - T_1)}\right]^{\frac{T_1}{T_1 - T_2}}$	
Yerleşme Zamanı t_s $\left\lvert\frac{y(t)}{y_f} - 1\right\rvert \le \varepsilon_s$	Eğer $T_0 > T_1 > T_2$ olursa yükselme $t_r = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln\left(\frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1}\right)$	Gecikme zamanı, t_d $\frac{y(t)}{y_f} = 0.5$

Az Sönümlü Sistem

$$\mathrm{G(s)} = \mathrm{K}\frac{\mathrm{T_0 s} + 1}{\mathrm{T^2 s^2} + 2\xi \mathrm{Ts} + 1} \text{ yada } \mathrm{G(s)} = \mathrm{K}\frac{\eta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{y(t)}{y_f} = 1 - a_0 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi);$$

$$cos\beta = \xi; = sin\beta = \sqrt{1 - \xi^2};\ a_0 = \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta\xi + 1}}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right); \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$t_p = \frac{\phi + \beta + \frac{\pi}{2}}{\omega_d}$ $\eta \neq 0$ $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ $\eta = 0$	$\varepsilon_p = a_0 \sin(\beta)\exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\left(\phi + \beta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\eta \neq 0$ $\varepsilon_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$ $\eta = 0$	
$t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} ln\left(\frac{a_0}{\varepsilon_s}\right)$ $\eta \neq 0$ $t_s \cong \begin{cases} \frac{4}{\xi\omega_n} & \varepsilon_s = 0.02\ i\c{c}in \\ \frac{3}{\xi\omega_n} & \varepsilon_s = 0.05\ i\c{c}in \end{cases}$ $\eta = 0$	$t_r = \frac{\phi + \frac{\pi}{2}}{\omega_d}$ $\eta \neq 0$ $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$ $\eta = 0$	Gecikme zamanı, t_d $\frac{y(t)}{y_f} = 0.5$

N	Basamak $r(t) = r_0 h(t)$	Rampa $r(t) = r_1 t h(t)$	İvme $r(t) = 0.5 r_2 t^2 h(t)$
0	$\frac{r_0}{1 + K_{OL}}$	∞	∞
1	0	$\frac{r_1}{K_{OL}}$	∞
2	0	0	$\frac{r_2}{K_{OL}}$
3	0	0	0

Son Değer Teoremi

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

İlk değer Teoremi

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Öğrenci Adı Soyadı:
Öğrenci Numarası:

$$G(s) = \left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=j\omega} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \;\therefore\; N(j\omega) = N_r(\omega) + jN_i(\omega)\ ve\ D(j\omega) = D_r(\omega) + jD_i(\omega)$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|} = \frac{\sqrt{{N_r}^2(\omega) + {N_i}^2(\omega)}}{\sqrt{{D_r}^2(\omega) + {D_i}^2(\omega)}}\ \phi(\omega) = atan2\left[\frac{N_i(\omega)}{N_r(\omega)}\right] - atan2\left[\frac{D_i(\omega)}{D_r(\omega)}\right]$$

$$\omega_c = \omega_n = \frac{1}{T};\quad M(\omega_c) = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \bar{M}(\omega_c) = 20\log\left(\frac{1}{2\xi}\right)$$

Eğer giriş $x(t) = [\sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) + x_m]h(t)\ ise$
Burada $x_m = x_m \sin\,[0t + (\pi/2)]$
O halde, $t \geq t_s\ için$
$Y_f(t) = \left[\sum_{k=1}^{N} B_k \sin\big(\omega_k t + \alpha_k + \phi(\omega_k)\big) + y_m\right]h(t)$
Burada

$$\boxed{\begin{array}{c} B_k = M(\omega_k)A_k \\ M(\omega_k) = |G(j\omega_k)| \\ \phi(\omega_k) = \angle G(j\omega_k) \end{array}}$$

$$x(t) = x_m h(t) \Longrightarrow y_m = G(0)x_m$$

Temel Faktörlerin Bode Çizimleri

1. Sabit Kazanç, K; $G(s) = K[K > 0]$;$\bar{M}(\omega) = 20logK$; φ(ω)=0 ;eğer $K < 0$ ise, $\bar{M}(\omega) = 20\ log\,|K|$, $\phi(\omega) = 180°$
2. İntegral ve Türev Faktörleri:
    1. İntegral:$G(s) = \frac{1}{s^n}$ $\bar{M}(\omega) = -20n\ log(\omega)\ ve\ \ \phi(\omega) = -90°n$
    2. Türev: $G(s) = s^n$ $\quad \bar{M}(\omega) = 20nlog(\omega) \quad \phi(\omega) = 90°n$
3. Birinci Dereceden Faktörler
    1. $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$

Düşük Frekanslar İçin ($\omega \ll 1/T$): $\bar{M}(\omega) = 0\ dB\ ve\ \ \phi(\omega) = 0°$
Yüksek Frekanslar İçin $\left(\omega \gg \frac{1}{T}\right)$: $\bar{M}(\omega)\ eğimi\ = -20dB\backslash/onluk\ \phi(\omega) = -90°$

1. $G(s) = Ts + 1$

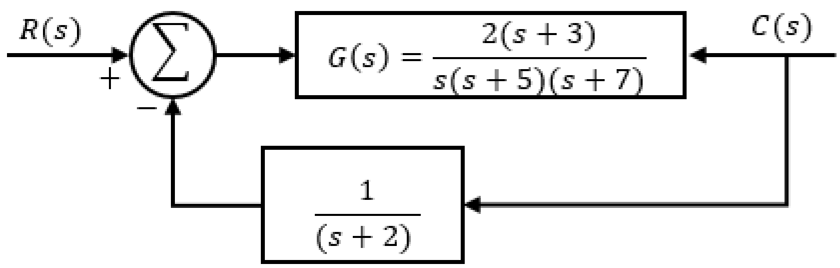
Düşük Frekanslar İçin ($\omega \ll 1/T$): $\bar{M}(\omega) = 0\ dB\ ve\ \ \phi(\omega) = 0°$
Yüksek Frekanslar İçin $\left(\omega \gg \frac{1}{T}\right)$: $\bar{M}(\omega)\ eğimi\ = 20dB\backslash/onluk\ \phi(\omega) = 90°$

1. İkinci Dereceden Faktörler
    1. $G(s) = \frac{1}{Ts^2+2\xi Ts+1}$

Düşük Frekanslar İçin ($\omega \ll \sqrt{1/T}$): $\bar{M}(\omega) = 0\ dB$
Yüksek Frekanslar İçin ($\omega \gg \sqrt{1/T}$): $\bar{M}(\omega)\ eğimi\ = -40dB\backslash/onluk$
ϕ İçin Doğrusal Yakınsama; $\omega < 10^{-\xi}\,\omega_n$ İçin $\phi \cong 0$; ϕ, $10^{-\xi}\,\omega_n < \omega < 10^{\xi}\omega_n$ frekans aralığında eğimi $-90\backslash/\xi°\backslash/onluk$ olmak üzere $(\omega_n, -90°)$'den geçen yaklaşık doğrusal bir çizgidir; $\omega > 10^{\xi}\omega_n$ için $\phi \cong -180°$dir.

Öğrenci Adı Soyadı:
Öğrenci Numarası:

Soru 1 (20 puan):



Yanda blok diyagramı verilen sistemi ele alınız. Sistemin, **birim adım giriş** için durgun durum hatasını son değer teoremini kullanarak belirleyiniz.

Çözüm 1:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s^2 + 10s + 12}{s^4 + 14s^3 + 59s^2 + 72s + 6}$$

Sistem kararlı durgun durum kazancı bulunabilir.

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{2s^2 + 10s + 12}{s^4 + 14s^3 + 59s^2 + 72s + 6}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^4 + 14s^3 + 57s^2 + 62s - 6}{s^4 + 14s^3 + 59s^2 + 72s + 6}$$

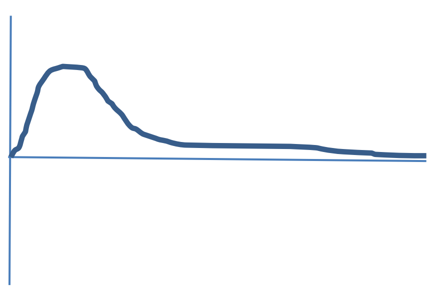
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s * \frac{1}{s} * \frac{s^4 + 14s^3 + 57s^2 + 62s - 6}{s^4 + 14s^3 + 59s^2 + 72s + 6} = -1$$

Soru 2 (20 puan): Aşağıda kutup sıfır haritası verilen sistemi ele alınız. × kutupları, O sıfırları temsil etmektedir.

Çözüm 2:

i.) Sistemin kararlılığı hakkında ne söylersiniz: Sistem kararlıdır, bütün kutuplar sol yarı düzlemde.

ii.) Sistemin adım girişe cevabını kabaca çizerek gösteriniz: Sistemin bir çift komplex kutbu var bu kutuplar baskın kutup, sistemin salınımlı bir hareket yapması sonra durgun duruma ulaşması beklenir.

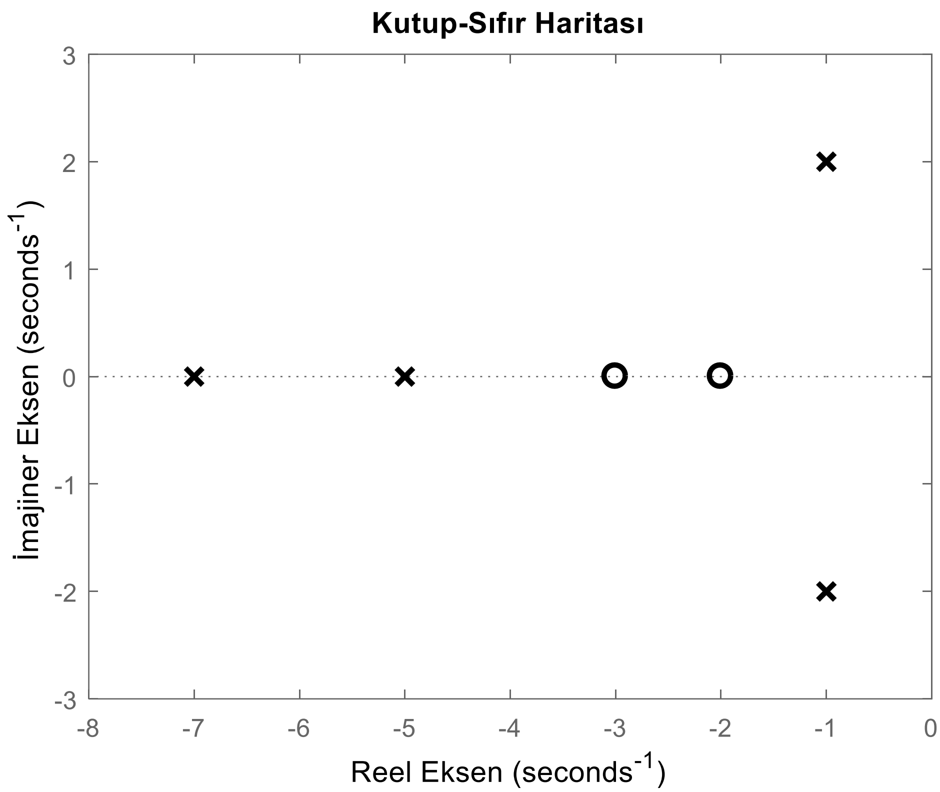


iii.) $y_f(t)$'yi belirleyiniz.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+5)(s+7)(s^2+2s+5)}$$

$$y_f(t) = \lim_{s \to 0} s * \frac{1}{s} * \frac{(s+2)(s+3)}{(s+5)(s+7)(s^2+2s+5)} = \frac{6}{70}$$

Öğrenci Adı Soyadı:
Öğrenci Numarası:



Soru 3 (20 puan): Aşağıda verilen karakteristik denklemi Routh-Hurwitz kriterlerini kullanarak değerlendiriniz ve marjinal kararlılığa neden olan kutuplarını bulunuz.

$$D(s) = s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + 2$$

S/S	1	2	3
s^5	1	5	4
s^4	3	5	2
s^3	10/3	10/3	0
s^2	2	2	0
s^1	4 0	0	0
s^0	2		

$$P(s) = 2s^2 + 2$$

$$P'(s) = 4s$$

Tablo tamamlandı ve işaret değişikliği yok. Bu durumda sistem marjinal kararlı. Marjinal kararlılığa neden olan kutuplar.

$$P(s) = 2s^2 + 2 = 0 \Longrightarrow p_{1,2} = \pm 1i$$

Soru 4 (20 puan): Aşağıda verilen transfer fonksiyonunun sönüm oranını ξ, doğal frekansını ω_n, yerleşme zamanını t_s, aşma zamanını t_p, yükselme zamanını t_r ve maksimum yüzde aşma değeri $\%M$ bulunuz.

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 8s + 36}$$

$$\omega_n = \sqrt{36} = 6 \; ve \; 2\xi\omega_n = 8 \Longrightarrow \xi = 2/3$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 1 \; saniye \qquad \varepsilon_s = 0.02 \; için$$

Öğrenci Adı Soyadı:
Öğrenci Numarası:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{6\sqrt{1-\frac{4}{9}}} = 0.39\ saniye$$

$$\varepsilon_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \exp\left(\frac{-\frac{\pi 2}{3}}{\sqrt{5/9}}\right) = 0.0602 \therefore M = \%\ 6$$

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \mathrm{acos}(\xi)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.5144$$

Soru 5 (20 puan):

$$G(s) = \frac{36}{s^2+8s+36}$$

Şeklinde verilen sisteme $x(t) = 2sin6t$ şeklinde giriş verildiğinde sistemin çıkışı $y(t)$ ifadesini bulunuz.

Çözüm 5:

$$G(j\omega) = \frac{36}{(j\omega)^2+8(j\omega)+36} = \frac{36}{36-\omega^2+8\omega j}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{36}{\sqrt{(36-\omega^2)^2+(8\omega)^2}} = \frac{36}{\sqrt{\omega^4-8\omega^2+36^2}}$$

$$\phi = \mathrm{atan}\left(\frac{0}{36}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{8\omega}{36-\omega^2}\right)$$

$$A_x = 2, \omega = 6, \alpha = 0$$

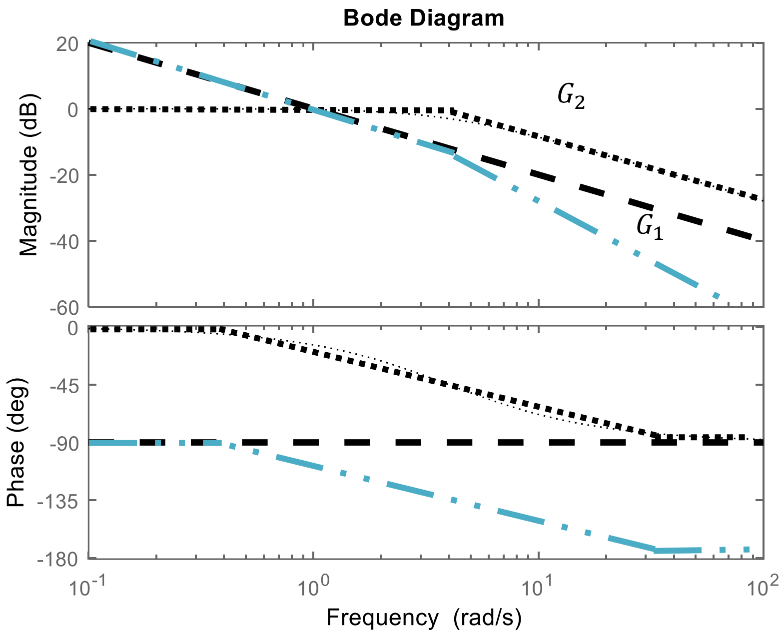
$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{36}{\sqrt{6^4-8*6^2+36^2}} = \frac{3}{4}$$

$$\phi = \mathrm{atan}\left(\frac{0}{36}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{8\omega}{36-\omega^2}\right) = 0 - 90^0 = -90^0 = -\pi/2$$

$$y(t) = \frac{3}{4} * 2\sin\left(6t - \frac{\pi}{2}\right) = 1.5\sin\left(6t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Öğrenci Adı Soyadı:
Öğrenci Numarası:

Soru 6 (20 puan): $G = G_1 * G_2$ formunda bir transfer fonksiyonudur. Aşağıda G_1 ve G_2 için çizilmiş Bode Diyagramları farklı çizgi tipleri kullanılarak gösterilmiştir. G'nin Bode diyagramını ve transfer fonksiyonunu elde ediniz.



G'nin Bode diyagramını mavi ile çizilen grafiktir ve G_1 ve G_2'nin toplanması ile oluşturulur. Transfer fonksiyonunu elde ediniz.

$$G_1 = \frac{1}{s}$$

$$\omega_c = \omega_n = 4 \Longrightarrow T = 0.25$$

$$G_2 = \frac{z}{s+4}$$

$$20logK = 0 \Longrightarrow K = 1$$

$$G = \frac{z}{4}\frac{1}{s}\frac{1}{0.25s+1}$$

$$z = 4$$

$$G_2 = \frac{4}{s+4}$$

$$G = \frac{4}{s(s+4)}$$