MÜHENDİSLİKTE SAYISAL YÖNTEMLER

İnterpolasyon (Ara Değer Bulma)

Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Ara Değer Bulma

- **İnterpolasyon:** Verilerin çok hassas olarak bilindiği durumlarda tüm noktalardan geçen eğri uydurmaktır.
- İyi bilinen ayrık noktalar arasındaki ara bir değerin karşılığındaki değeri bulmak için kullanılır.
  - Termodinamikte buhar tabloları
  - Sıcaklık - yoğunluk ilişkileri
- **Polinom İnterpolasyonu:** n+1 noktadan geçen, n. dereceden polinomun belirlenmesi olarak ifade edilebilir. Bu polinom belirlendikten sonra ara değerler kolaylıkla hesaplanabilir.
- **Şerit (Spline) İnterpolasyon:** alternatif bir yaklaşım olarak, n+1 veri noktasına n. dereceden polinom geçirmek yerine veri noktalarının alt gruplarına daha düşük dereceli polinomlar uygulamaktır.

Polinom İnterpolasyonu

- Polinom İnterpolasyonu: n+1 noktadan geçen, n. dereceden polinomun belirlenmesi olarak ifade edilebilir. Bu polinom belirlendikten sonra ara değerler kolaylıkla hesaplanabilir.
  - **Newton’un Bölünmüş Fark İnterpolasyon Polinomları.**
  - **Lagrange İnterpolasyon Polinomları.**

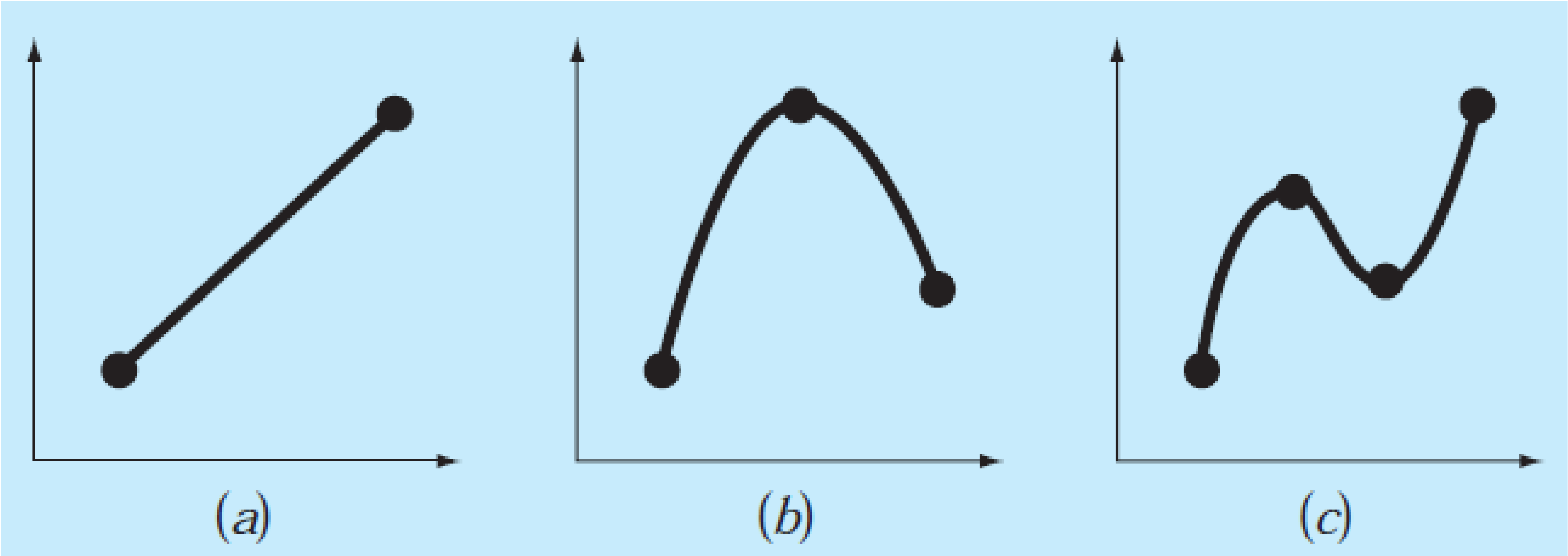
Polinom İnterpolasyonu

Polinom interpolasyonu örnekleri:

(a) Birinci derece (doğrusal) 2 veri noktasını bağlıyor,

(b) İkinci dereceden (karesel ya da parabolik) 3 veri noktasını bağlıyor, ve

(c) Üçüncü dereceden (kübik) 4 veri noktasını bağlıyor.

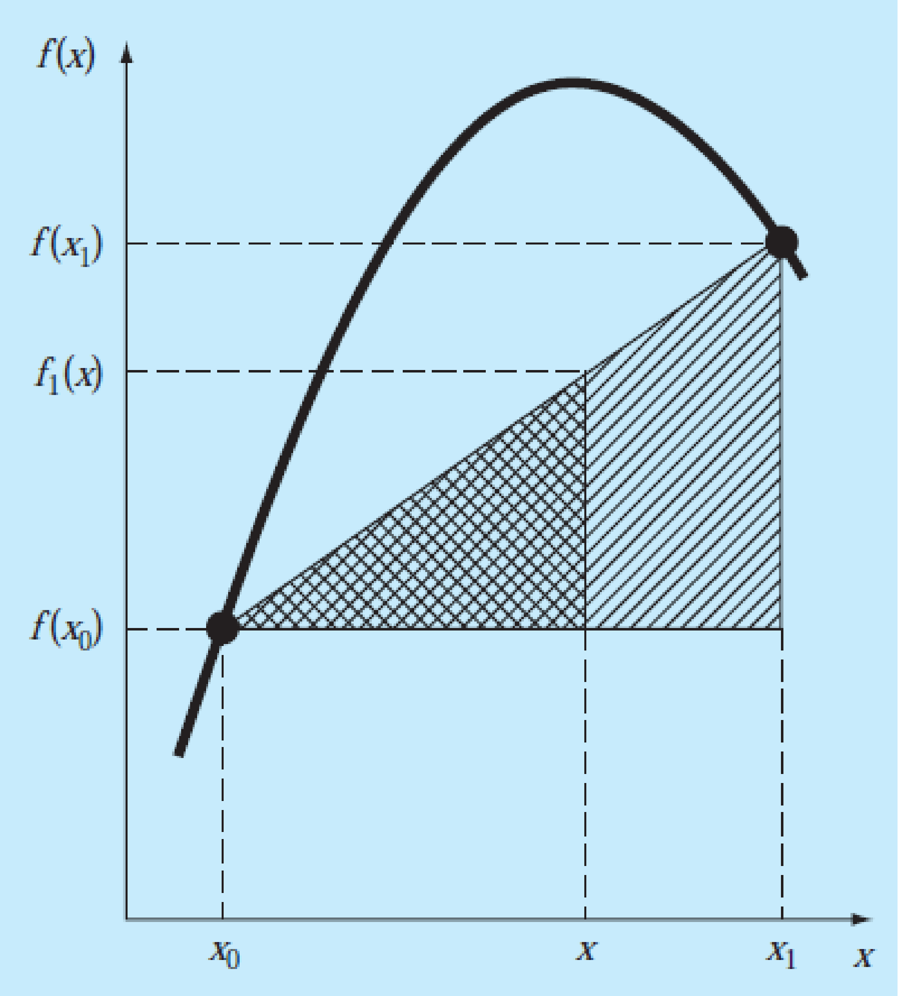


Newton’un Bölünmüş Fark İnterpolasyon Polinomları

- Newton’un Bölünmüş Fark İnterpolasyon Polinomları (NIP) en yaygın kullanılan ve en kullanışlı yöntem olarak bilinmektedir. Genel formülü vermeden, 1. dereceden ve 2. dereceden polinomları konuşacağız.
- Doğrusal İnterpolasyon (1. derece)
  - Doğrusal interpolasyonun grafiksel gösterimi.
  - Gölgeli alanlar, benzer üçgenleri göstermektedir.
  - Benzer üçgen kuralından aşağıdaki doğrusal interpolasyon formülü çıkmaktadır.

$$\frac{f_{Ara}(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\boxed{f_{Ara}(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$



Doğrusal İnterpolasyon Örnek

x	f(x)
1	0
4	1,386294

Yandaki tablo'da $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ ve $x = 4$ için değerleri verilmektedir. $x = 2$ için fonksiyonun değerini hesaplayınız.

Not: fonksiyonun $x = 2$ için gerçek değeri $f(x) =$ 0,693147

Çözüm:

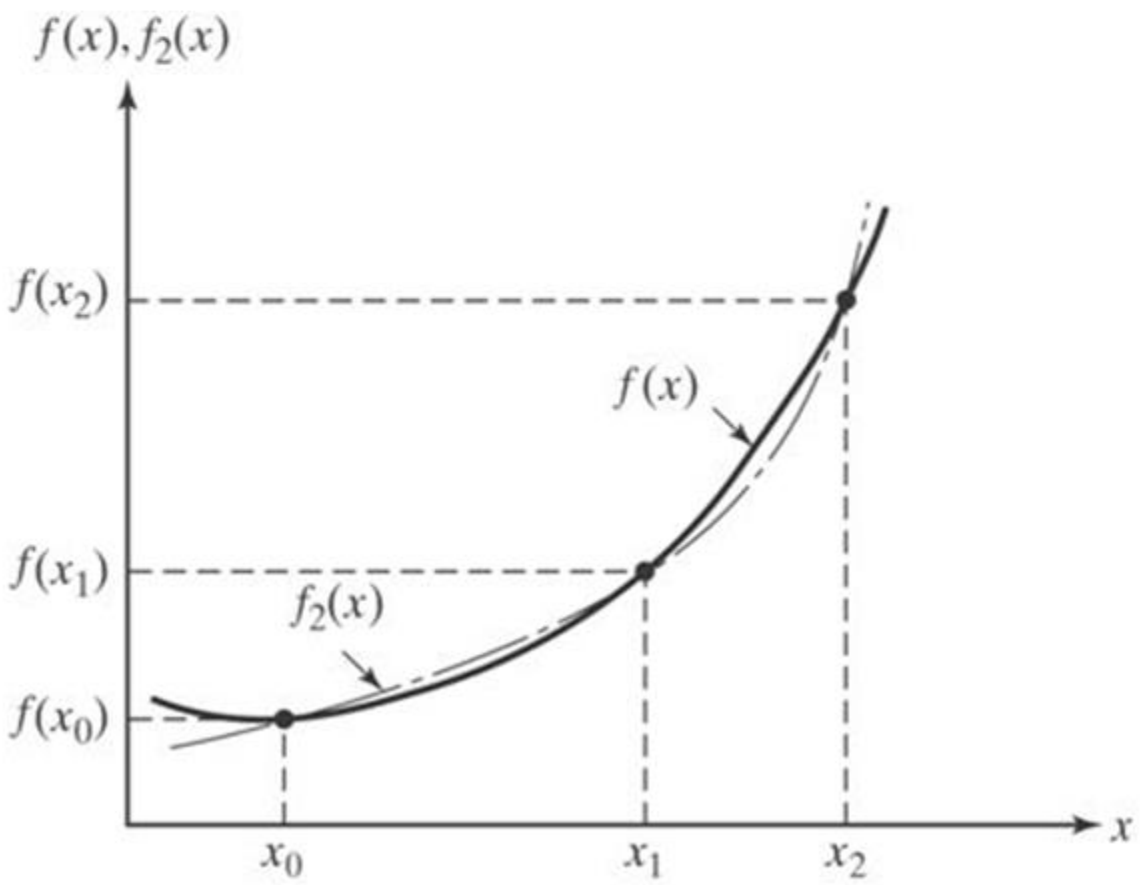
$$f_{Ara}(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_{Ara}(x) = 0 + \frac{1{,}386294 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0{,}462098$$

Gerçek Hata Yüzdesi $\varepsilon_t = \frac{0{,}693147 - 0{,}462098}{0{,}693147} \times 100 = \%33{,}33$

Newton'un Bölünmüş Fark İnterpolasyon Polinomları

- Karesel ya da parabol İnterpolasyon (2. derece)
  - Karesel interpolasyonun grafiksel gösterimi.
  - Üç noktadan bir parabol geçirebiliriz.



$$f_{Ara}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$f_{Ara}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Bir parabol yukarıdaki gibi iki farklı şekilde ifade edilebilir

Newton’un Bölünmüş Fark İnterpolasyon Polinomları

$$f_{Ara}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Yukarıdaki denklemi açarsak

$$f_{Ara}(x) = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1 + b_1x - b_2x_0x - b_2x_1x + b_2x^2$$

Düzenleyelim

$$f_{Ara}(x) = (b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1) + (b_1 - b_2x_0 - b_2x_1)x + b_2x^2$$

$$f_{Ara}(x) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1x + \mathrm{a}_2x^2$$

İki denklemin katsayıları şu şekilde eşit olur.

$$a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1$$

$$a_2 = b_2$$

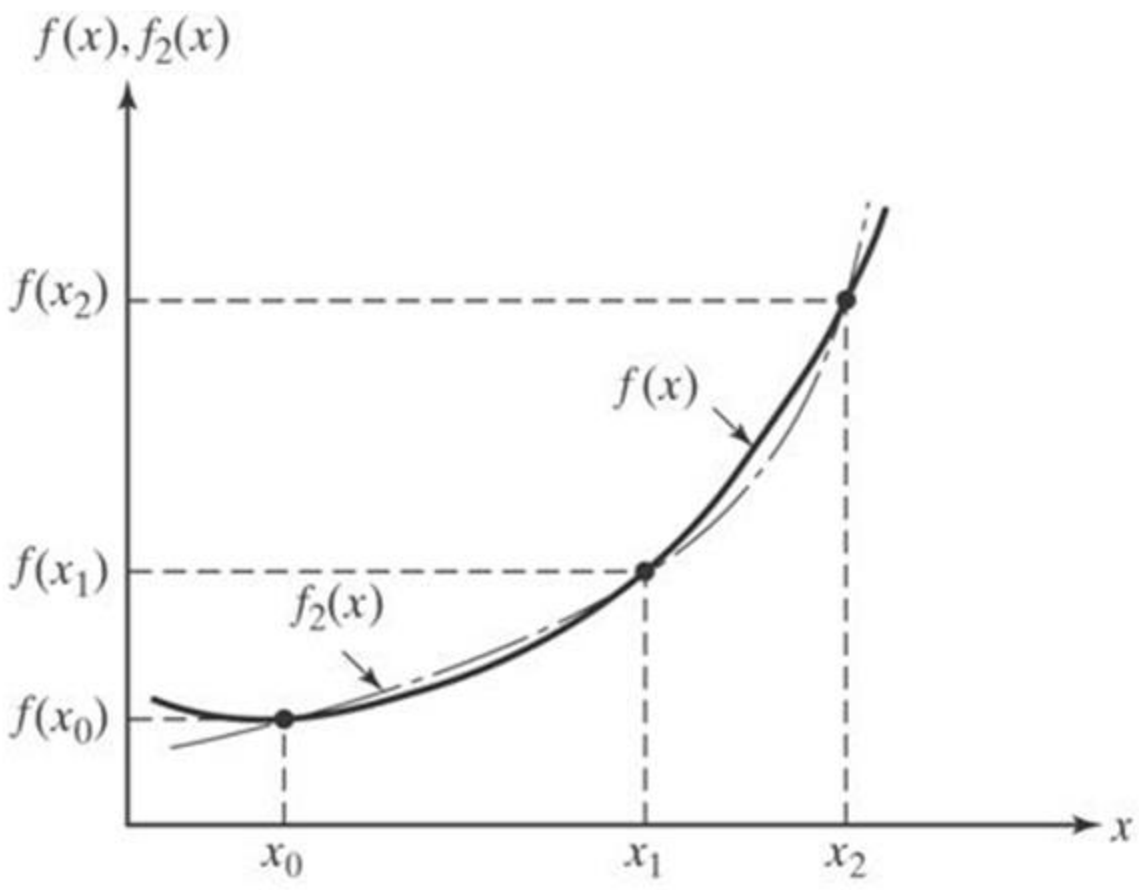
Newton’un Bölünmüş Fark İnterpolasyon Polinomları

İlk denklemdeki katsayılar

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$



Karesel ya da Parabol İnterpolasyon Örnek

x	f(x)
1	0
4	1,386294
6	1,791759

Yandaki tablo'da $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1, x = 4$ ve $x = 6$ için değerleri verilmektedir. $x = 2$ için fonksiyonun değerini hesaplayınız.

Not: fonksiyonun $x = 2$ için gerçek değeri $f(x) = 0{,}693147$

Karesel ya da Parabol İnterpolasyon Örnek Çözüm

x	f(x)
1	0
4	1,386294
6	1,791759

$$b_0 = f(x_0) = 0$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0,4620981$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1,791759 - 1,386294}{6 - 2} - 0,4620981}{6 - 0} = -0,0518731$$

$$f_{Ara}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f_{Ara}(2) = b_0 + b_1(2 - 1) + b_2(2 - 1)(2 - 4) = 0,565844$$

Gerçek Hata Yüzdesi $\varepsilon_t = \frac{0,693147 - 0,565844}{0,693147} \times 100 = \%18,4$

Newton'un Bölünmüş Fark İnterpolasyon Polinomlarının Genel Formu

$$f_{Ara}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_{\mathrm{n}}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$b_0 = f(x_0)$

$b_1 = f[x_1, x_0]$

$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$

$\vdots$

$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1, x_0]$

Burada

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_{\mathrm{i}}) - f(x_j)}{x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{j}}}$$

Genel İnterpolasyon Formu Örnek

x	f(x)
1	0
4	1,386294361
5	1,609437912
6	1,791759469

Yandaki tablo'da $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1, x = 4, x = 5$ ve $x = 6$ için değerleri verilmektedir. $x = 2$ için fonksiyonun değerini hesaplayınız.

Not: fonksiyonun $x = 2$ için gerçek değeri $f(x) =$ 0,693147

i	x_i	$f(x_i)$	First	Second	Third
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Genel İnterpolasyon Formu Örnek

i	x_i	$f(x_i)$	First	Second	Third
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

i	x	f(x)	Birinci	İkinci	Üçüncü	f(AraDeğer)
0	1	0	0,46209812	-0,059738642	0,007865529	
1	4	1,386294361	0,223143551	-0,020410997		
2	5	1,609437912	0,182321557			
3	6	1,791759469				
AraDeğer	2	0	0,46209812	0,119477285	0,047193174	0,628768579

Gerçek Hata Yüzdesi $\varepsilon_t = \frac{0{,}693147 - 0{,}628768579}{0{,}693147} \times 100 = \%9{,}3$

Newton'un Bölünmüş Fark İnterpolasyon Polinomlarında Hata

- NIP'nin yapısı taylor serisi açılımlarına çok benzerdir.
- Formüldeki sonlu farklar yüksek dereceli türevleri temsil eder.
- Kesme hatası TS'de olduğu gibi hesaplanabilir.

$$R_n = \frac{f^{n+1}\ (\xi)}{(n+1)!}(x_{\mathrm{i}+1} - x_{\mathrm{i}})^{n+1} \qquad TS\ için$$

$$R_n = \frac{f^{n+1}\ (\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n) \qquad x_0 \le \xi \le x_n$$

- Ancak Fonksiyon bilinmemektedir.

$$R_n = f[x, x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

- Fonksiyon bilinmediği için, eğer ek bir veri noktasının değeri biliniyorsa hata tahmin edilebilir.

$$R_n \cong f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

$$R_n \cong f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

Örnek

a) Aşağıdaki tabloda verilen verilere göre, 1.,2. ve 3. derece NIP'ları kullanarak f(2.8)'i bulunuz. Hesaplanacak değerin mümkün olan en iyi duyarlılığı için verilerin sıralanışını düzenleyiniz.

b) Önceki slayt'da bulunan hata ifadesini kullanarak, her bir tahmin için tahmini hatayı belirleyiniz.

x	1,6	2	2,5	3,2	4	4,5
f(x)	2	8	14	15	8	2

Çözüm

x	f(x)	AraDeğer	MutlakFarklar	Df	D^2f	D^3f	D^4f
2,5	14	2,8	0,3	1,4286	-8,81	1,0119	1,8477
3,2	15	2,8	0,4	5,8333	-7,292	-0,651	
2	8	2,8	0,8	0	-6,25		
4	8	2,8	1,2	2,5			
1,6	2	2,8	1,2				
4,5	2	2,8	1,7				
1. Derece Pol. İçin $f_1(2.8)$				14,429			
2. Derece Pol. İçin $f_2(2.8)$					15,486		
3. Derece Pol. İçin $f_3(2.8)$						15,389	
4. Derece Pol. İçin $f_4(2.8)$							15,601
1. Derece Pol. İçin R_1				1,0571			
2. Derece Pol. İçin R_2					-0,097		
3. Derece Pol. İçin R_3						0,2129	

Lagrange İnterpolasyon Polinomları.

- Lagrange interpolasyon polinomları Newton interpolasyon polinomunun yeniden formülleştirilmiş şeklidir. Bölünmüş farkların hesaplanması gerekmez. Özet olarak şu şekilde ifade edilebilir.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

Burada,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Lagrange İnterpolasyon Polinomları Örnek

x	**f(x)**
1	0
4	1,386294
6	1,791759

Yandaki tablo'da $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1, x = 4$ ve $x = 6$ için değerleri verilmektedir. $x = 2$ için fonksiyonun değerini bu kez de Lagrange interpolasyon polinomları kullanarak birinci ve ikinci derece için hesaplayınız.

Not: fonksiyonun $x = 2$ için gerçek değeri $f(x) = 0{,}693147$

Çözüm

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x) f(x_i) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

Burada,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j};\, L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{2-4}{1-4};\, L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{2-1}{4-1}$$

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x) f(x_i) = \frac{2-4}{1-4} \cdot 0 + \frac{2-1}{4-1} \cdot 1{,}386294 = 0.462$$

Lagrange İnterpolasyon Polinomları Örnek

İkinci derece için çözüm

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

Burada,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}; L_0(x) = \frac{2-4}{1-4} \cdot \frac{2-6}{1-6}; L_1(x) = \frac{2-1}{4-1} \cdot \frac{2-6}{4-6} = \frac{2}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{6-1} \cdot \frac{2-4}{6-4} = -\frac{1}{5}$$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i) = 0 + \frac{2}{3}\ 1{,}386294 - 1/5 * 1{,}79 = 0.56$$

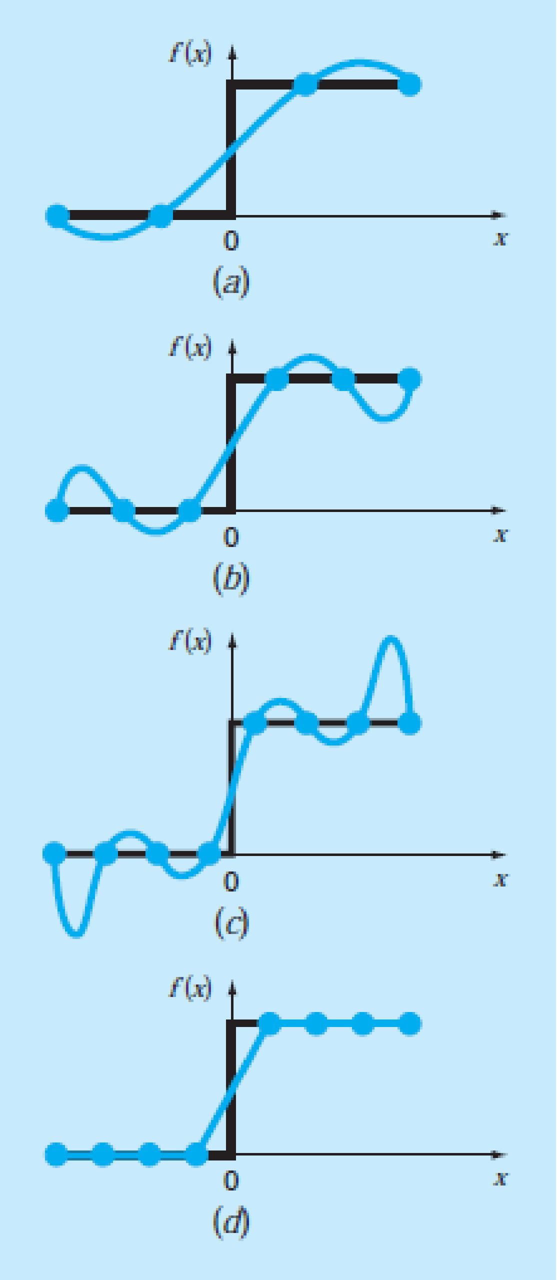
Şerit (spline) interpolasyon

Şerit (Spline) İnterpolasyon: alternatif bir yaklaşım olarak, n+1 veri noktasına n. dereceden polinom geçirmek yerine veri noktalarının alt gruplarına daha düşük dereceli polinomlar uygulamaktır.

Şekilde a'dan b'ye 2,3. ve 4. dereceden şerit interpolasyon örnekleri görülmektedir. Ancak bu örnek için en uygun şerit interpolasyonunun 1. dereceden olduğu d şıkkında görülmektedir.

Örnek: Birinci Dereceden Şerit: Verideki her iki nokta arasına bir doğru geçirmek anlamına gelir. Aşağıda verilen veriler için x=5'de fonksiyonun değerini bulunuz.

x	f(x)
3	2,5
4,5	1
7	2,5
9	0,5



Örnek Devam

x	f(x)
3	2,5
4,5	1
7	2,5
9	0,5

Aradığımız değer fonksiyonun @x=5 değeri

Bu değer tabloda 4,5 ile 7 arasında olmalı, bu iki değer arasına doğru geçirirsem doğrunun eğimi

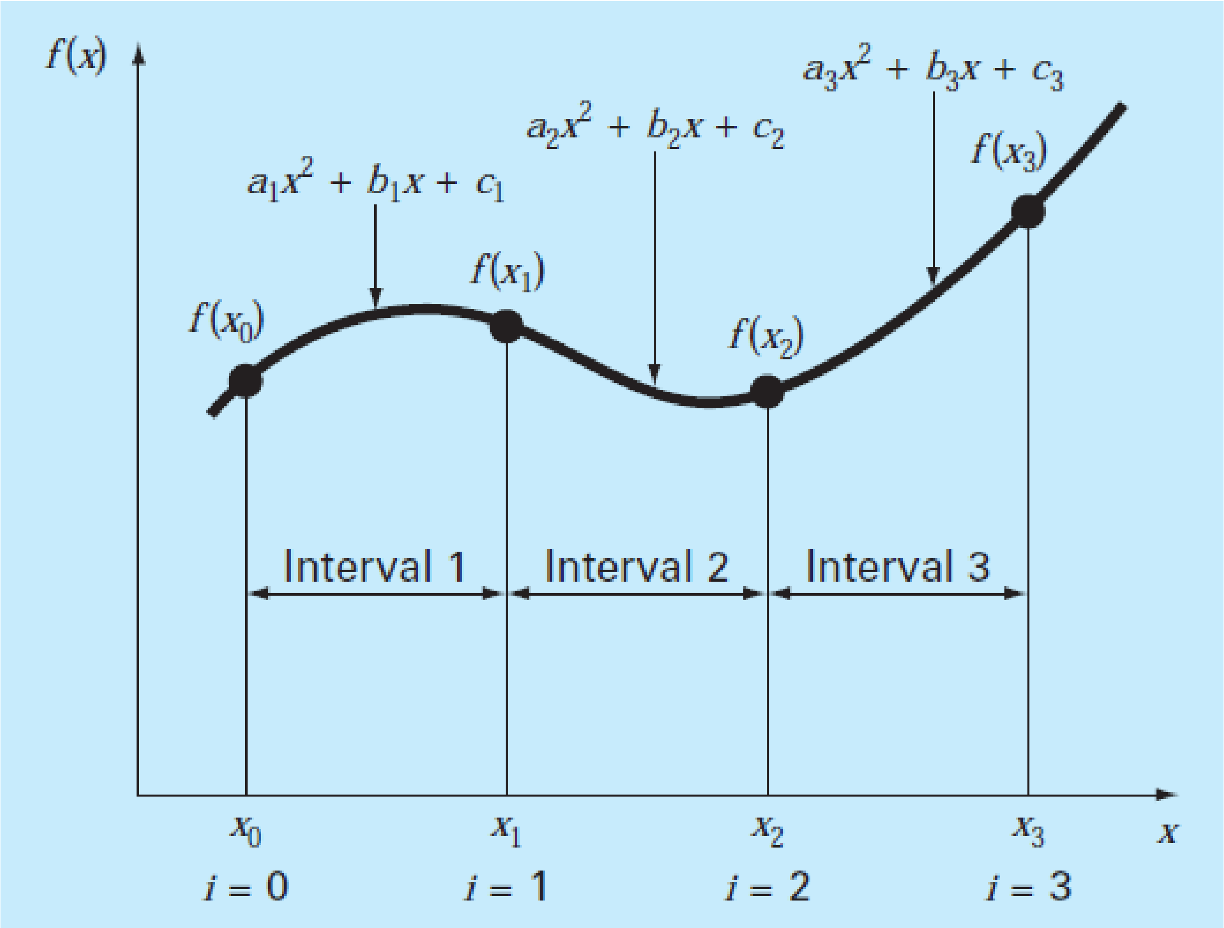
$$m = \frac{2{,}5 - 1}{7 - 4{,}5} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Şimdide bulduğumuz doğru üzerindeki 5 noktasının değerini hesaplayalım.

$$0{,}6 = \frac{f(5) - 1}{5 - 4{,}5} \Longrightarrow f(5) = 1{,}3$$

İkinci Derece Şerit

- Şekil gösterimin daha iyi anlaşılmasını sağlamak için çizilmiştir.



- Dikkat ederseniz n+1 adet nokta, n adet aralık vardır.
- Her bir aralık için hesaplanması gereken (a, b ve c) katsayıları olduğu için 3n adet bilinmeyen vardır.
- Bu 3n adet bilinmeyeni hesaplamak için 3n adet denklem yada koşul yazılması gerekir.

İkinci Dereceden Şerit

1. İç düğüm noktalarında birbirine komşu noktaların değerleri birbirine eşit olmak zorundadır. Bu koşul aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}) \qquad i = 2, \ldots, n \Longrightarrow 2n - 2\ denklem$$

1. İlk ve son fonksiyonlar uç noktalardan geçmek zorundadır. Bu **iki denklem** verir.

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

1. İç düğüm noktalarında birinci türevler birbirine eşit olmak zorundadır.

$$f'(x) = 2ax + b$$

Olur, böylelikle bu koşul genel olarak şöyle yazılabilir

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i$$

1. İlk noktada ikinci türevin sıfır olduğunu varsayabiliriz.

$$a_1 = 0$$

Bu koşullarda toplam denklem sayısı $\Longrightarrow 2n - 2 + 2 + n - 1 + 1 = 3n$

Örnek

x	f(x)
3	2,5
4,5	1
7	2,5
9	0,5

Bir önceki örnek veriye yine x=5'deki fonksiyon değerini bulmak için ikinci dereceden şerit geçiriniz.

Çözüm:

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}) \qquad i = 2,3 \Longrightarrow 4\ denklem$$

$$a_1x_1^2 + b_1x_1 + \mathrm{c}_1 = f(x_1) \Longrightarrow 20{,}25a_1 + 4{,}5b_1 + c_1 = 1$$
$$a_2x_1^2 + b_2x_1 + \mathrm{c}_2 = f(x_1) \Longrightarrow 20{,}25a_2 + 4{,}5b_2 + c_2 = 1$$
$$a_2x_2^2 + b_2x_2 + \mathrm{c}_2 = f(x_2) \Longrightarrow 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2{,}5$$
$$a_3x_2^2 + b_3x_2 + \mathrm{c}_3 = f(x_2) \Longrightarrow 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2{,}5$$

Örnek

x	f(x)
3	2,5
4,5	1
7	2,5
9	0,5

Çözüm Devam:

$$a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = f(x_0)$$
$$a_nx_n^2 + b_nx_n + c_n = f(x_n)$$
$$a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = f(x_0) \Longrightarrow 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2{,}5$$
$$a_3x_3^2 + b_3x_3 + c_3 = f(x_3) \Longrightarrow 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0{,}5$$
$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_{i-1} + b_ii = 2{,}3 \Longrightarrow 2\ denklem$$
$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2 \Longrightarrow 9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2$$
$$2a_2x_2 + b_2 = 2a_3x_2 + b_3 \Longrightarrow 14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3$$
$$a_1 = 0$$

$a_1 = 0$ olarak bilindiğini göre diğer sekiz değişken sekiz denklemin çözümü ile bulunur.

Örnek'in Devamı

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

These equations can be solved using techniques from Part Three, with the results:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0 & b_1 = -1 & c_1 = 5.5 \\ a_2 = 0.64 & b_2 = -6.76 & c_2 = 18.46 \\ a_3 = -1.6 & b_3 = 24.6 & c_3 = -91.3 \end{array}$$

which can be substituted into the original quadratic equations to develop the following relationships for each interval:

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = -x + 5.5 & 3.0 \le x \le 4.5 \\ f_2(x) = 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & 4.5 \le x \le 7.0 \\ f_3(x) = -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & 7.0 \le x \le 9.0 \end{array}$$

When we use f_2, the prediction for $x = 5$ is, therefore,

$$f_2(5) = 0.64(5)^2 - 6.76(5) + 18.46 = 0.66$$

Kübik Şerit 4n bilinmeyen

- *İç düğüm noktalarında birbirine komşu noktaların değerleri birbirine eşit olmak zorundadır.* Bu koşul aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$i = 2, \ldots, n \Longrightarrow 2n - 2 \; denklem$$

- *İlk ve son fonksiyonlar uç noktalardan geçmek zorundadır.* Bu iki denklem verir.

$$i = 2, \ldots, n \Longrightarrow 2n - 2 \; denklem$$

- *İç düğüm noktalarında birinci türevler birbirine eşit olmak zorundadır.*

$$i = 2, \ldots, n \Longrightarrow n - 1 \; denklem$$

- *İç düğüm noktalarında ikinci türevler birbirine eşit olmak zorundadır.*

$$i = 2, \ldots, n \Longrightarrow n - 1 \; denklem$$

- İlk noktada ve son noktada ikinci türevin sıfır olduğunu varsayabiliriz. (2 denklem)
- Toplam Denklem Sayısı: 4n, Bu denklemler çözülerek bilinmeyenler bulunur.

Kübik Şerit İnterpolasyon

- Kübik şerit interpolasyonu sadece ilgilendiğimiz aralık için geliştirebiliriz. Türetilmesi için kitabınızın ilgili bölümünde ek bilgiye ulaşabilirsiniz.

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})$$

Bu denklem iki bilinmeyen içermektedir. Uç noktaların ikinci türevi aşağıdaki denklem kullanılarak bulunabilir.

$$(x_i - x_{i-1})f_i''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f_i''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f_i''(x_{i+1}) = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_{i+1} - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

Örnek

x	f(x)
3	2,5
4,5	1
7	2,5
9	0,5

Bir önceki örnek veriye yine x=5'deki fonksiyon değerini bulmak için kübik şerit geçiriniz.

Çözüm:

$$(4,5-3)f_i''(3)+2(7-3)f_i''(4,5)+(7-4,5)f_i''(7)$$
$$=\frac{6}{7-4,5}[2,5-1]+\frac{6}{7-3}[2,5-1]$$
$$f_i''(3)=0$$
$$8f_i''(4,5)+2,5f_i''(7)=9,6$$

$$(7-4,5)f_i''(4,5)+2(9-4,5)f_i''(7)+(9-7)f_i''(9)$$
$$=\frac{6}{9-7}[f(9)-f(7)]+\frac{6}{9-4,5}[1-2,5]$$
$$f_i''(9)=0$$
$$2,5f_i''(4,5)+9f_i''(7)=-9,6$$

Örnek

- Elde edilen denklemlerin çözümünden

$$f''(4,5) = 1.67909\ ve f''(7) = -1,53308$$

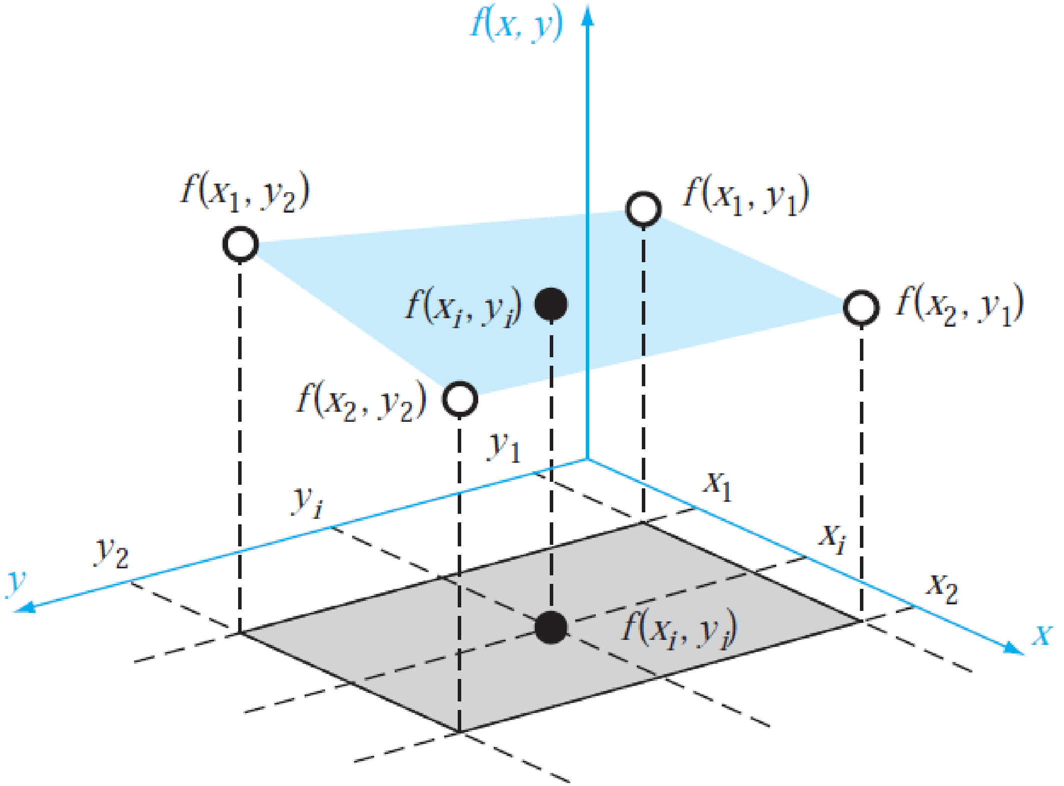
Elde edilir.

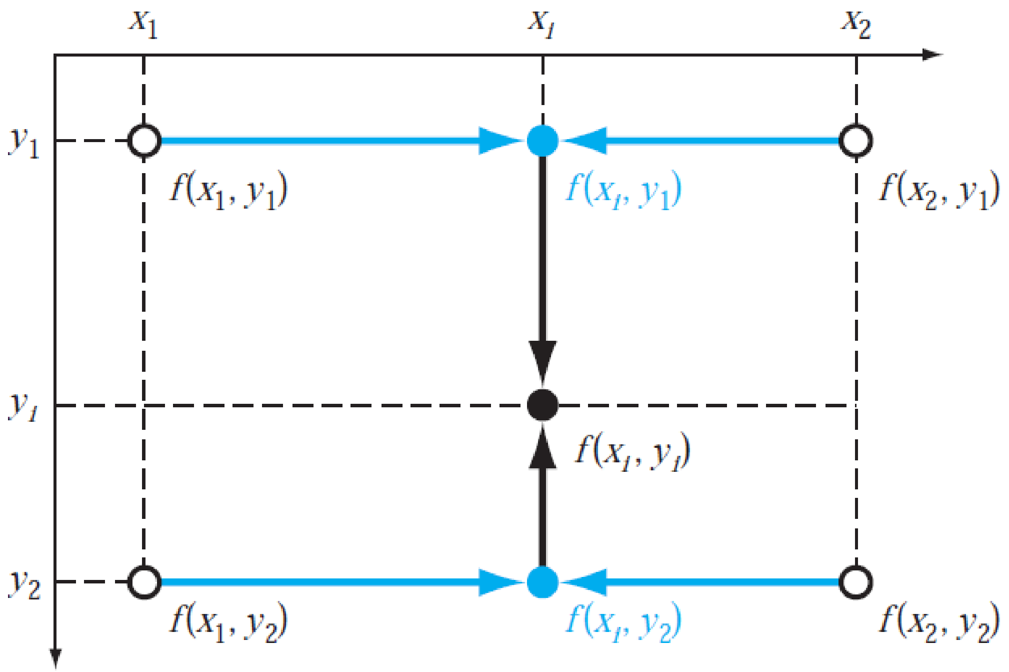
$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})$$

$$f_2(x) = 0.112(7 - \mathrm{x})^3 - 0,102(\mathrm{x} - 4,5)^3 - 0,3(7 - \mathrm{x}) + 1,64(\mathrm{x} - 4,5)$$

$$f_2(x) = 1,103$$

Çok Boyutlu İnterpolasyon





İki boyutlu İnterpolasyon

$z = f(x_i, y_i)$, şeklinde bir fonksiyonda bir ara değer bulmak istenirse iki boyutlu interpolasyon yapmak gerekir. Eğer şekildeki gibi dört nokta tanımlıysa bu noktalar kullanılarak ara bir değer için fonksiyonun değeri belirlenebilir. Bu yöntemin basit yaklaşımını soldaki şekilde görmüştük, formülasyon ise Lagrange formu kullanılarak şü şekilde üç basamakta bulunur.

$$f(x_i, y_1) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_1)$$

ve @ (x_i, y_2)

$$f(x_i, y_2) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_2)$$

Bu bulunan iki fonksiyon değeri üçüncü denklemde kullanılarak sonuç elde edilir.

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_i, y_1) + \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_i, y_2)$$

Örnek

Problem: Diktörtgen şeklinde, ısıtılmış bir levhanın dört köşesinden sıcaklık ölçümü yapılmıştır.

Sıcaklıklar sırasıyla

$$T(2,1) = 60; T(9,1) = 57.5; T(2,6) = 55; T(9,6) = 70$$

Diktörtgen üzerinde konumu (5.25,4.8) olan noktanın sıcaklığını bulunuz.

Çözüm:

$$f(5.25,1) = \frac{5.25-9}{2-9} f(2,1) + \frac{5.25-2}{9-2} f(9,1) \Longrightarrow 0.5357 * 60 + 0.4643 * 57.5 = 58.8384$$

$$f(5.25,6) = \frac{5.25-9}{2-9} f(2,6) + \frac{5.25-2}{9-2} f(9,6) \Longrightarrow 0.5357 * 55 + 0.4643 * 70 = 61.9645$$

$$f(5.25,4.8) = \frac{4.8-6}{1-6} f(5.25,1) + \frac{4.8-1}{6-1} f(5.25,6) \Longrightarrow 0.24 * 58.8384 + 0.76 * 61.9645$$
$$= 61.2142$$

$$f(5.25,4.8) = 61.2142$$