MÜHENDİSLİKTE SAYISAL YÖNTEMLER

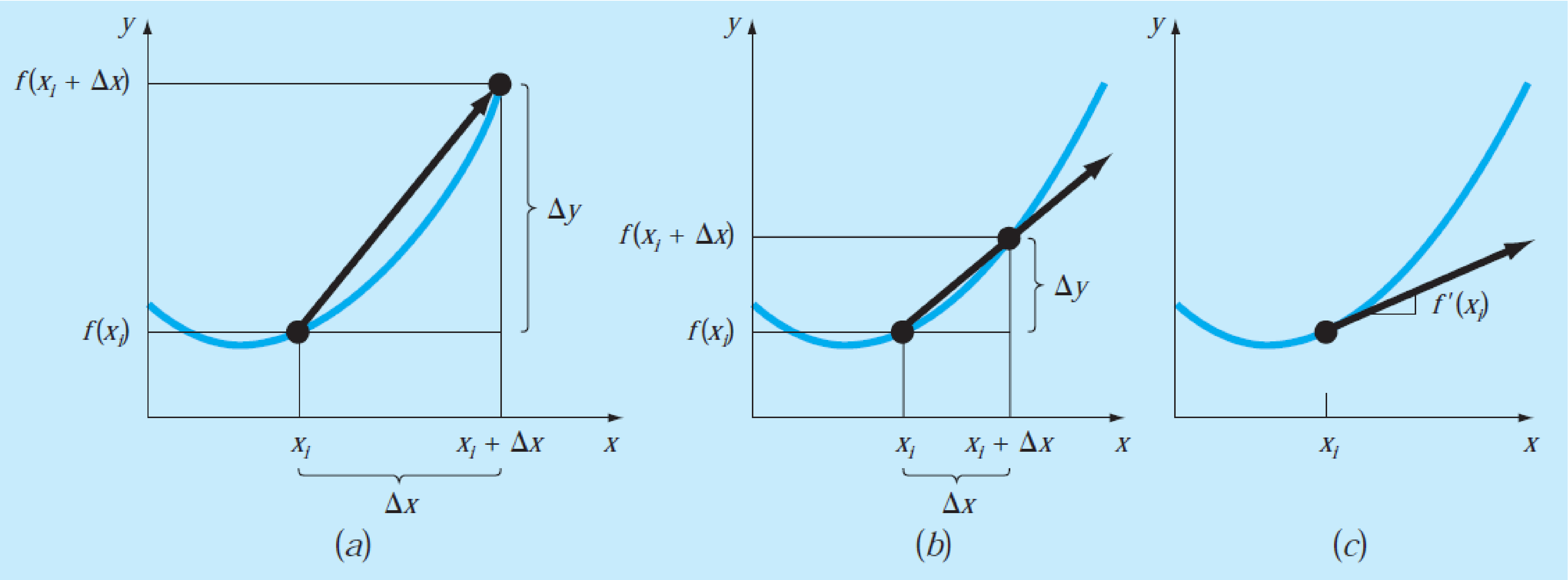
Sayısal Türev ve İntegral I

Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Giriş

- **Türev**: bağımlı değişkenin bağımsız değişkene bağlı değişim oranıdır.

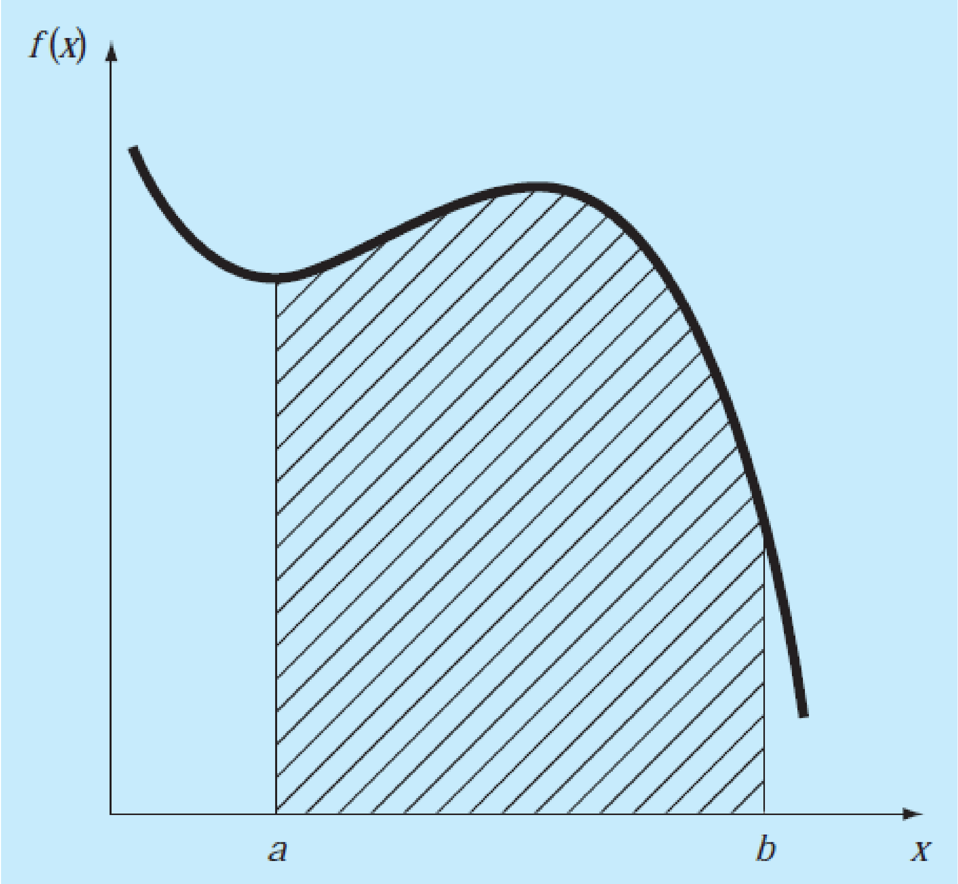
$$y = f(x) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



Giriş

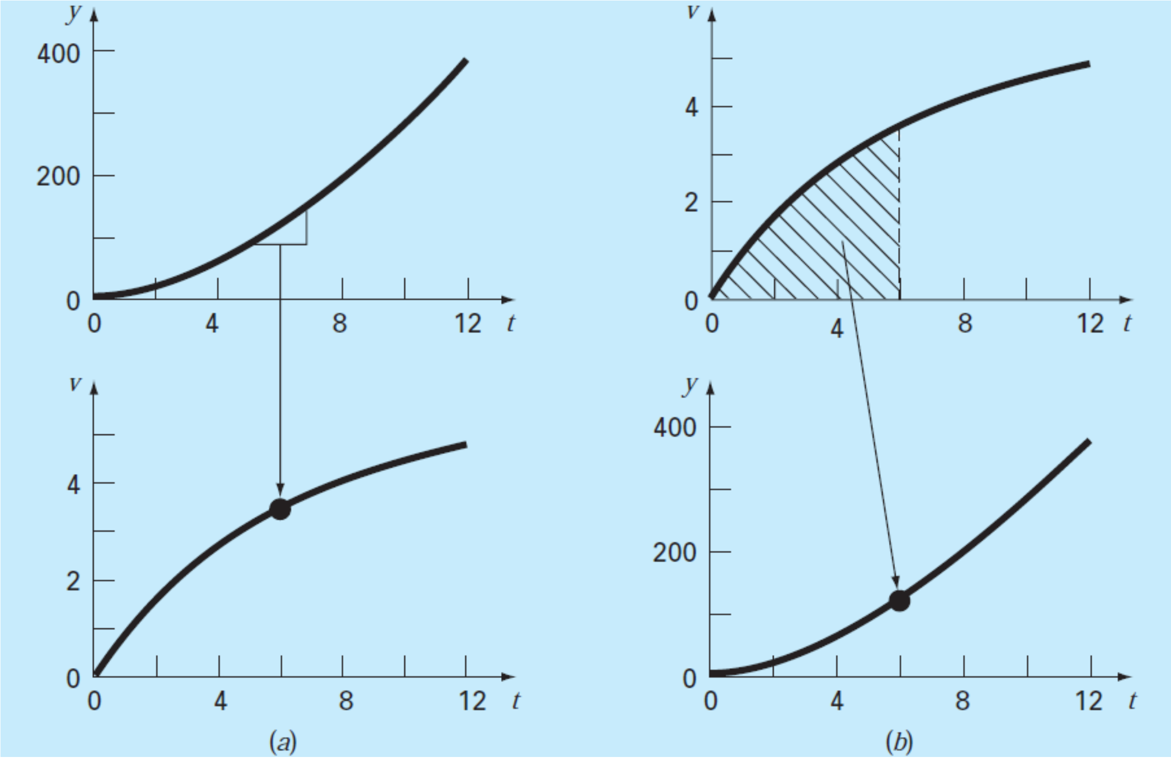
- İntegrasyon: sözlük anlamı bir araya getirme birleştirmedir. Matematiksel olarak ise tanımlı bir [a, b] aralığında f(x) fonksiyonunun aldığı değerlerin toplamını ifade eder.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$



Giriş

- Türev ile integral birbiri ile ilişkili kavramlardır. Örnek olarak hız konum grafikleri gösterilebilir.



$$y = \int_a^b f(x)dx$$

İntegralini bulmak ile y(a)=0 olmak koşuluyla

$$\frac{dy}{dx} = f(x)dx$$

Türevinin b'deki değerini bulmak aynı şeydir.

Giriş: Neden Sayısal Türev ve İntegrale Gereksinimimiz Var

- Doğrudan türevinin alınması veya integre edilmesi zor veya imkansız olan karmaşık sürekli fonksiyonların çözümü
- Çoğunlukla deneysel verilerin işlenerek düzenlenmesi için
  - örneğin; ivme verisi ölçebilen bir sensörümüz var hız ve konum verilerine ulaşmak istediğimizde sayısal integrasyona ihtiyacımız olur.

Giriş: Bu Bölümde Tartışacağımız Konular

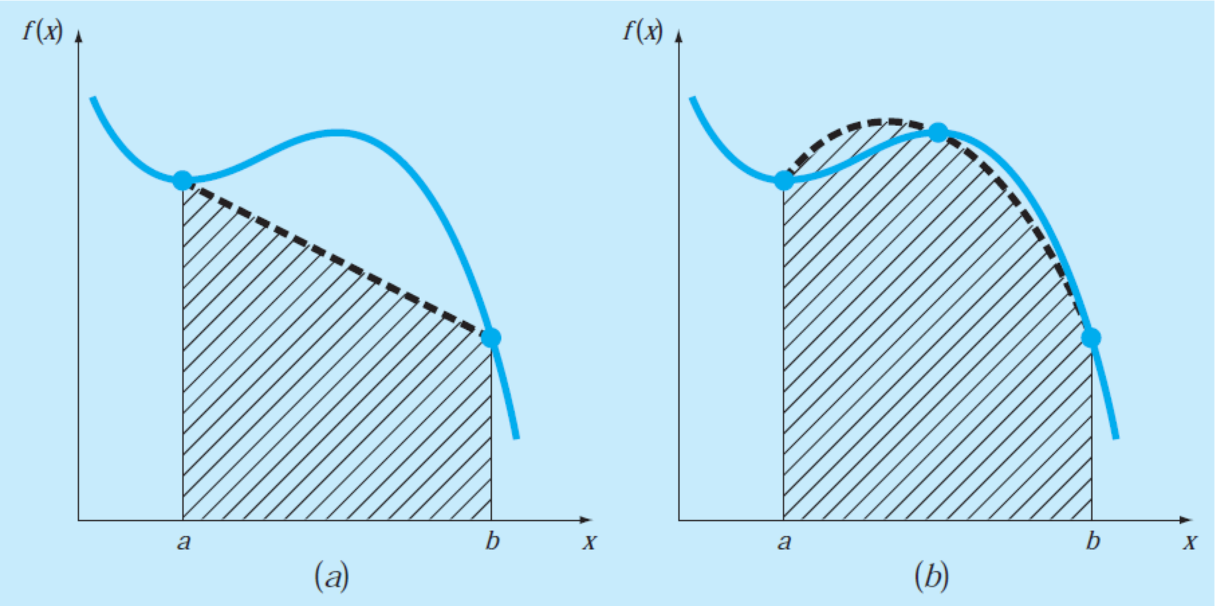
- Newton-Cotes İntegral Formülleri
  - Trapez (Yamuk) Kuralı
  - Simpson'ın 1/3 Kuralı
  - Simpson'ın 3/8 Kuralı
- Eşitliklerin İntegrali
  - Romberg İntegrali
  - Gauss Kareleme
- Sayısal Diferansiyel
  - Yüksek doğrulukta diferansiyel formüller
  - Richardson Extrapolasyonu

Newton-Cotes İntegral Formülleri

- Newton-Cotes İntegral Formülleri
  - En yaygın sayısal integral şemalarıdırlar
  - Karmaşık integralleri veya tablo halinde verilerin integrasyonunda kullanılır.
  - İntegre edilecek fonksiyonun yerine yaklaşık fonksiyonun yazılması yöntemi ile çalışır.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

$$f_n(x) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 x + \cdots + \mathrm{a}_{n-1}x^{n-1} + \mathrm{a}_n x^n \qquad (*)$$



Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez (Yamuk) Kuralı

$$f_n(x) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 x + \cdots + \mathrm{a}_{n-1} x^{n-1} + \mathrm{a}_\mathrm{n} x^n \qquad (*)$$

- Trapez Kuralı, (*) ile numaralanmış denklemde n=1 iken yani düz bir doğru geçirilerek integral hesaplanması olarak ifade edilebilir.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$$

Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez (Yamuk) Kuralı

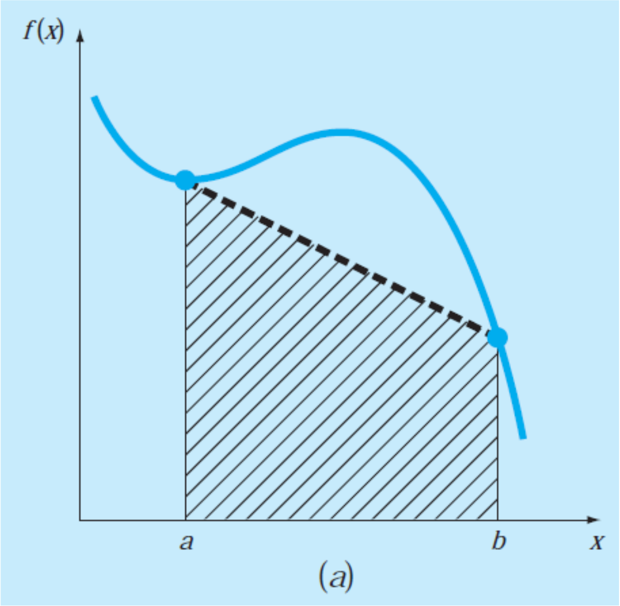
$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$I \cong \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

$$I \cong (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Şeklindedir.

Trapez Kuralı olarak isimlendirilir.



Trapez Kuralının Türetilmesi

$$I \cong \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

$$I \cong \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a) + \frac{-af(b) + \mathrm{a}f(a)}{b - a} \right] dx$$

$$I \cong \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{\mathrm{b}f(a) - \mathrm{a}f(a) - af(b) + \mathrm{a}f(a)}{b - a} \right] dx$$

$$I \cong \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{\mathrm{b}f(a) - af(b)}{b - a} \right] dx$$

$$I \cong \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{x^2}{2} + \frac{\mathrm{b}f(a) - af(b)}{b - a} x \Bigg|_a^b$$

$$I \cong \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(\mathrm{b}^2 - a^2)}{2} + \frac{\mathrm{b}f(a) - af(b)}{b - a} (b - a)$$

Trapez Kuralının Türetilmesi

$$I \cong \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{(\mathrm{b}^2 - a^2)}{2} + \frac{\mathrm{b}f(a) - af(b)}{b - a}(b - a)$$

$$I \cong (f(b) - f(a))\frac{(b + a)}{2} + \mathrm{b}f(a) - af(b)$$

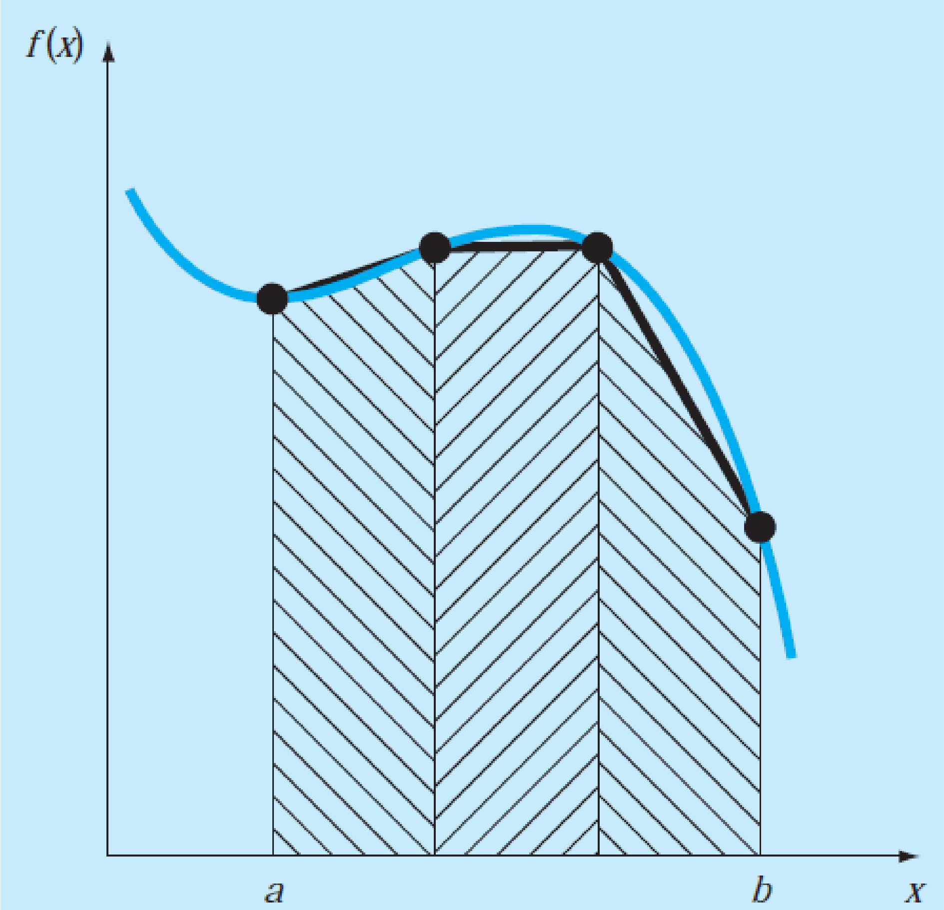
$$I \cong f(b)\frac{b}{2} - f(a)\frac{b}{2} + f(b)\frac{\mathrm{a}}{2} - f(a)\frac{\mathrm{a}}{2} + \mathrm{b}f(a) - af(b)$$

$$I \cong f(b)\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} - a\right) + f(a)\left(b - \frac{b}{2} - \frac{\mathrm{a}}{2}\right)$$

$$I \cong \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a)$$

Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez (Yamuk) Kuralı

- Aslında elde edilen formül yamuğun alan formülünden başka bir şey değildir.
- Daha sağlıklı sonuçlar alınmak istendiğinde tek bir doğru geçirmek yerine bilinen değerler oranında daha çok doğru geçirmek sonucu iyileştirir.

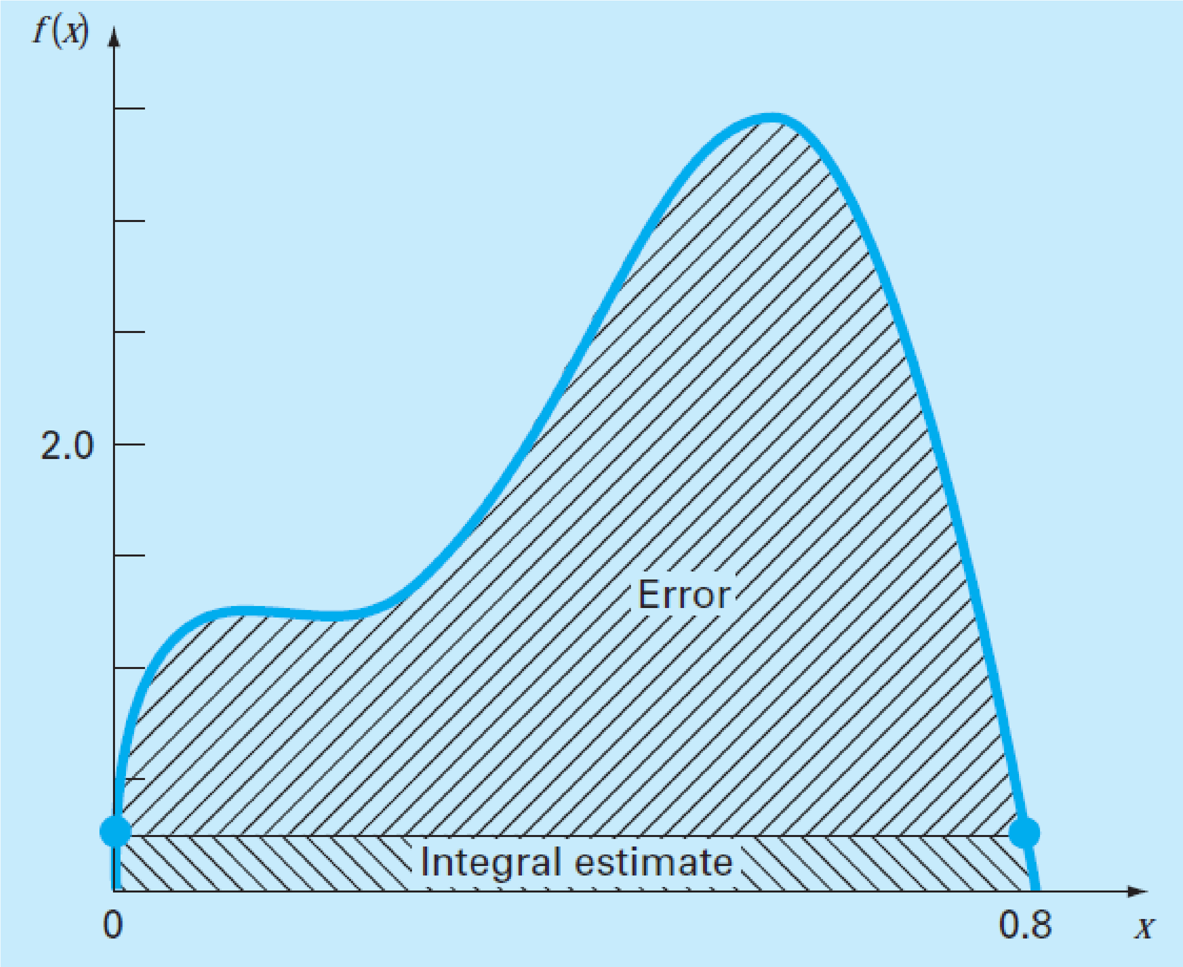


Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez (Yamuk) Kuralı

- Trapez kuralında Hata;

$$E_a = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

Eğer, f(x) linear ise trapez kuralı kesin değeri verir ancak f(x) bir eğri ise trapez kuralının tekli uygulanması çok büyük hataya neden olur. Örneğin yandaki şekilde görüldüğü gibi



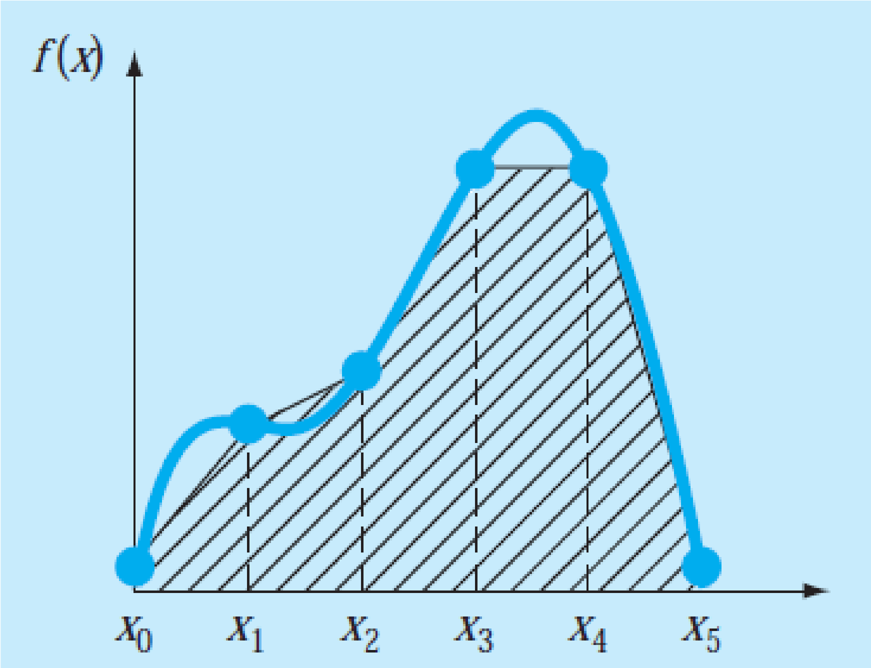
Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez Kuralının Çoklu Uygulaması

- [a,b]'ye olan integral aralığını alt aralıklara bölerek trapez kuralını uygulama esasına kuralın çoklu uygulanması denilmektedir.
- Şekildeki gibi n+1=6 noktam varsa n=5 adet aralığım vardır.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

- Şekle göre toplam integral;

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$



Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez Kuralının Çoklu Uygulaması

- Her bir aralık için trapez kuralı uygulanırsa

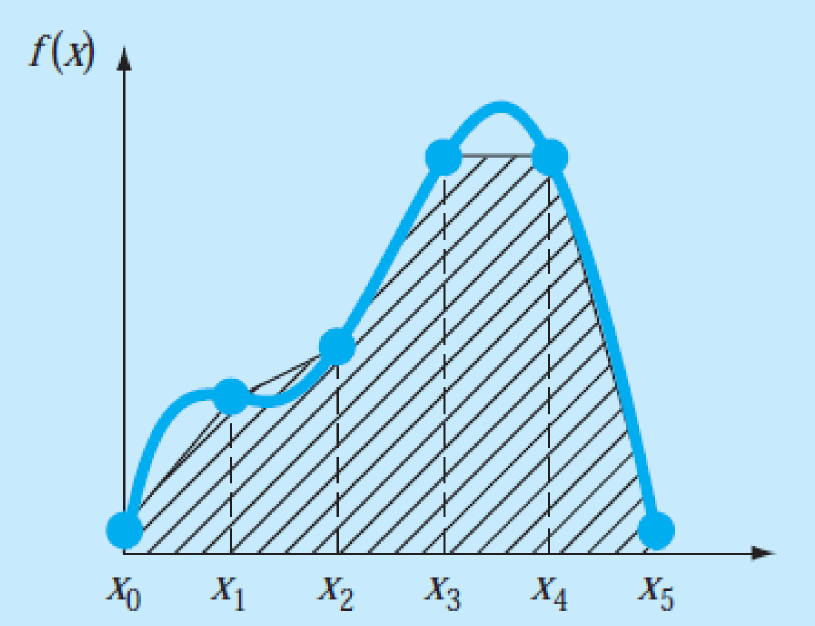
$$I \cong h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

- Uygun terimler bir araya getirilip düzenlenerek, aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

- Çoklu Trapez Kuralında Hata;

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$



Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez Kuralının Çoklu Uygulaması

Örnek:

$f(x) = x^2 e^{-x}$ fonksiyonunun integralini 1'den 2'ye kadar analitik ve sayısal olarak bulunuz. Çoklu trapez uygulaması için n=4 alın. Gerçek hatayı ve tahmini hatayı bulunuz.

Çözüm: **Analitik**

$$I = \int_1^2 x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\Big|_1^2 = 0.486$$

Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez Kuralının Çoklu Uygulaması

Çözüm: **Sayısal**

x	f(x)
1	0,3679
1,25	0,4477
1,5	0,5020
1,75	0,5322
2	0,5413

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$I \cong \frac{0,25}{2}[0,3679 + 2[0,4477 + 0,5020 + 0,5322] + 0,5413] = 0,4841$$

Gerçek Hata: $(0.486 - 0,4841) * 100 = \%0,1875$

Tahmini Hata: $E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$

Newton-Cotes İntegral Formülleri: Trapez Kuralının Çoklu Uygulaması

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$
$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$$
$$f''(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}$$
$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

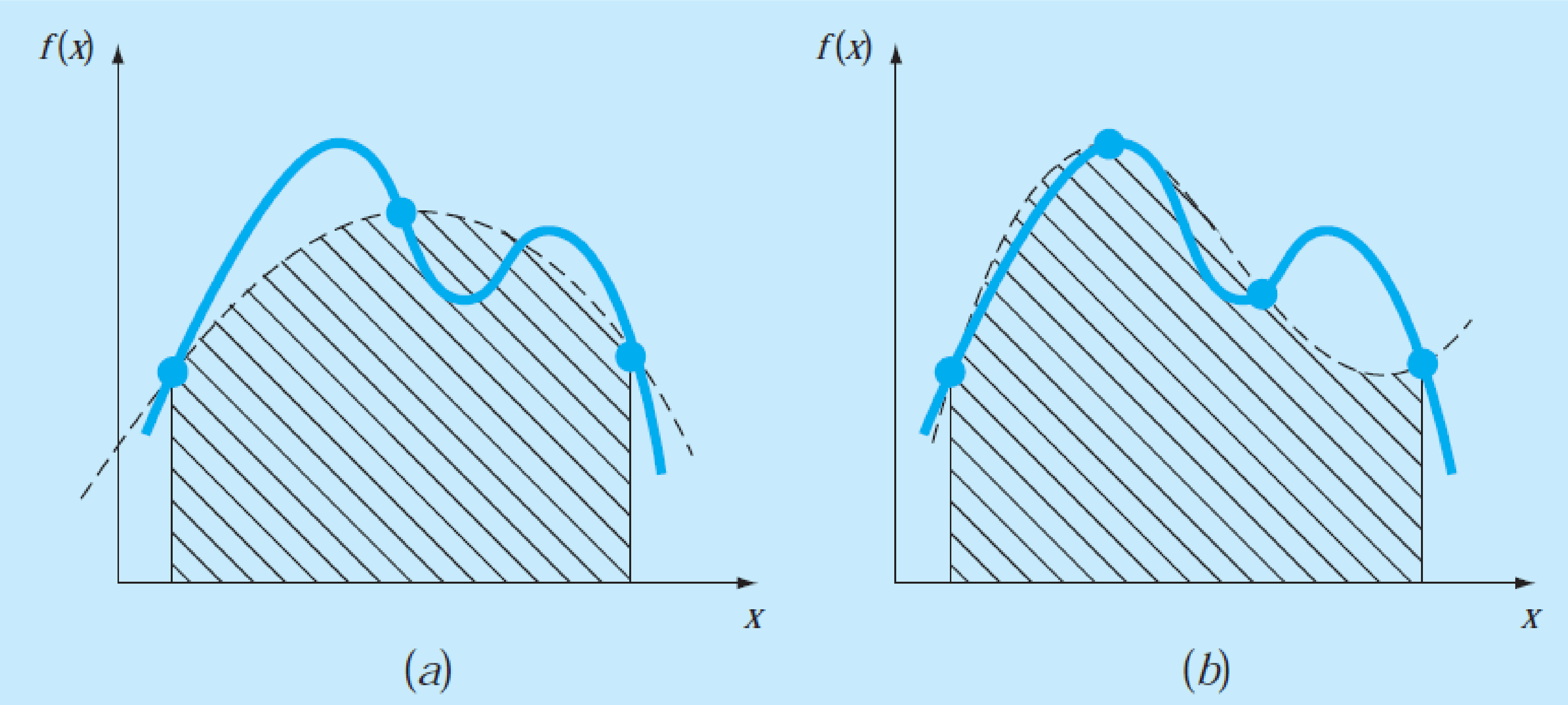
Tahmini Hata: $E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$

$$E_a = -\frac{(1)^3}{12 * 4^3} * (-1.4781) = \%0.193$$

ξ	f''(ξ)
1,125	-0,4007
1,375	-0,4069
1,625	-0,3661
1,875	-0,3043
∑	-1,4781

Simpson Kuralları

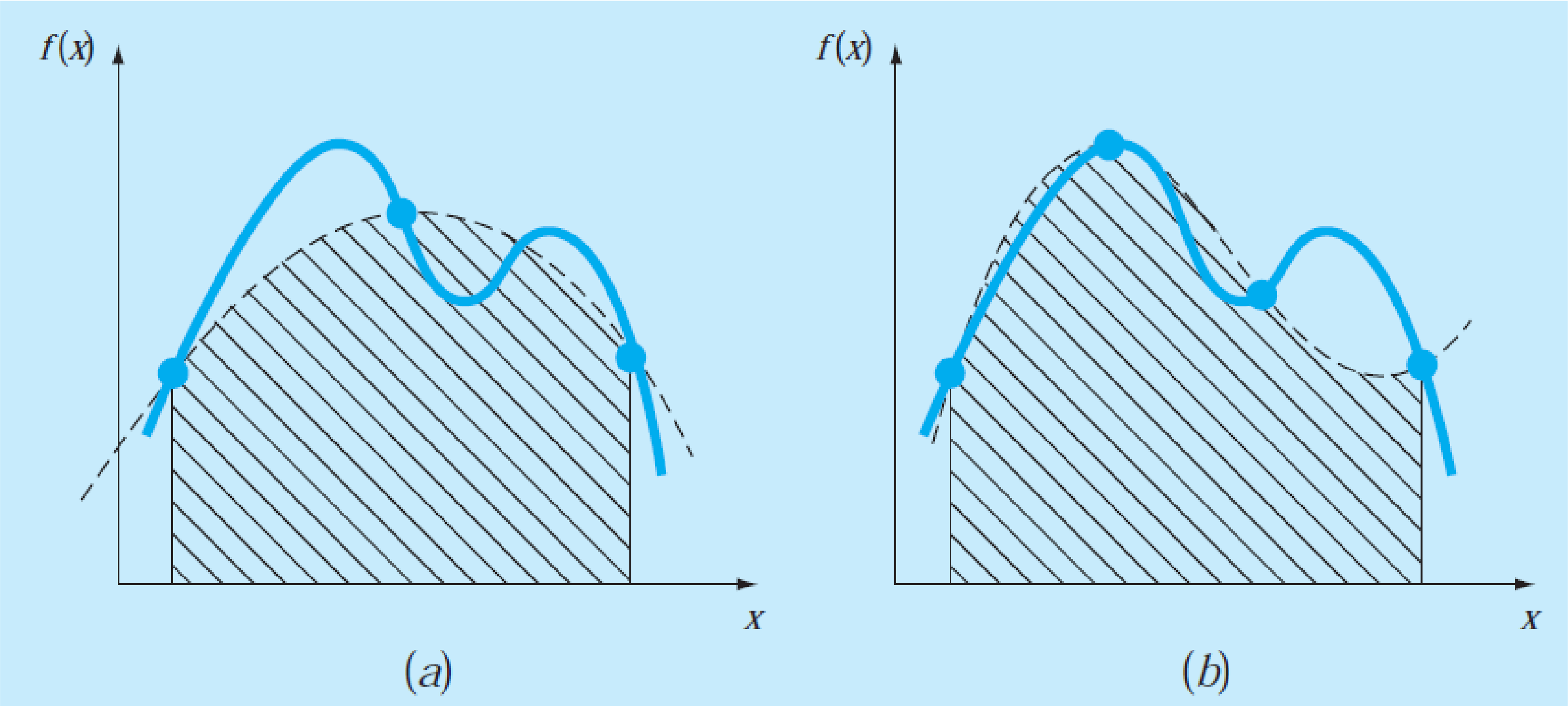
- Hesaplamayı iyileştirmenin bir yolu olarak trapez kuralını sık aralıklarla uygulamayı önermiştik.
- Hesaplamayı iyileştirmenin bir diğer yolu ise eğer bilinen ara noktalar var ise daha çok noktayı birleştirmek yani 2. dereceden veya 3. dereceden polinomlar geçirmektir.



Simpson Kuralları

(a) Simpson’un 1/3 kuralının grafiksel gösterimidir. Üç noktayı birleştiren parabolün altındaki alanı kapsar.

(b) Simpson’un 3/8 kuralının grafiksel gösterimidir. Dört noktayı birleştiren bir kübik polinomun altında kalan alanı kapsar.



Simpson'ın 1/3 Kuralı

Simpson'ın 1/3 kuralında f(x) yerine ikinci dereceden interpolasyon polinomu yazılır.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \right) dx$$

İntegral alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Simpson'ın 1/3 kuralında kesme hatası

$$E_a = -\frac{1}{2880} f^4(\xi)(b-a)^5 veya \;\; E_a = -\frac{1}{90} f^4(\xi)h^5$$

Simpson'ın 1/3 kuralı sadece üç noktaya dayalı bir formül olmasına karşın, üçüncü dereceden bir doğruluğa sahiptir. Dolayısıyla üçüncü dereceden bir polinom için kesin sonuç verir.

Simpson'ın 1/3 kuralının tekli uygulaması

Örnek: $f(x) = x^2 e^{-x}$ fonksiyonunun integralini 1'den 2'ye kadar Simpson'ın 1/3 kuralının tekli uygulaması ile bulunuz. Tahmini hatayı hesaplayınız..

x	f(x)
1	0,3679
1,5	0,5020
2	0,5413

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I \cong \frac{0,5}{3} * [0,3679 \ + 4 * 0,5020 \ + 0,5413 \ ] = 0,4862$$

$$E_a = -\frac{1}{90} f^4(\xi) h^5 \rightarrow E_a = -\frac{1}{90} *(-0,39048)*0,5^5$$

Yüzde tahmini hata %0,013

Simpson'ın 1/3 kuralının çoklu uygulaması

- Simpson kuralıda integral aralığı eşit genişlikteki alt aralıklara bölünerek geliştirilebilir.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

- Toplam integral;

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

- Her bir aralık için Simpson'ın 1/3 kuralı uygulanırsa

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

- Uygun terimler bir araya getirilip düzenlenerek, aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

Simpson'ın 1/3 kuralının çoklu uygulaması

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonu kullanarak n=4 aralık için

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

fonksiyonun integralini a=0'dan b=0.8'e kadar tahmin edin. (İntegralin kesin değeri 1.640533 dür.)

x	f(x)
0	0,2
0,2	1,288
0,4	2,456
0,6	3,464
0,8	0,232

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

$$I \cong \frac{0.2}{3}[0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232]$$

$$I \cong 1.63467$$

Gerçek hata $E_g = 1.640533 - 1.63467 = 0.017067$

Yaklaşık hata ise

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^4$$

Formülünden bulunur burada $\bar{f}^4$ integral aralığı için dördüncü türevin ortalamasıdır.

Simpson'ın 1/3 kuralının çoklu uygulaması

Örnek devam:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$\bar{f}^4 = (5 * 4 * 3 * 2) * 400 * x - (4 * 3 * 2 * 1) * 900$$

$$\bar{f}^4 = -2400$$

Yaklaşık hata ise

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^4 \Longrightarrow -\frac{(0.8)^5}{180 * 4^4}(-2400) = 0.017067$$

Simpson'ın 3/8 Kuralı

Simpson'ın 3/8 kuralında f(x) yerine üçüncü dereceden interpolasyon polinomu yazılır.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$$

İntegral alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Simpson'ın 3/8 kuralında kesme hatası

$$E_a = -\frac{1}{6480} f^4(\xi)(b-a)^5 veya \;\; E_a = -\frac{3}{80} f^4(\xi) h^5$$

Simpson’ın 3/8 Kuralı

Simpson’ın 3/8 kuralında kesme hatası

$$E_a = -\frac{1}{6480} f^4(\xi)(b-a)^5 veya \;\; E_a = -\frac{3}{80} f^4(\xi) h^5$$

Simpson’ın 1/3 kuralında kesme hatası ise

$$E_a = -\frac{1}{2880} f^4(\xi)(b-a)^5 \; veya \; E_a = -\frac{1}{90} f^4(\xi) h^5$$

Kesme hatalarının paydalarına dikkat ederseniz 3/8 kuralının kesme hatası daha küçüktür. Dolayısıyla 3/8 kuralı 1/3 kuralından biraz daha doğrudur.

3/8 kuralı üçüncü dereceden bir polinom için kesin sonuç verir.

Örnek

Simpson'ın 3/8 kuralını kullanarak aşağıdaki fonksiyonu a=0'dan b=0.8'e kadar tahmin edin

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

(İntegralin kesin değeri 1.640533 dür.)

x	f(x)
0	0,2
0,2667	1,4327
0,5333	3,4872
0,8	0,232

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$I \cong \frac{3 * 0.8/3}{8}[0.2 + 3 * 1,4327 + 3 * 3.4872 + 0.232]$$

$$I \cong 1.519170$$

Gerçek hata $E_g = 1.640533 – 1.519170 = 0.1213630$

Yaklaşık hata ise;

$$E_a = -\frac{1}{6480} f^4(\xi)(b-a)^5 \Longrightarrow -\frac{(0.8)^5}{6480}(-2400) = 0.1213630$$

Yüksek Dereceli Kapalı Newton-Cotes Formülleri

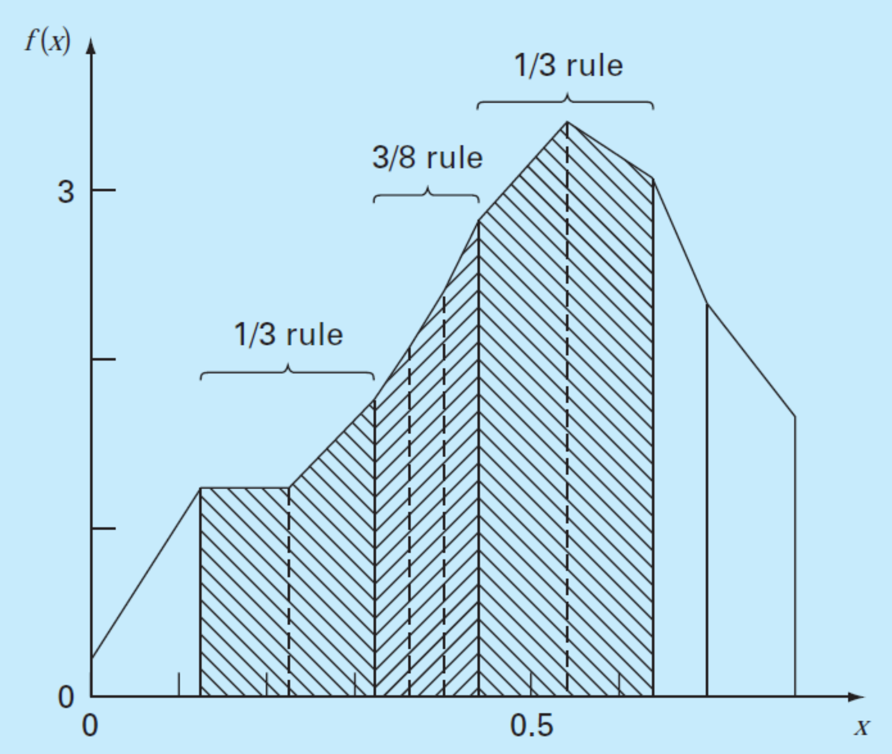
TABLE 21.2 Newton-Cotes closed integration formulas. The formulas are presented in the format of Eq. (21.5) so that the weighting of the data points to estimate the average height is apparent. The step size is given by $h = (b - a)/n$.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
1	2	Trapezoidal rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$	$-(1/12)h^3f''(\xi)$
2	3	Simpson's 1/3 rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$	$-(1/90)h^5f^{(4)}(\xi)$
3	4	Simpson's 3/8 rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$	$-(3/80)h^5f^{(4)}(\xi)$
4	5	Boole's rule	$(b-a)\dfrac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$	$-(8/945)h^7f^{(6)}(\xi)$
5	6		$(b-a)\dfrac{19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)}{288}$	$-(275/12{,}096)h^7f^{(6)}(\xi)$

Eşit Olmayan Aralıklarda İntegral

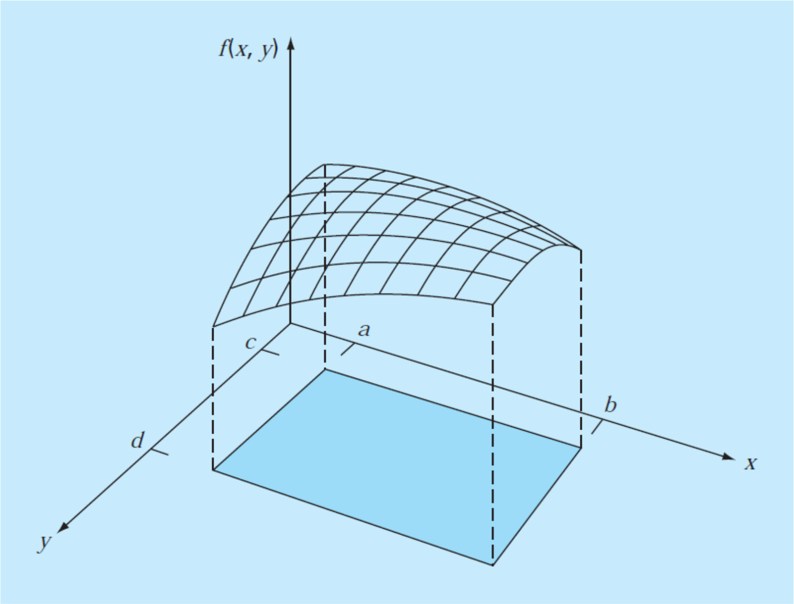
- Eşit olmayan her bir aralık için trapez kuralı uygulanarak sonuçlar toplanabilir.
- Veri incelenerek belirli bölümlerine trapez kuralı belirli bölümlerine uygun olan simpson kurallarında biri uygulanabilir.

x	**f(x)**	**x**	**f(x)**
0.0	0.200000	0.44	2.842985
0.12	1.309729	0.54	3.507297
0.22	1.305241	0.64	3.181929
0.32	1.743393	0.70	2.363000
0.36	2.074903	0.80	0.232000
0.40	2.456000		



Katlı İntegral

- Örneğin bir yüzey fonksiyonunun altında kalan alanın hesaplanması



$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

Katlı İntegral

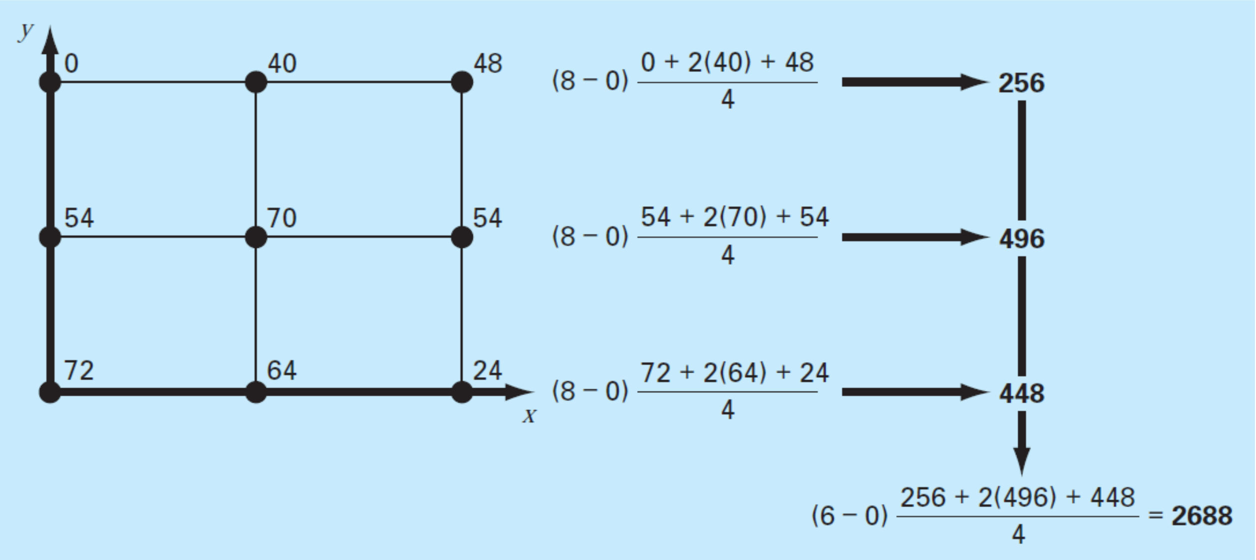
- Örnek: Ortalama sıcaklığı hesaplamak üzere, iki katlı integralin kullanılması:
- Isıtılan bir diktörtgen plakanın sıcaklığı aşağıdaki fonksiyonla tanımlanmaktadır.

$$T(x,y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 72$$

Plaka 8 m uzunluğunda (x-boyutu) ve 6 m (y-boyutu) yüksekliğindedir. Ortalama sıcaklığı hesaplayınız.

```
function I=simp13(h,A)
  I = h*(A(1)+4*A(2)+A(3))/6
end


Veri=[0 40 48;54 70 54;72 64 24];
for i=1:length(Veri)
    I(i)=simp13(8,Veri(i,:));
end
I_K=simp13(6,I);Alan=6*8;I=I_K/Alan
```



Ödev

- Newton-Cotes Formülleri
  - Trapez (Yamuk) Kuralı
  - Simpson'ın 1/3 Kuralı
  - Simpson'ın 3/8 Kuralı

  için bilgisayar algoritması
- Geçen hafta topladığınız yürüyüş verisinin 1 periyodundaki veriyi kullanarak yürüme hızı ve adım uzunluğunu geliştirdiğiniz algoritmaları sınamak için kullanınız..