

MAK403 OTOMATİK KONTROL

KISA SINAV 2 ÇÖZÜM

26/12/2019

Dr. Nurdan Bilgin

Son değer teoremi; $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$; İlk değer teoremi; $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

$$G(s) = K \frac{T_0 s + 1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \text{ yada } G(s) = K \frac{\eta \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{y(t)}{y_f} = 1 - a_0 e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi); \xi = \cos \beta \text{ ve } \sqrt{1 - \xi^2} = \sin \beta; a_0 = \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta\xi + 1}}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right); \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$t_p = \frac{\phi + \beta + \frac{\pi}{2}}{\omega_d} \quad \eta \neq 0$ $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \eta = 0$	$\varepsilon_p = a_0 \sin(\beta) \exp \left(-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left(\phi + \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad \eta \neq 0$ $\varepsilon_p = \exp \left(-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \quad \eta = 0$	
$t_s = \frac{1}{\xi \omega_n} \ln \left(\frac{a_0}{\varepsilon_s} \right) \quad \eta \neq 0$ $t_s \cong \begin{cases} \frac{4}{\xi \omega_n} & \varepsilon_s = 0.02 \text{ için} \\ \frac{3}{\xi \omega_n} & \varepsilon_s = 0.05 \text{ için} \end{cases} \quad \eta = 0$	$t_r = \frac{\phi + \frac{\pi}{2}}{\omega_d} \quad \eta \neq 0$ $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad \eta = 0$	Gecikme zamanı, $t_d \frac{y(t)}{y_f} = 0.5$ ilişkisinden bulunabilir.

Soru 1: Aşağıda verilen iki sistem için

$$i.) \frac{700}{(s + 15)(s^2 + 4s + 100)}, \quad ii.) \frac{360}{(s + 4)(s^2 + 2s + 90)}$$

- Sistemlerin ikinci dereceden sisteme yakınsatıp yakınsatılamayacağını belirleyiniz.
- Eğer ikinci dereceden sisteme yakınsatılabiliyorlar ise yakınsak sistemi/sistemleri bulunuz.
- Elde ettiğiniz ikinci derece sistemin/sistemlerin doğal frekansını ve sönüm oranını bulunuz.
- Sönümlü doğal frekans ve β açısını belirleyiniz.
- Sönüm oranına bakarak sistemin davranışı hakkında yorum yapmanız istenirse ne söylersiniz.

Çözüm:

a.) (8 puan)

i.) Denkleminin kökleri $p_1 = -15, p_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2} = -2 \pm 9.79i$

ii.) Denkleminin kökleri $p_1 = -4, p_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 90}}{2} = -1 \pm 9.43i$

İkinci sistemde imajiner eksenden uzak kök, 5 katdan daha uzak olmadığı için ihmal edilemez. İlk sistem yakınsatılabilir.

b.) Birinci denklem yakınsatılabilir. $p_1 = -15$, olan kök ihmal edilir. Yakınsak sistemin kalıcı durum kazancının ilk sistemle aynı olması için yeni kazanç değeri hesaplanır. **(8 puan)**

$$G(0) = \frac{700}{(s + 15)(s^2 + 4s + 100)} = \frac{7}{15}$$

$$G_a(s) = \frac{700/15}{(s^2 + 4s + 100)}$$

c.) Doğal Frekans $\omega_n = 10$; Sönüm Oranı $\xi = \frac{4}{2\omega_n} = \frac{1}{5} = 0.2$; **(8 puan)**

d.) (8 puan) Sönümlü doğal frekans $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 10 * \sqrt{1 - 0.2^2} = 9.7979$

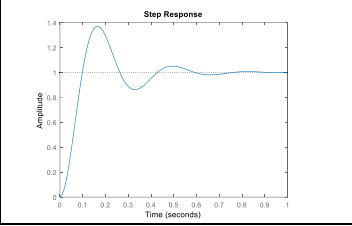
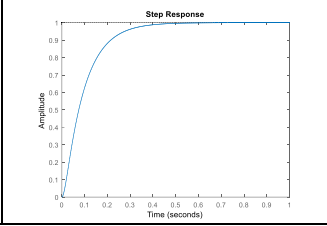
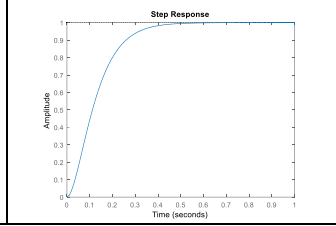
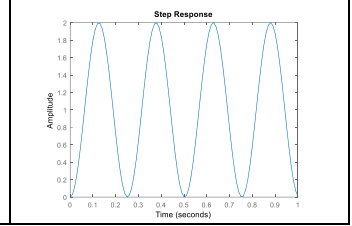
$$\beta = \text{atan} \left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) = \text{atan} \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) = \text{atan} \left(\frac{0.9797}{0.2} \right) = 1.3694 \text{ rad} = 78.5 \text{ der.}$$

e.) Sönüm oranına sistemin aşırı osilasyonlu olduğunu gösterir **(5 puan)**.

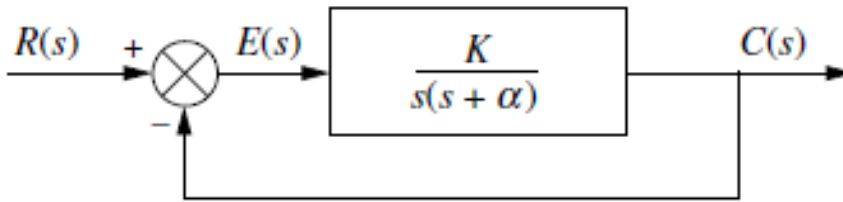
Soru 2: Aşağıdaki sistemlerin adım giriş cevaplarının formunu oluşturunuz. (Tam bir grafik istenmemektedir, sadece cevabın formunu çizerek ve gerekçesini açıklayarak belirtiniz.)

[Gerekçeler, sönüm oranı ve/veya sönüm oranıyla açıklanabilir, her biri için **4 puan**, her bir çizim için **3 puan**]

$$i.) \frac{400}{s^2 + 12s + 400}, ii.) \frac{900}{s^2 + 90s + 900}, iii.) \frac{225}{s^2 + 30s + 225} iv.) \frac{625}{s^2 + 625}$$

$\frac{400}{s^2 + 12s + 400}$	$\frac{900}{s^2 + 90s + 900}$	$\frac{225}{s^2 + 30s + 225}$	$\frac{625}{s^2 + 625}$
$p_{1,2} = -6.0000 \pm 19.0788i$	$p_1 = -78.5410$ $p_2 = -11.4590$	$p_1 = -15$ $p_2 = -15$	$p_{1,2} = \pm 25i$
$\xi = 12/40 < 1$	$\xi = 90/60 > 1$	$\xi = 1$	$\xi = 0$
			

Soru 3: Aşağıda blok diyagramı verilen sistemin yerleşme zamanının (t_s) 0.15 saniye ve maksimum aşmasının %30 olması istenmektedir. Buna göre K ve α değerlerini bulunuz.



$$G(s) = \frac{\frac{K}{s(s + \alpha)}}{1 + \frac{K}{s(s + \alpha)}} = \frac{K}{s^2 + \alpha s + K} \quad (10 \text{ puan})$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} = 0.15 \Rightarrow \xi \omega_n = 26.667 \quad (5 \text{ puan})$$

$$\varepsilon_p = 0.3 = \exp\left(-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \Rightarrow -\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \ln(0.3) = -1.20397 \Rightarrow \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 0.3832$$

$$\frac{\xi}{0.3832} = \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow \xi^2 = 0.128 \Rightarrow \xi = 0.358 \quad (5 \text{ puan}) \text{ ve } \omega_n = \frac{26.667}{0.358} = 74.5 \quad (5 \text{ puan})$$

$$K = \omega_n^2 = 74.5^2 = 5552 \quad (5 \text{ puan}) \text{ ve } \alpha = 53.334 \quad (5 \text{ puan})$$

