MÜHENDİSLİKTE SAYISAL YÖNTEMLER

Sayısal Türev ve İntegral

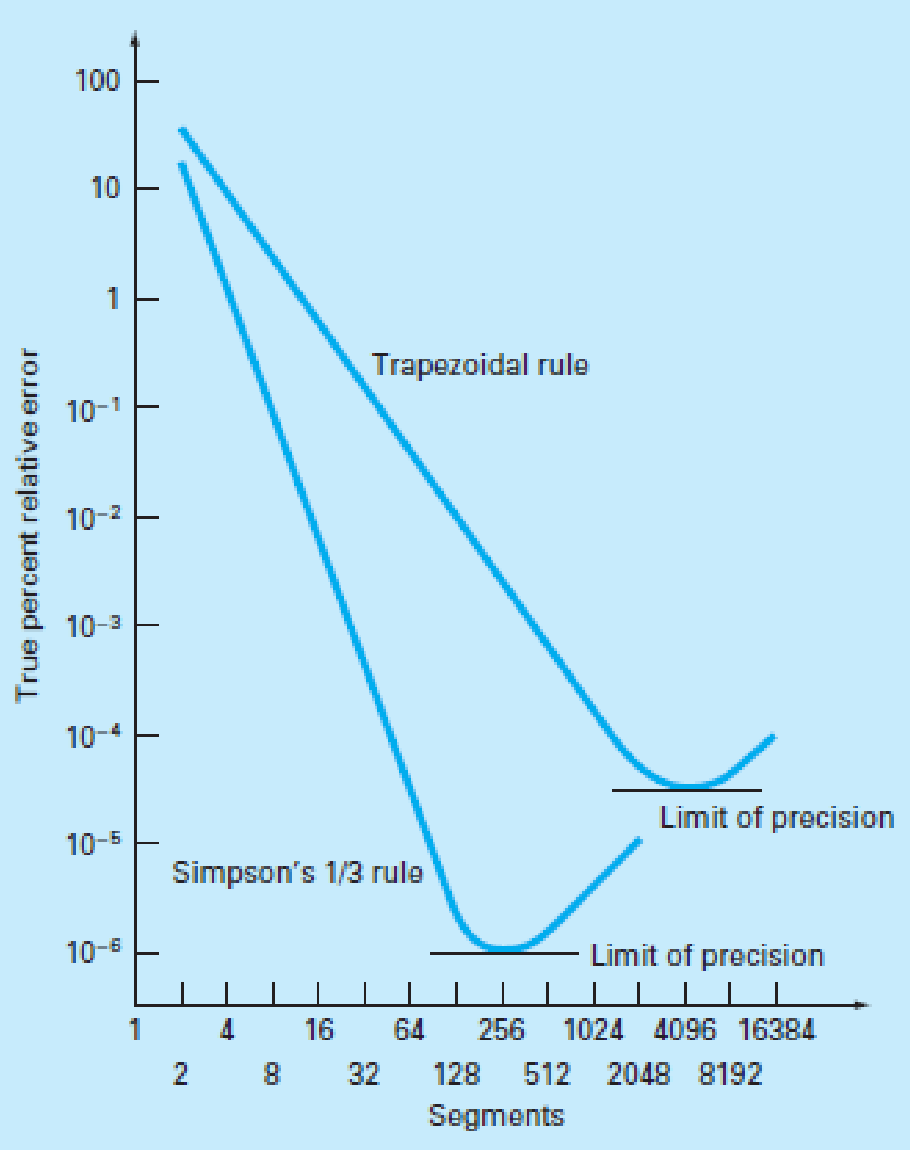
Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Eşitliklerin İntegrali

- İntegre edilecek fonksiyon biliniyor, ancak analitik olarak hesaplanması zor yada imkansız ise sayısal yöntemlere başvurabileceğimizi söylemiştik.
- Geçen derslerimizde Newton-Cotes yöntemlerini tartıştık, bu yöntemlerinde fonksiyon biliniyorsa kullanılabileceğini gösterdik.
- İntegral sonucunu iyileştirmek üzere, aralık sayısını artırmanın belirli bir düzeye kadar iyileştirme sağladığını, adım sayısını çok daha azalttığımızda ise oluşan yuvarlama hataları nedeniyle sonucumuzun artık iyileşmediğini gözlemleyebiliriz.
- Bu durumu ortadan kaldırmak üzere yöntemler geliştirilmiştir.
  - Richardson ekstrapolasyonuna dayanan **Romberg integrali**
  - **Gauss Kareleme yöntemi**

Newton-Cotes Formüllerinin Hassaslık Sınırı

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$'in $a = 0$'dan $b = 0.8$'e kadar integralinin hesaplanması için hem trapez hem de Simpson'ın 1/3 kuralının çoklu uygulanmasında, kullanılan aralık sayısına göre bağıl hatanın mutlak değerinini değişimi. Her iki sonuç da, aralık sayısının büyük değerleri için yuvarlatma hatalarının hassasiyeti sınırladığını göstermektedir.



Romberg Integrali

- Romberg integrali, aralık sayısının artması ile orantılı artan yuvarlatma hataları sorunuyla baş etmek üzere geliştirilmiş bir yöntemdir.
- İki sayısal integral tahminini kullanarak, daha doğru bir üçüncü değer elde etmek için geliştirilmiş yöntemlere genel olarak ***Richardson ekstrapolasyonu*** denilmektedir.

<u>Richardson Ekstrapolasyonu</u>

- Trapez (Yamuk) kuralının çoklu uygulamasında integralin tam değeri, integral tahmini ve oluşan hatanın toplamı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$I = I(h) + E(h)$$

Burada,

- I, integralin kesin değeri
- $I(h)$, trapez kuralının n adet aralık ve $h = (a - b)/n$ aralık genişliği için tahmini sonucu
- $E(h)$ kesme hatasıdır.

Eğer h_1 ve h_2 aralık genişliklerini kullanarak iki farklı tahmin yaparsak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \qquad (*)$$

Hatanın tahmini değer ifadesini, h_1 ve h_2 aralık genişlikleri için ayrı ayrı yazarsak;

Romberg Integrali

Richardson Ekstrapolasyonu

- Trapez kuralının çoklu uygulaması için **tahmini hata**

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} n f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi_i)$$

$$E_a = \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi_i)$$

- Eğer adım genişliğine bakılmaksızın $f''(\xi_i)$ sabit kabul edilirse

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \Rightarrow E(h_1) = E(h_2)\frac{h_1^2}{h_2^2} \quad (**)$$

- (**) eşitliğini (*) eşitliğinde yerine koyarsak

$$I(h_1) + E(h_2)\frac{h_1^2}{h_2^2} = I(h_2) + E(h_2) \Rightarrow E(h_2) = \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

Böylece, iki farklı integral tahminine ve bunların adım büyüklüklerine bağlı olarak yeni bir kesme tahmini geliştirilmiş oldu. Bu değer $I = I(h_2) + E(h_2)$ ifadesinde yerine yazılırsa

Romberg Integrali

Richardson Ekstrapolasyonu

Daha iyi bir interpolasyon tahmini elde edilir:

$$I \cong I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2} \qquad (***)$$

Bu tahminde hata, $O(h^4)$ mertebesindedir.

Aralığın yarıya bölündüğü $h_2 = h_1/2$ özel durumu için (***) denklemi;

$$I \cong I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (2)^2} = I(h_2) - \frac{1}{3}\big(I(h_1) - I(h_2)\big)$$

olur, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1) \qquad (4*)$$

elde edilir.

Romberg Integrali

Richardson Ekstrapolasyonu

$$h_2 = h_1/4 \Longrightarrow I \cong \frac{16}{15} I(h_2) - \frac{1}{15} I(h_1)$$

$$h_2 = h_1/8 \Longrightarrow I \cong \frac{64}{63} I(h_2) - \frac{1}{63} I(h_1)$$

Örnek: $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$'in $a = 0$'dan $b = 0.8$'e kadar integralinin hesaplanması için trapez kuralının tekli ve çoklu uygulaması ile aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. İntegral tahminini iyileştirmek için (4*) denklemini kullanınız.

Aralıklar	h	İntegral	$\%\varepsilon_{tr}$
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1) = \frac{4}{3} 1.0688 - \frac{1}{3} 0.1728 = 1.367467 \qquad \%\boldsymbol{\varepsilon_{tr}} = \mathbf{16.6}$$

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1) = \frac{4}{3} 1.4848 - \frac{1}{3} 1.0688 = 1.623467 \qquad \%\boldsymbol{\varepsilon_{tr}} = \mathbf{1}$$

Romberg Integrali Algoritması

- Uygulaması gösterilen formülü, bilgisayarda kodlamaya uygun daha genel bir forma dönüştürebiliriz.

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

Burada, $I_{j+1,k-1}$ ve $I_{j,k-1}$, sırasıyla daha doğru ve daha az doğru integralleri; $I_{j,k}$ ise iyileştirilmiş integral tahminini göstermektedir.

$$|\boldsymbol{\varepsilon_a}| = \left|\frac{I_{j,k} - I_{j,k-1}}{I_{j,k}}\right| 100, \qquad (\%)$$

Örnek

- $\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$ integralini 4 düzey Romberg integrasyonu kullanarak bulunuz. Analitik olarak çözüm yapıldığında cevabın 2 olacağını hatırlayın.
- Önce, trapez kuralının tekli ve çoklu uygulamalarını kullanarak integralleri hesaplayalım.

$h_1 = \pi \rightarrow\rightarrow I_{1,1} = \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$
$h_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow\rightarrow I_{2,1} = \frac{\pi}{2 \cdot 2}\left(\sin 0 + 2\left(\sin {}^{\pi}/_{2}\right) + \sin \pi\right) = 1.570796$
$h_3 = \frac{\pi}{4} \rightarrow\rightarrow I_{3,1} = \frac{\pi}{2 \cdot 4}\left(\sin 0 + 2\left(\sin {}^{\pi}/_{4} + \sin {}^{\pi}/_{2} + \sin {}^{3\pi}/_{4}\right) + \sin \pi\right) = 1.896119$
$h_4 = \frac{\pi}{8} \rightarrow\rightarrow I_{4,1} = 1.974232$

Örnek Devam

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

$$I_{1,2} = \frac{4^{2-1} I_{1+1,2-1} - I_{1,2-1}}{4^{2-1} - 1} = \frac{4I_{2,1} - I_{1,1}}{4 - 1} = \frac{4I_{2,1} - I_{1,1}}{3} = \frac{4 * 1.570796 \ - 0}{3}$$

k=1	k=2	k=3	k=4
$I_{1,1} = 0$	$I_{1,2} = 2.094395$	$I_{1,3} = 1.998571$	$I_{1,4} = 2.000006$
$I_{2,1} = 1.570796$	$I_{2,2} = 2.004560$	$I_{2,3} = 1.999984$	
$I_{3,1} = 1.896119$	$I_{3,2} = 2.000270$		
$I_{4,1} = 1.974232$			

Örnek Devam

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.000006 - 1.999984}{2.000006}\right| * 100 = 1.1 \times 10^{-3}\%$$

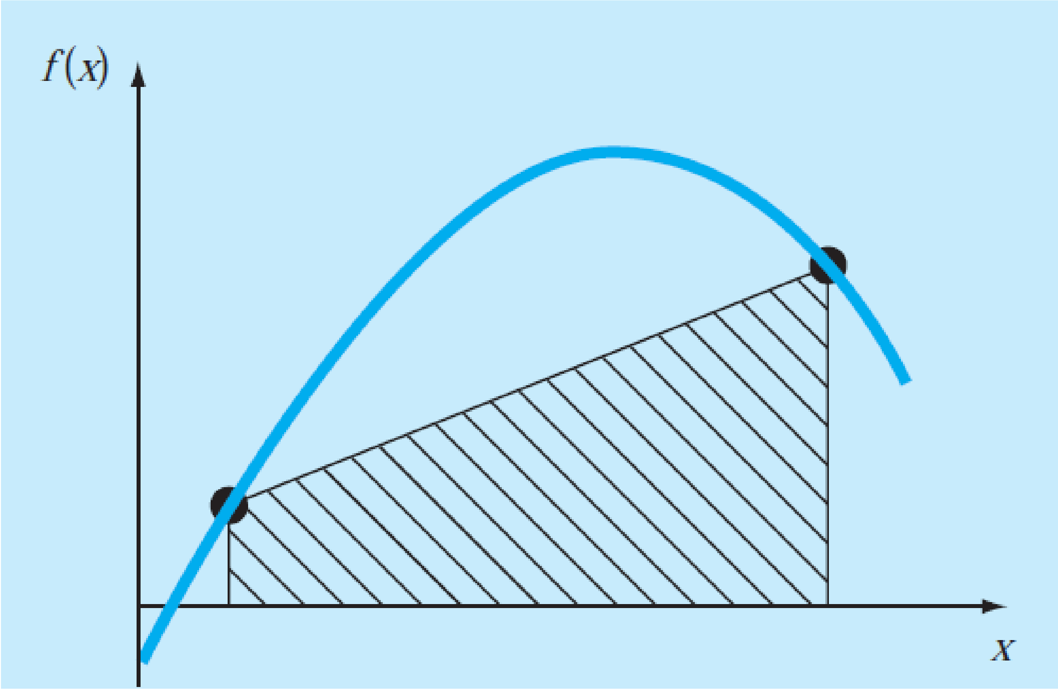
$$|\varepsilon_t| = 6 \times 10^{-6}$$

Bu sonuçlara erişmek için, trapez kuralını uygulasa idik n=524 aralığa ihtiyaç duyacaktık. Romberg integrali ile fonksiyonu sadece 9 kere değerlendirdik ve bir dizi aritmetik işlemle istediğimiz sonuca ulaştık.

Gauss Kareleme

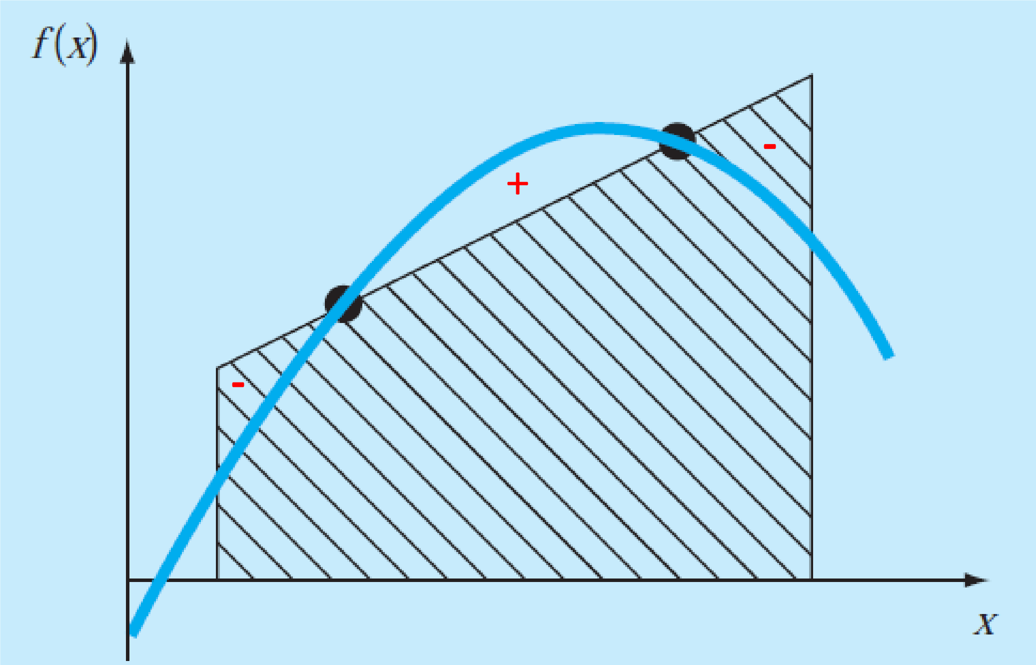
- Daha önce öğrendiğimiz Newton-Cotes formüllerinin özelliği, eşit aralıklı verilere dayanmasıdır.
- Trapez kuralı, integral aralığının uçlarındaki fonksiyon değerini birleştiren düz doğrunun altında kalan alanın hesaplanması ilkesine dayanmaktadır.
- Bu alanı hesaplamak için, aşağıdaki formül kullanılmakta idi.

$$I \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$



Gauss Kareleme

- Şimdi sabit nokta kuralını kaldıralım. Şekildeki gibi eğri üzerinde herhangi iki noktayı birleştiren düz doğrunun altında kalan alanı hesaplayalım.
- Eğer bu noktaların yerini akıllıca seçersek, pozitif ve negatif alanları dengeleyen düz bir doğru belirleyebiliriz.
- Böylece daha iyi bir integral tahmini yapabiliriz.



Gauss Kareleme: Bu stratejiyi kullanan yöntemlere verilen genel isimdir. Biz bu derste **Gauss-Legendre** formülleri diye anılan yöntemi tartışacağız.

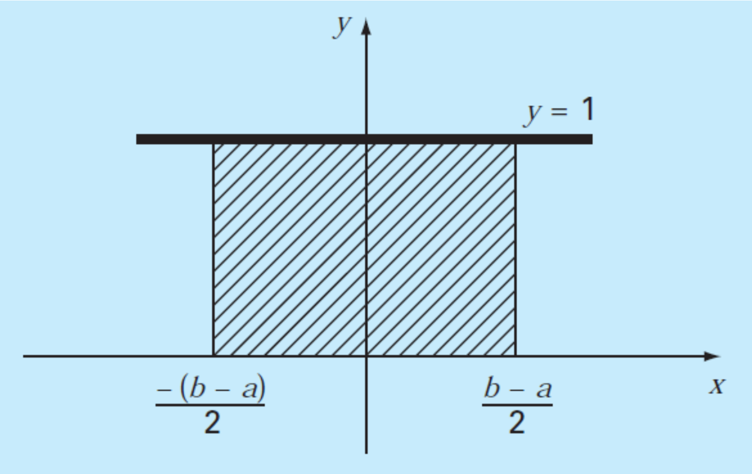
Gauss Legendre Formülleri

- Gauss-Legendre formülleri aşağıdaki fonksiyonun katsayılarını bulma stratejisi üzerine kuruludur.

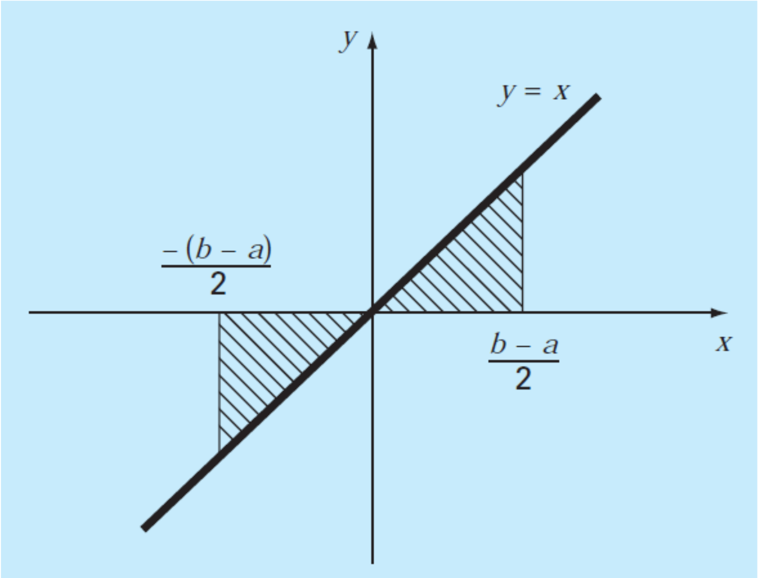
$$I = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

- Trapez kuralını hatırlarsak;

$$I \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{(b-a)}{2}f(a) + \frac{(b-a)}{2}f(b)$$



(a)



(b)

Her iki integralde, trapez kuralı ile tam olarak hesaplanabilmektedir;
a.)'da y=1 fonksiyonunun yani bir sabitin integralini,
b.)'de ise y=x fonksiyonunun integralini görmekteyiz.

Gauss Legendre Formülleri

- Gauss-Legendre formülleri aşağıdaki fonksiyonun katsayılarını bulma stratejisi üzerine kuruludur.

$$I = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

- Ancak, trapez kuralının tersine burada c_0, c_1 bilinmeyen katsayılardır. Ek olarak x_0 ve x_1'de bilinmemektedir. Dört bilinmeyen olduğuna göre çözüm için dört denkleme ihtiyacımız var.
- Trapez kuralı ile örneklediğimiz gibi yukarıdaki formülü hem sabit hem de doğrusal bir integralin çözümünde kullanabiliyorduk; şimdi ise dört denklem yazmak için bu integral sayısını artıracağız. Aynı formülü sabit, doğrusal, parabolik ve kübik integral hesabı için yazacağız.

Gauss Legendre Formülleri

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1dx \rightarrow sabit'in\ int.@[-1,1]$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} xdx \rightarrow y = x'in\ int.@[-1,1]$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2dx \rightarrow y = x^2{}'nin\ int.@[-1,1]$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3dx \rightarrow y = x^3{}'\text{ün}\ int.@[-1,1]$$

Gauss Legendre Formülleri

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = c_0 1 + c_1 1 = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = c_0 x_0 + c_1 x_1 = \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

$$c_0 1 + c_1 1 = 2$$
$$c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0$$
$$c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \frac{2}{3}$$
$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = 0$$

- Problemimiz bu dört denklemin çözülüp, bilinmeyen c_0, c_1, x_0 ve x_1 değerlerinin bulunması haline dönüştü;
- Bu denklemlerin çözümü; $c_0 = c_1 = 1, x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ sonucunu vermektedir.
- İlginç bir sonuca ulaşmış olduk; $I \cong f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Gauss-Legendre Formülleri

- Her zaman karşılaşılacak integraller [-1,1] aralığında olmayacağına göre [a,b] gibi herhangi bir aralık verildiğinde ne yapmalıyız;
- Bir dönüşüm uygulamalıyız;

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2} x_d$$

- Dikkat ederseniz burada x_d yerine -1 yazdığımızda alt limit a'yı; 1 yazdığımızda üst limit b'yi elde ederiz.
- Yukarıdaki ifadenin türevi alındığında

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dx_d$$

- Herhangi bir aralıkta integrali alınacak herhangi bir integral ifadesinde yukarıdaki dönüşüm yapılarak; gauss legendre formülleri kullanılabilir.

Gauss-Legendre Örnek Problem

Örnek: $f(x) = x^2e^{-x}$ fonksiyonunun integralini 1'den 2'ye kadar gauss-legendre formüllerini uygulayarak bulunuz. Not: integralin gerçek değerinin 0.486 olduğunu hatırlayın.

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}x_d = \frac{(2+1)}{2} + \frac{(2-1)}{2}x_d = 1.5 + 0.5x_d$$

$$dx = 0.5dx_d$$

Dönüşüm için önce fonksiyonda x ve dx ifadelerinin yerine bulduğumuz dönüşüm ifadelerini yazacağız.

$$I = \int_1^2 x^2e^{-x}dx = \int_{-1}^{1}(1.5+0.5x_d)^2e^{-(1.5+0.5x_d)}0.5dx_d$$

$$f(x_d) = (1.5+0.5x_d)^2e^{-(1.5+0.5x_d)}0.5$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.218484 \text{ ve} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.267437$$

$$I \cong 0.218484 + 0.267437 = 0.485921$$

Çok Noktalı Gauss-Legendre

- Yukarıda gösterilen belirsiz katsayıları bulma yöntemi ile benzer şekilde çok noktalı formüllerde üretilebilir.

$$I = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots + c_{n-1} f(x_{n-1})$$

- Burada n nokta sayısıdır.

Points	Weighting Factors	Function Arguments	Truncation Error
2	$c_0 = 1.0000000$	$x_0 = -0.577350269$	$\cong f^{(4)}(\xi)$
	$c_1 = 1.0000000$	$x_1 = 0.577350269$	
3	$c_0 = 0.5555556$	$x_0 = -0.774596669$	$\cong f^{(6)}(\xi)$
	$c_1 = 0.8888889$	$x_1 = 0.0$	
	$c_2 = 0.5555556$	$x_2 = 0.774596669$	
4	$c_0 = 0.3478548$	$x_0 = -0.861136312$	$\cong f^{(8)}(\xi)$
	$c_1 = 0.6521452$	$x_1 = -0.339981044$	
	$c_2 = 0.6521452$	$x_2 = 0.339981044$	
	$c_3 = 0.3478548$	$x_3 = 0.861136312$	
5	$c_0 = 0.2369269$	$x_0 = -0.906179846$	$\cong f^{(10)}(\xi)$
	$c_1 = 0.4786287$	$x_1 = -0.538469310$	
	$c_2 = 0.5688889$	$x_2 = 0.0$	
	$c_3 = 0.4786287$	$x_3 = 0.538469310$	
	$c_4 = 0.2369269$	$x_4 = 0.906179846$	
6	$c_0 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$	$\cong f^{(12)}(\xi)$
	$c_1 = 0.3607616$	$x_1 = -0.661209386$	
	$c_2 = 0.4679139$	$x_2 = -0.238619186$	
	$c_3 = 0.4679139$	$x_3 = 0.238619186$	
	$c_4 = 0.3607616$	$x_4 = 0.661209386$	
	$c_5 = 0.1713245$	$x_5 = 0.932469514$	

Çok Noktalı Gauss-Legendre için Örnek Problem

Örnek: $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ fonksiyonunun integralini 0'den 0.8'e kadar 3 noktalı gauss-legendre formüllerini uygulayarak bulunuz. Not: integralin gerçek değeri 1.640533 olduğunu hatırlayın.

Çözüm: önce dönüşüm yapılır;

$$x = 0.4 + 0.4x_d;\ dx = 0.4dx_d$$

$$I = \int_0^{0.8} 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5)0.4dx_d$$

Katsayılar	x değerleri	Dönüştürülmüş x x=0,4+0,4*x$_d$	f(x)= (0,2+25x–200x^2+675x^3–900x^4+400x^5)*0,4	Katsayı*Fonk
0,5555556	-0,774596669	0,090161332	0,506342322	0,281301312
0,8888886	0	0,4	0,9824	0,873244161
0,5555556	0,774596669	0,709838668	0,874777679	0,485987638
			Toplam	**1,640533111**

Çok Noktalı Gauss-Legendre için Örnek Problem 2

Örnek: $f(x) = xe^x$ fonksiyonunun integralini 0'dan 3'e kadar 2, 3 ve 4 noktalı gauss-legendre formüllerini uygulayarak bulunuz. Not: integralin gerçek değerinin 41.17107385 olduğunu hatırlayın.

Unutmayalım Önce Dönüşüm:

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}x_d = \frac{(3+0)}{2} + \frac{(3-0)}{2}x_d = 1.5 + 1.5x_d$$

$$dx = 1.5dx_d$$

$$I = \int_0^3 xe^x dx = \int_{-1}^1 (1.5 + 1.5x_d)e^{(1.5+1.5x_d)}1.5dx_d$$

$$f(x_d) = (1.5 + 1.5x_d)e^{(1.5+1.5x_d)}1.5$$

Çok Noktalı Gauss-Legendre için Örnek Problem 2

2 Noktalı Gauss-Legendre

Katsayılar	x değerleri	Dönüştürülmüş x $x=1,5+1,5*x_d$	$f(x)=(x*e^x)*1,5$	Katsayı*Fonk
1	-0,577350269	0,633974596	1,79264702	1,79264702
1	0,577350269	2,366025404	37,81485498	37,81485498
			Toplam	**39,607502**

3 Noktalı Gauss-Legendre

Katsayılar	x değerleri	Dönüştürülmüş x $x=1,5+1,5*x_d$	$f(x)=(x*e^x)*1,5$	Katsayı*Fonk
0,5555556	-0,774596669	0,338104997	0,711180733	0,395100439
0,8888886	0	1,5	10,08380041	8,963375228
0,5555556	0,774596669	2,661895004	57,1911055	31,77283893
			Toplam	**41,1313146**

4 Noktalı Gauss-Legendre

Katsayılar	x değerleri	Dönüştürülmüş x $x=1,5+1,5*x_d$	$f(x)=(x*e^x)*1,5$	Katsayı*Fonk
0,3478548	-0,861136312	0,208295532	0,384798007	0,133853834
0,6521452	-0,339981044	0,990028434	3,996711616	2,606436296
0,6521452	0,339981044	2,009971566	22,50094368	14,67388242
0,3478548	0,861136312	2,791704468	68,29399937	23,75639549
			Toplam	**41,17056804**

Sayısal Diferansiyel

- Dönemin başından beri sayısal türev almayı kullanarak ilerliyoruz. Hatırlarsanız ilk dersimizde, Taylor serileri aracılığıyla, yaklaşık türev ifadesi geliştirmiştik, şöyleki;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots \qquad (*)$$

Dersimizin en başından beri, 2 derece ve daha yüksek terimleri atarak

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathrm{O(h)}$$

İfadesini O(h) düzeyinde hata içermesine rağmen türev işlevi olarak kullanmaktayız. Bu gün ki dersimizin konusu daha az hata içeren türev ifadeleri geliştirmek mümkün mü sorusuna cevap aramak. (*) ifadesini aşağıdaki gibi düzenleyelim

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2!}h + \mathrm{O}(h^2) \qquad (**)$$

Eğer burada (**) denkleminde $f''(x_i)$ terimi yerine uygun bir ifade yazabilirsek hata mertebemizin $\mathrm{O}(h^2)$'ye ineceğini görebiliyoruz.

Sayısal Diferansiyel

- $f''(x_i)$'yi elde etmek üzere, $f'(x_i)$ türevini alsak;

$$f''(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{h}$$

$$f''(x_i) = \frac{\frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h} - \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}\right)}{h}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \quad (***)$$

(***) denklemini, (**) denkleminde yerine yazar ve ardından düzenlersek

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2} h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

Olur. Dikkat edilirse, ikinci türevin eklenmesi hata mertebesini $O(h^2)$ 'ye indirgemiştir.

İleriye doğru Sonlu Bölünmüş Fark Formülleri

Birinci Türev — **Hata Mertebesi**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} \qquad O(h^2)$$

İkinci Türev — **Hata Mertebesi**

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \qquad O(h)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2} \qquad O(h^2)$$

Geriye doğru Sonlu Bölünmüş Fark Formülleri

Birinci Türev | **Hata Mertebesi**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \qquad O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} \qquad O(h^2)$$

İkinci Türev | **Hata Mertebesi**

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} \qquad O(h)$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2} \qquad O(h^2)$$

Merkezi Sonlu Bölünmüş Fark Formülleri

Birinci Türev **Hata Mertebesi**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \qquad O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h} \qquad O(h^4)$$

İkinci Türev **Hata Mertebesi**

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \qquad O(h^2)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2} \qquad O(h^4)$$

Örnek:

Örnek: $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ fonksiyonunun $x = 0.5$'teki türevini, $h = 0.25$ alarak ileri, geri ve merkezi sonlu farklar için yüksek doğruluktaki türev ifadelerini kullanarak bulunuz. Ardından aynı ifadeleri basit formüllerle bulup karşılaştırınız.

Çözüm;

i	x_i	$f(x)=-0,1*x^4-0,15*x^3-0,5*x^2-0,25x+1.2$	İleri Fark $f'(x)=(-f(x_2)+4*f(x_1)-3*f(x_0))/2*h$	Geri Fark $f'(x)=(3*f(x_0)-4*f(x_{-1})+f(x_{-2}))/2*h$	Merkezi Fark $f'(x)=(-f(x_2)+8*f(x_1)-8*f(x_{-1})+f(x_{-2}))/12*h$
-2	0	1,2			
-1	0,25	1,103515625			
0	0,5	0,925	-0,859375	-0,878125	-0,9125
1	0,75	0,636328125			
2	1	0,2			
			Basit İfadelerle		
			İleri Fark $f'(x)=(f(x_1)-f(x_0))/h$	Geri Fark $f'(x)=(f(x_0)-f(x_{-1}))/h$	Merkezi Fark $f'(x)=(f(x_1)-f(x_{-1}))/2*h$
			-1,1546875	-0,7140625	-0,934375

Analitik olarak çözersek; $f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25 \Longrightarrow f'^{(0.5)} = -0.9125$

Türev Hesabını Richardson Extrapolasyonu ile İyileştirmek

- Geçen dersimizde, iki sayısal integral tahminini kullanarak, daha doğru bir üçüncü değer elde etmek için geliştirilmiş ve Richardson ekstrapolasyonu denilen bir yöntem öğrenmiştik. Bu yönteme göre $h_2 = h_1/2$ durumunda aşağıdaki integral tahmininin $I(h_2)\ ve\ I(h_1)$'e göre çok daha iyi sonuç doğurduğunu görmüştük;

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

- Benzer şekilde

$$D \cong \frac{4}{3} D(h_2) - \frac{1}{3} D(h_1)$$

İfadesi ile de türevi iyileştirebiliriz.

Örnek:

Örnek: $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ fonksiyonunun $x = 0.5$'teki türevini, $h = 0.5$ ve $h = 0.25$ alarak basit merkezi sonlu farklar ifadesi ile bulunuz. Ardından bu türevleri kullanarak richardson extrapolasyonu yöntemi ile daha iyi bir sonuç elde ediniz.

i	x_i	f(x)=-0,1*x^4-0,15*x^3-0,5*x^2-0,25x+1.2	Merkezi Fark f'(x)=(f(x_1)-f(x_-1))/2*h
-1	0	1,2	
0	0,5	0,925	-1
1	1	0,2	

i	x_i	f(x)=-0,1*x^4-0,15*x^3-0,5*x^2-0,25x+1.2	Merkezi Fark f'(x)=(f(x_1)-f(x_-1))/2*h
-1	0,25	1,103515625	
0	0,5	0,925	-0,934375
1	0,75	0,636328125	

$$D \cong \frac{4}{3}D(h_2) - \frac{1}{3}D(h_1)$$

$$D \cong \frac{4}{3}(-0.934375) - \frac{1}{3}(-1) = -0.9125$$

Türev ve İntegral Hesabında Matlab Kullanılması

- Türev
  - Önce sembolik ifadeyi yaratmak gerekir.
    - syms x
  - Sonra ifadeyi girmelisiniz; Örneğin $f(x) = e^x \cos x$ ifadesinin türevini almak isteyelim.
    - f = exp(x)*cos(x);
  - Şimdi matlab'in «diff» komutunu kullanarak türevi alabiliriz.
    - df = diff(f)
  - Verilen bir sayısal değer için örneğin x=2 için türevin değerini hesaplamak istersek; elde edilen türev ifadesinde x=2'yi «subs» komutu kullanarak yerine koymamız ve sonucu «vpa» komutu kullanarak numerik değere dönüştürmemiz gerekir.
    - vpa(subs(df,x,2),4)
  - Bir ifadenin ikinci türevini bulmak isterseniz de
    - ddf = diff(diff(f))

Türev ve İntegral Hesabında Matlab Kullanılması

- İntegral
  - integralde de türeve benzer olarak sembolik ifadelerden yararlanabilirsiniz.
    - int(df); orijinal f fonksiyonunu bize verecektir
  - Tanımlı integrallerde ise önce integrali alınacak fonksiyonu oluşturmamız gerekmektedir. Örneğin $f(x) = e^{-x^2}(\ln x)^2$ fonksiyonunun integralini x=0'dan x=1'e kadar hesaplayalım.
    - fun = @(x) exp(-x.^2).*log(x).^2;
  - Şimdide integrali|x=0| dan |x=1|'e kadar değerlendirelim.
    - I = integral(fun,0,1)

Son 3 Dersin Konuları İle ilgili Örnek Problemler

- Newton-Cotes Formülleri (Sayısal İntegral)
  - Trapez Kuralı
  - Simpson'ın 1/3 Kuralı
  - Simpson'ın 3/8 Kuralı
- Tahmini İntegral Sonuçlarının İyileştirilmesi
  - Romberg İntegrali
  - Gauss Kareleme (Gauss-Legendre)
- Yüksek Doğruluklu Türev Uygulamaları

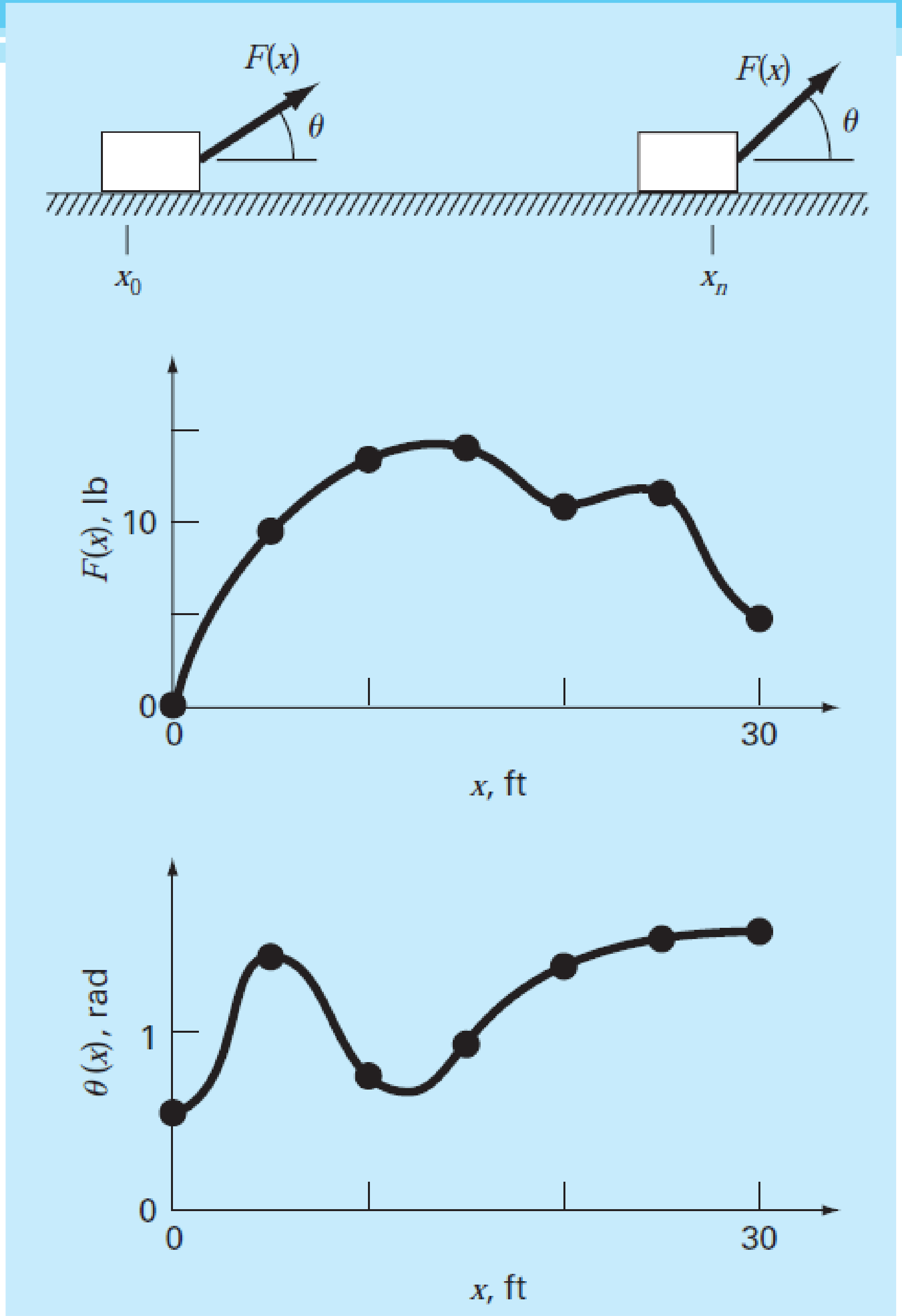
Örnek 1:

Şekilde gösterilen blok x_0'dan x_n'e gidene kadar hem üzerine etkiyen kuvvet hem de kuvvetin doğrultusunu gösteren θ açısı değişmektedir. $F(x)$ ve $\theta(x)$ sürekli değişmesine rağmen, ölçüm sistemi sadece $x = 5\ ft$ aralıklarla ölçüm yapabilecek şekilde düzenlenmiştir. Elde edilen deneysel veriler aşağıda tabloda verilmektedir. Blok üzerine, blok x_0'dan x_n'e gidene kadar yapılan iş bulunmak istenmektedir. İş formülü aşağıdaki gibidir.

$$W = \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cos\theta(x)\, dx$$

Yapılan işi bulmak için, Trapez ve Simpson'ın 1/3 ve 3/8 kurallarının tekli ve çoklu uygulamalarını kullanınız.

x, ft	F(x), lb	θ, rad	F(x) cos θ
0	0.0	0.50	0.0000
5	9.0	1.40	1.5297
10	13.0	0.75	9.5120
15	14.0	0.90	8.7025
20	10.5	1.30	2.8087
25	12.0	1.48	1.0881
30	5.0	1.50	0.3537



Çözüm:

Aralık Sayısı	Trapez Kuralı	Simpson 1/3	Simpson 3/8
1	5,3055	0	0
2	133,19025	175,8185	0
3	124,9755	0	139,9343
6	119,08925	117,1271667	117,326625

Trapez Kuralı

		1.Ara	2.Ara	3.Ara	6.Ara
0	0				
5	1,5				
10	9,5				
15	8,7				
20	2,8				
25	1,1				
30	0,4				

Simpson’ın 1/3 kuralı

		2.Ara			6.Ara
0	0		0	0	
5	1,5		5	1,53	
10	9,5		10	9,51	
15	8,7		15	8,7	
20	2,8		20	2,81	
25	1,1		25	1,09	
30	0,4		30	0,35	

Simpson’ın 3/8 kuralı

		3.Ara			6.Ara
0	0		0	0	
5	1,5		5	1,53	
10	9,5		10	9,51	
15	8,7		15	8,7	
20	2,8		20	2,81	
25	1,1		25	1,09	
30	0,4		30	0,35	

Çözüm

Trapez Kuralı

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Average height}}$$

Simpson'ın 1/3 kuralı

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Average height}}$$

Simpson'ın 3/8 kuralı

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Average height}}$$

```
clear all
x=[0 5 10 15 20 25 30];
y=[0 1.5297 9.5120 8.7025 2.8087 1.0881 0.3537];k=1;q2=0;
for i=[1 2 3 6]
  if i==1
    h=(x(7)-x(1))/i;
    q=h*(y(end)+y(1))/2;q1=0;
  elseif i==2
   h=(x(7)-x(1))/i;
   y2=[0  8.7025  0.3537];
   q=h*(y2(end)+2*y2(2)+y2(1))/2;
   q1=h*(y2(end)+4*y2(2)+y2(1))/3;
   elseif i==3
   h=(x(7)-x(1))/i;
   y3=[0 9.5120  2.8087  0.3537];
   sum=0;sum1=0;sum2=0;
   for j=2:i
       sum=sum+y3(j);
   end
    for j=2:2:6
       sum1=sum1+y(j);
    end
      for j=3:2:5
       sum2=sum2+y(j);
   end
   q=h*(y3(end)+2*sum+y3(1))/2;
   q1=h*(y3(end)+4*sum1+2*sum2+y3(1))/6;
   q2=30*(y3(1)+3*y3(2)+3*y3(3)+y3(4))/8;
   elseif i==6
   h=(x(7)-x(1))/i;
   y6=[0 1.5297 9.5120 8.7025 2.8087 1.0881 0.3537];
   sum=0;
   for j=2:i
       sum=sum+y6(j);
   end
   q=h*(y3(end)+2*sum+y3(1))/2;q1=0;

q2=(3/8)*5*(y(1)+3*y(2)+3*y(3)+y(4))+(3/8)*5*(y(4)+3*y(5)+3*y(6)+y(7)
);
  end
  Q(k,1:4)=[i q q1 q2];
  k=k+1;
end
```

Örnek 2:

Problem: Bir önceki problemde kuvvetin $F(x) = 1.5\mathrm{x} - 0.04x^2$ fonksiyonu ile ve uygulama açısının da $\theta(x) = 0.8 + 0.125x - 0.009x^2 + (2 \times 10^{-4})x^3$ fonksiyonu ile değiştiği bilindiğine göre 0'dan 30 ft'e kadar olan yer değiştirme sırasında yapılan işi hesaplayınız.

a.) İntegrali hesaplamak için 4, 8 ve 16 aralıklı trapez kuralını uygulayın.

b.) Aynı integrali Simpson'ın 1/3 kuralını 16 aralıklı olarak kullanarak hesaplayın.

c.) a şıkkında bulduğunuz değerleri kullanarak Romberg integralini uygulayın yaklaşık hata %0.5 olduğunda durun.

d.) a şıkkındaki değerleri kullanarak gauss kareleme uygulayın.

Çözüm:

- Trapez Kuralı Uygulaması

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Average height}}$$

b=30, a=0 n=4,8,16

					Trapez Kuralı		
i	x	f(X)	Q(x)	f(x)*cos(Q(x))	n=4	n=8	n=16
0	0	0	0,8	0	0	0	0
1	1,875	2,671875	1,004052734	1,434496609			1,4345
2	3,75	5,0625	1,152734375	2,05532477		2,05532	2,05532
3	5,625	7,171875	1,253955078	2,234516692			2,23452
4	7,5	9	1,315625	2,271700724	2,2717	2,2717	2,2717
5	9,375	10,54688	1,345654297	2,354535103			2,35454
6	11,25	11,8125	1,351953125	2,564500376		2,5645	2,5645
7	13,125	12,79688	1,342431641	2,897020154			2,89702
8	15	13,5	1,325	3,284938721	3,28494	3,28494	3,28494
9	16,875	13,92188	1,307568359	3,622453533			3,62245
10	18,75	14,0625	1,298046875	3,788160002		3,78816	3,78816
11	20,625	13,92188	1,304345703	3,66575468			3,66575
12	22,5	13,5	1,334375	3,162037642	3,16204	3,16204	3,16204
13	24,375	12,79688	1,396044922	2,224907353			2,22491
14	26,25	11,8125	1,497265625	0,867798924		0,8678	0,8678
15	28,125	10,54688	1,645947266	-0,791861705			-0,7919
16	30	9	1,85	-2,480312221	-2,4803	-2,4803	-2,4803
				Sonuç	56,0889	62,8286	64,4927

Çözüm Devam

- Simpson Kuralı

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Average height}}$$

b=30, a=0 n=16

i	x	f(X)	Q(x)	f(x)*cos(Q(x))	Simpson'ın 1/3 Kuralı n=16
0	0	0	0,8	0	0
1	1,875	2,671875	1,004052734	1,434496609	1,434496609
2	3,75	5,0625	1,152734375	2,05532477	2,05532477
3	5,625	7,171875	1,253955078	2,234516692	2,234516692
4	7,5	9	1,315625	2,271700724	2,271700724
5	9,375	10,54688	1,345654297	2,354535103	2,354535103
6	11,25	11,8125	1,351953125	2,564500376	2,564500376
7	13,125	12,79688	1,342431641	2,897020154	2,897020154
8	15	13,5	1,325	3,284938721	3,284938721
9	16,875	13,92188	1,307568359	3,622453533	3,622453533
10	18,75	14,0625	1,298046875	3,788160002	3,788160002
11	20,625	13,92188	1,304345703	3,66575468	3,66575468
12	22,5	13,5	1,334375	3,162037642	3,162037642
13	24,375	12,79688	1,396044922	2,224907353	2,224907353
14	26,25	11,8125	1,497265625	0,867798924	0,867798924
15	28,125	10,54688	1,645947266	-0,791861705	-0,791861705
16	30	9	1,85	-2,480312221	-2,480312221
				Sonuç	65,04743736

Çözüm Devam

- Romberg İntegrali

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

	k=1	k=2	k=3
n=4	56,089	65,07522	65,04558
n=8	62,829	65,04744	
n=16	64,493		
Hata %		0,85276	0,002848

Çözüm Devam

- Gauss-Legendre

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}x_d = \frac{(30+0)}{2} + \frac{(30-0)}{2}x_d = 15 + 15x_d$$

$$dx = 15dx_d$$

Nokta	c'ler	x	Dönüştürülmüş x	f(X)	Q(x)	f(xd)*cos(Q(xd))dxd	Çarpım c*f(x)
2 Noktalı	1	-0,57735	6,339745962	7,901924	1,28169873	33,79108203	33,79108203
	1	0,57735	23,66025404	13,09808	1,36830127	39,51310367	39,51310367
						Sonuç	73,3041857
3 Noktalı	0,5555556	-0,7746	3,381049965	4,614315	1,12747785	29,68893032	16,4938515
	0,8888886	0	15	13,5	1,325	49,27408081	43,79916871
	0,5555556	0,7746	26,61895004	11,58569	1,52252215	8,386082995	4,65893537
						Sonuç	64,95195558
4 Noktalı	0,3478548	-0,86114	2,08295532	2,950885	1,023128554	23,04777683	8,017279801
	0,6521452	-0,33998	9,90028434	10,9298	1,349471394	35,99004813	23,47073714
	0,6521452	0,33998	20,09971566	13,98963	1,300528606	56,02625678	36,53725443
	0,3478548	0,86114	27,91704468	10,70111	1,626871446	-8,996275275	-3,129397537
						Sonuç	64,89587384
5 Noktalı	0,24	-0,90618	1,40730231	2,031733	0,958645723	17,51239071	4,149156443
	0,48	-0,53847	6,92296035	8,467345	1,300383494	33,9281392	16,23898116
	0,57	0	15	13,5	1,325	49,27408081	28,03147763
	0,48	0,53847	23,07703965	13,31357	1,349616506	43,81113263	20,96926546
	0,24	0,90618	28,59269769	10,18735	1,691354277	-18,37790061	-4,354219019
						Sonuç	65,03466167
6 Noktalı	0,17	-0,93	1,01295729	1,478393	0,917592795	13,47703265	2,308945881
	0,36	-0,66	5,08185921	6,589777	1,229052865	33,12650384	11,95077053
	0,47	-0,24	11,42071221	11,91376	1,351621811	38,85505857	18,18082199
	0,47	0,24	18,57928779	14,06133	1,298378189	56,75038914	26,55429591
	0,36	0,66	24,91814079	12,54066	1,420947135	28,08274531	10,13117613
	0,17	0,93	28,98704271	9,870618	1,732407205	-23,82396645	-4,08162914
						Sonuç	65,0443813

Points	Weighting Factors	Function Arguments	Truncation Error
2	$c_0 = 1.0000000$ $c_1 = 1.0000000$	$x_0 = -0.577350269$ $x_1 = 0.577350269$	$\cong f^{(4)}(\xi)$
3	$c_0 = 0.5555556$ $c_1 = 0.8888889$ $c_2 = 0.5555556$	$x_0 = -0.774596669$ $x_1 = 0.0$ $x_2 = 0.774596669$	$\cong f^{(6)}(\xi)$
4	$c_0 = 0.3478548$ $c_1 = 0.6521452$ $c_2 = 0.6521452$ $c_3 = 0.3478548$	$x_0 = -0.861136312$ $x_1 = -0.339981044$ $x_2 = 0.339981044$ $x_3 = 0.861136312$	$\cong f^{(8)}(\xi)$
5	$c_0 = 0.2369269$ $c_1 = 0.4786287$ $c_2 = 0.5688889$ $c_3 = 0.4786287$ $c_4 = 0.2369269$	$x_0 = -0.906179846$ $x_1 = -0.538469310$ $x_2 = 0.0$ $x_3 = 0.538469310$ $x_4 = 0.906179846$	$\cong f^{(10)}(\xi)$
6	$c_0 = 0.1713245$ $c_1 = 0.3607616$ $c_2 = 0.4679139$ $c_3 = 0.4679139$ $c_4 = 0.3607616$ $c_5 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$ $x_1 = -0.661209386$ $x_2 = -0.238619186$ $x_3 = 0.238619186$ $x_4 = 0.661209386$ $x_5 = 0.932469514$	$\cong f^{(12)}(\xi)$

Matlab ile Çözüm

```
k=1;
for i=[4 2 1]
    sum=0;
    for n=0:16/i
    yn(n+1,1)=y(i*n+1);
    end
    for j=2:16/i
    sum=sum+yn(j);
    end
    q=30*(yn(1)+2*sum+yn(end))/(2*(16/i));
    Q(k,1)=q;k=k+1;
end
% Simpson'ýn 1/3 Kuralýnýn Çoklu Uygulamasý
sum1=0;sum2=0;
    for j=2:2:16
       sum1=sum1+y(j);
    end
      for j=3:2:15
       sum2=sum2+y(j);
   end
q1=30*(y(1)+4*sum1+2*sum2+y(end))/(3*16);
```