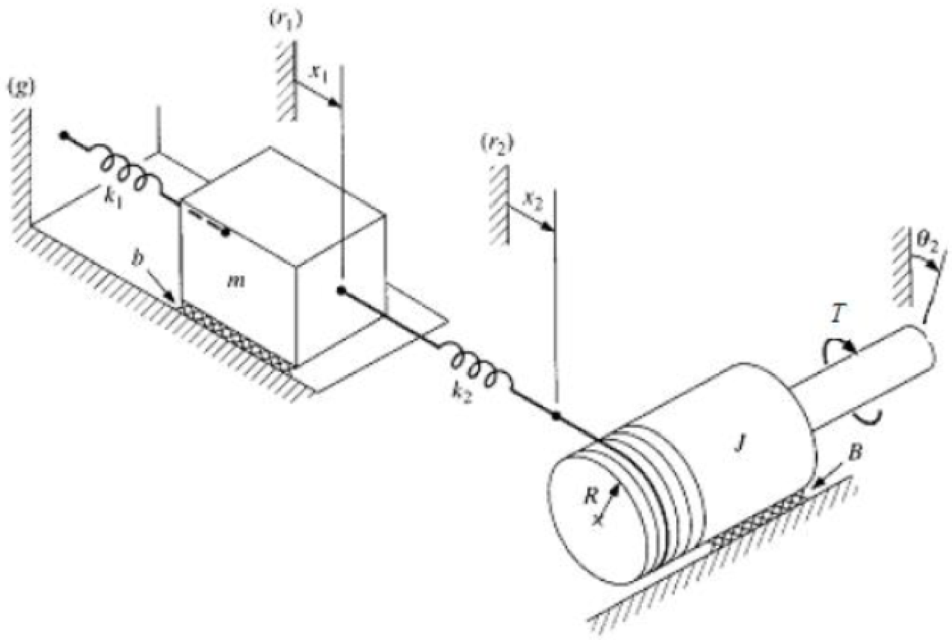
MAK403 OTOMATİK KONTROL
ÖDEV 2
Dr. Nurdan Bilgin
Teslim Tarihi:07/11/2019-Ders Saati

SORU

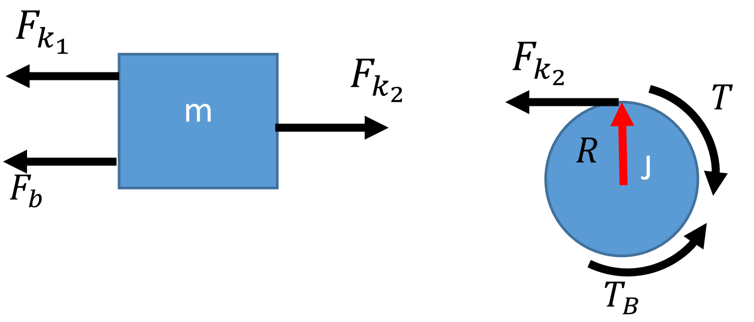


Şekil öteleme ve dönme elemanlarına sahip mekanik bir sistemi göstermektedir.
a.) Sistemin temel denklemlerini yazın.
b.) Giriş mil üzerine uygulanan T torku; Çıkışlar ise X_1 ve θ_2 olarak verildiğine göre, yazdığınız denklemlerin Laplace dönüşümünü yaparak aşağıdaki transfer fonksiyonlarını elde edin

$$G_{X_1T}(s)=\frac{X_1(s)}{T(s)}$$
$$=\frac{Rk_2}{Jms^4+(Jb+mB)s^3+(Jk_1+Jk_2+Bb+R^2mk_2)s^2+(Bk_1+Bk_2+R^2k_2b)s+R^2k_1k_2}$$

$$G_{\theta_2T}(s)=\frac{\Theta_2(s)}{T(s)}$$
$$=\frac{(k_1+k_2)+bs+ms^2}{Jms^4+(Jb+mB)s^3+(Jk_1+Jk_2+Bb+R^2mk_2)s^2+(Bk_1+Bk_2+R^2k_2b)s+R^2k_1k_2}$$

c) m ve J için yazdığınız denklemlerde, diğer temel denklemleri yerine yazarak elde edeceğiniz iki denklemi kullarak ve çıkışı $X_1(s)$ alarak detaylı blok diyagramını çiziniz.
d) Çizdiğiniz blok diyagramın indirgemesi ile b şıkkında elde ettiğiniz transfer fonksiyonlarını yeniden elde edin.



$$m\ddot{x}_1 = F_{k_2} - F_{k_1} - F_b$$

$$J\ddot{\theta}_2 = -F_{k_2} * R - T_B + T$$

$$F_{k_1} = k_1 * x_1; \;\; F_b = b * \dot{x}_1; F_{k_2} = k_2(x_2 - x_1); T_B = B * \dot{\theta}_2; \theta_2 = \frac{x_2}{R}$$

Denklemlerin Laplace'larını alıp yerlerine yerleştirelim.

$$F_{k_1} = k_1 * X_1(s); \;\; F_b = bsX_1(s); F_{k_2} = k_2\big(X_2(s) - X_1(s)\big); T_B = Bs * \theta_2(s); \theta_2(s) = \frac{X_2(s)}{R}$$

$$ms^2X_1(s) = k_2\big(X_2(s) - X_1(s)\big) - k_1 * X_1(s) - bsX_1(s) \qquad (1)$$

$$Js^2\theta_2(s) = -k_2\big(X_2(s) - X_1(s)\big) * R - Bs * \theta_2(s) + T \qquad (2)$$

Önce birinci (1) denklemi düzenleyelim.

$$[ms^2 + bs + k_1 + k_2]X_1(s) = k_2X_2(s)$$

$$X_1(s) = \frac{k_2}{ms^2 + bs + k_1 + k_2}X_2(s) \; (1')$$

Daha sonra ikinci (2) denklemi düzenleyelim.

$$\theta_2(s) = \frac{T - k_2RX_2(s) + k_2RX_1(s)}{(Js^2 + Bs)}$$

$$\theta_2(s) = \frac{X_2(s)}{R} = \frac{T - k_2RX_2(s) + k_2RX_1(s)}{(Js^2 + Bs)} \; (2')$$

(1') ve (2') denklemleri ile blok diyagramı oluşturacağız. Şimdi (1') denkleminden $X_2(s)'i$ çekip (2') denkleminde yerine yazarak düzenleyelim.

$$\frac{(ms^2 + bs + k_1 + k_2)}{k_2R}X_1(s) = \frac{T}{(Js^2 + Bs)} - \frac{R(ms^2 + bs + k_1 + k_2)}{(Js^2 + Bs)}X_1(s) + \frac{k_2R}{(Js^2 + Bs)}X_1(s)$$

$$\frac{(ms^2 + bs + k_1 + k_2)}{k_2R}X_1(s) = \frac{T}{(Js^2 + Bs)} - \frac{R(ms^2 + bs + k_1)}{(Js^2 + Bs)}X_1(s)$$

$$\left[\frac{(ms^2 + bs + k_1 + k_2)}{k_2R} + \frac{R(ms^2 + bs + k_1)}{(Js^2 + Bs)}\right]X_1(s) = \frac{T}{(Js^2 + Bs)}$$

$$\frac{X_1(s)}{T(s)} = \frac{k_2R}{Jms^4 + (Jb + mB)s^3 + [J(k_1 + k_2) + bB + k_2R^2m]s^2 + [B(k_1 + k_2) + k_2R^2b]s + k_1k_2R^2}$$

Şimdide

$$X_1(s) = \frac{k_2}{ms^2 + bs + k_1 + k_2} X_2(s) = \frac{Rk_2}{ms^2 + bs + k_1 + k_2} \theta_2(s)\ (1'')$$

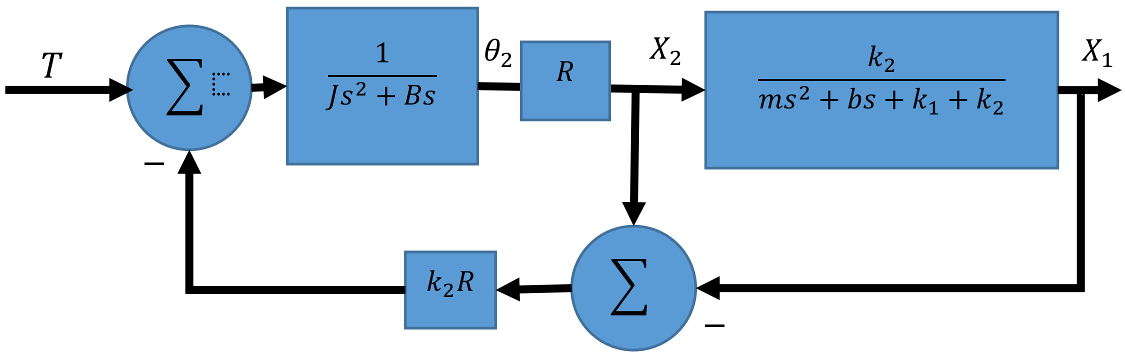
$$R\theta_2(s) = X_2(s)$$

İfadelerini (2’) denkleminde yerine yazalım.

$$\theta_2(s) = \frac{T(s)}{(Js^2 + Bs)} - \frac{k_2R^2\theta_2(s)}{(Js^2 + Bs)} + \frac{k_2R}{(Js^2 + Bs)} * \frac{Rk_2}{ms^2 + bs + k_1 + k_2} \theta_2(s)$$

$$\left[1 + \frac{k_2R^2}{(Js^2 + Bs)} - \frac{k_2^2R^2}{(Js^2 + Bs)(ms^2 + bs + k_1 + k_2)}\right] \theta_2(s) = \frac{T(s)}{(Js^2 + Bs)}$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{(ms^2 + bs + k_1 + k_2)}{Jms^4 + (Jb + mB)s^3 + [J(k_1 + k_2) + bB + k_2R^2m]s^2 + [B(k_1 + k_2) + k_2R^2b]s + k_1k_2R^2}$$



$$X_1(s) = \frac{k_2}{ms^2 + bs + k_1 + k_2} X_2(s)\ (a)$$

Kolaylık açısından (a) denklemini $X_1(s) = AX_2(s)$ olarak gösterelim.

$$\left[-k_2R\big(X_2(s) - X_1(s)\big) + T\right] * \frac{1}{Js^2 + Bs} = \theta_2(s)(b)$$

$$\theta_2(s) * R = X_2(s)(c)$$

Çıkışın $\theta_2(s)$ olarak alındığı durumda (b) eşitliğini

$$[-k_2R(X_2(s)(1 - A)) + T] * \frac{1}{Js^2 + Bs} = \theta_2(s)(b)$$

$$[-k_2R^2(\theta_2(s)(1-A))+T]*\frac{1}{Js^2+Bs}=\theta_2(s)(b')$$

$$T=\theta_2(s)[(Js^2+Bs)+k_2R^2\big((1-A)\big)]$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)}=\frac{(ms^2+bs+k_1+k_2)}{Jms^4+(Jb+mB)s^3+[J(k_1+k_2)+bB+k_2R^2m]s^2+[B(k_1+k_2)+k_2R^2b]s+k_1k_2R^2}$$

Çıkışın $X_1(s)$ olarak alındığı durumda (b) eşitliğini

$$\left[-k_2R\left(\frac{X_1(s)}{A}-X_1(s)\right)+T\right]*\frac{1}{Js^2+Bs}=\frac{X_2(s)}{R}=\frac{X_1(s)}{AR}(b'')$$

$$T=\frac{X_1(s)}{AR}(Js^2+Bs)+\frac{k_2R}{A}(1-A)X_1(s)$$

$$T=\frac{X_1(s)}{AR}(Js^2+Bs)+\frac{k_2R^2}{AR}(1-A)X_1(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{T(s)}=\frac{k_2R}{Jms^4+(Jb+mB)s^3+[J(k_1+k_2)+bB+k_2R^2m]s^2+[B(k_1+k_2)+k_2R^2b]s+k_1k_2R^2}$$