

MÜHENDİSLİKTE SAYISAL YÖNTEMLER

Kısmi Diferansiyel Denklemler

Dr. Öğretim Üyesi Nurdan Bilgin

Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Mühendislik Uygulamaları

- İki veya daha fazla bağımsız değişkenli, bilinmeyen bir fonksiyonun kısmi türevlerini içeren bir denklem *kısmi diferansiyel denklem* (veya *KDD*) olarak adlandırılır. Örneğin,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

- Hem x hem y 'ye bağlı olan u fonksiyonunun herhangi bir (x, y) noktasındaki x 'e göre kısmi türevi aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

- Benzer şekilde, y 'ye göre kısmi türevde aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}$$

Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Mühendislik Uygulamaları

- Kısmi diferansiyel denklemler, değişken sayısına, en yüksek kısmi türevin derecesine, doğrusal olup olmama durumuna göre veya katsayılarının sabit veya parametrik oluşuna göre çok farklı şekilde sınıflandırılabilirler.
- Her bir farklı kısmi diferansiyel denklem, kendine özgü yöntemleri gerektirir.
- Mühendislikte çok yaygın kullanım alanı olmasından dolayı, biz sadece doğrusal ikinci dereceden denklemler üzerinde duracağız.
- İki bağımsız değişken için bu tip denklemler aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0 \quad (*)$$

- Burada A, B, C ve D sabit sayılar değildirler.
- A, B ve C x ve y 'nin fonksiyonu
- D ise $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ nin fonksiyonudur.
- (*) denklemini, A, B ve C 'nin değerlerine bağlı olarak üç farklı şekilde kategorize edilirler.

Kısmi Diferansiyel Denklemler

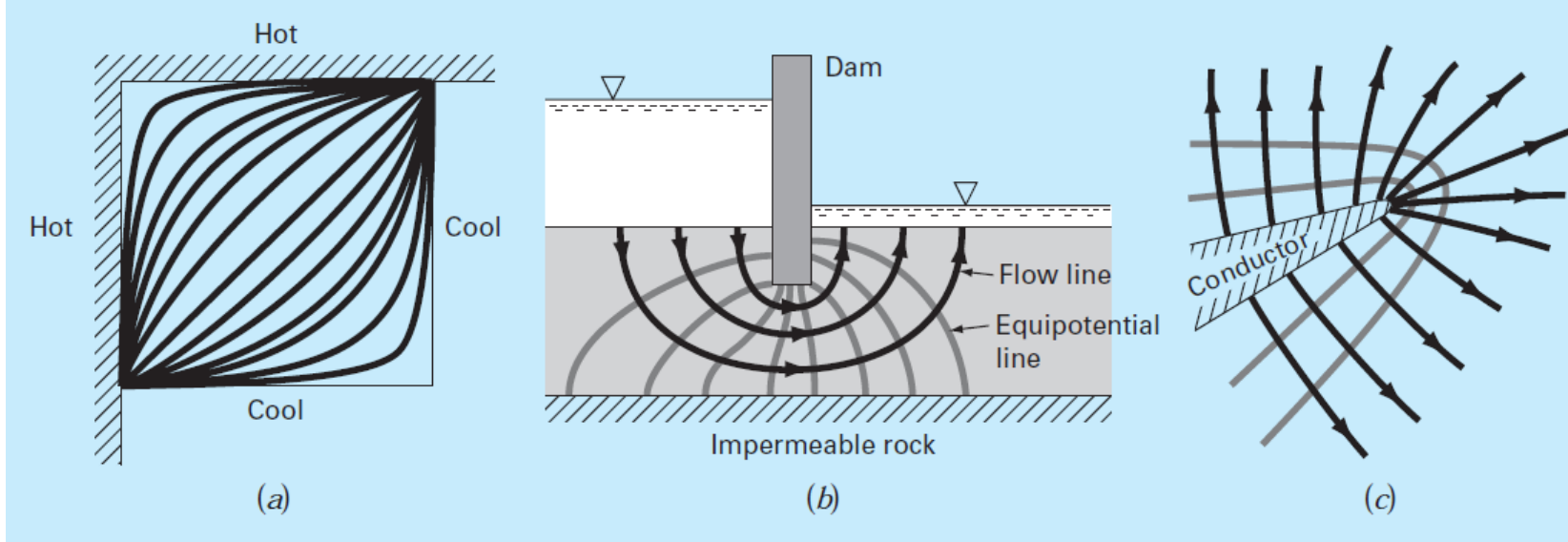
- (*) denklemi ile tanımlı doğrusal ikinci dereceden diferansiyel denklemin ayrılacağı kategoriler aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

$B^2 - 4AC$	Category	Example
< 0	Elliptic	Laplace equation (steady state with two spatial dimensions) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabolic	Heat conduction equation (time variable with one spatial dimension) $\frac{\partial T}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
> 0	Hyperbolic	Wave equation (time variable with one spatial dimension) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Kısmi Diferansiyel Denklemler

- Tablodaki, kısmi diferansiyel denklem kategorilerinin her biri özel bir mühendislik problemine denk gelmektedir.
- **Eliptik denklemler** genellikle kararlı hal sistemlerini karakterize etmek için kullanılır.
- Kararlı hale neden olan durum, zamana göre türevin yokluğudur.
- Bu nedenle, bu denklemler özel olarak iki boyutlu bir bilinmeyenin kararlı dağılımını hesaplamak için kullanılır.

Üç farklı Kararlı-Durum Problemi (eliptik denklemler)



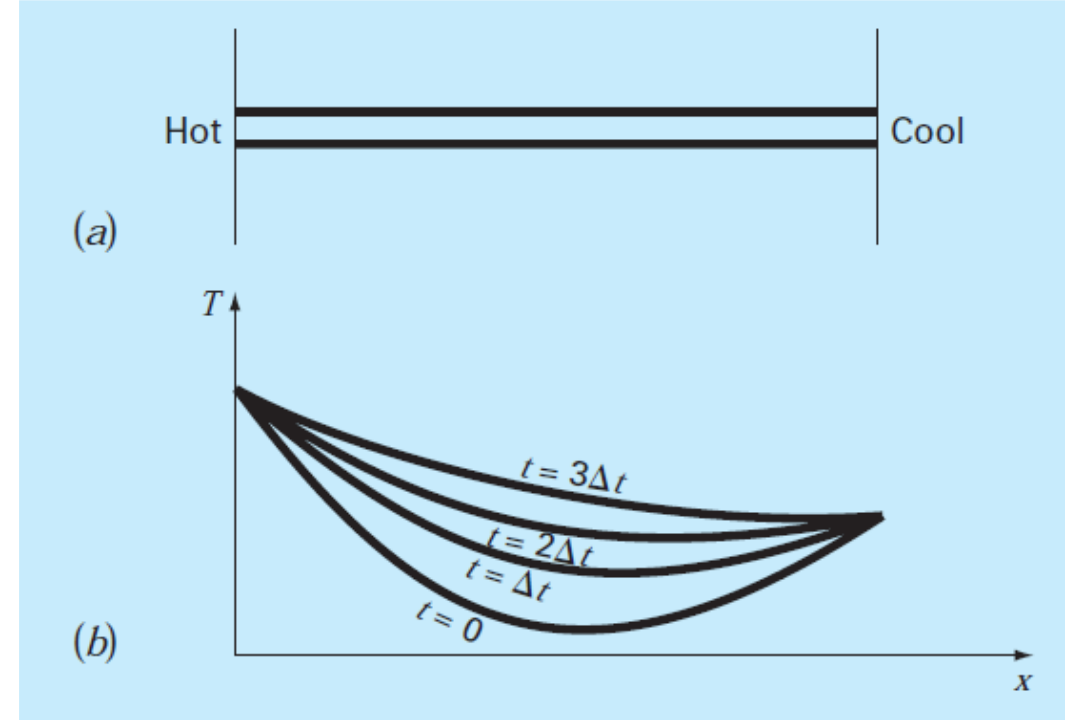
- Şekil (a) ısıtılan plaka problemini göstermektedir. Plakanın sınırları farklı sıcaklıklardadır. Isı yüksek sıcaklıktan düşüğe doğru aktığından, sınır koşulları ısının sıcak sınırlardan soğuğa doğru akmasını sağlayan potansiyellerdir. Yeteri kadar zaman geçerse, bu tür bir sistem, şekil (a)'da gösterildiği gibi kararlı veya dengeli bir sıcaklık dağılımına erişecektir.
- Şekil (b) bir baraj altındaki su sızıntısı problemini göstermektedir
- Şekil (c) bir iletken yanındaki elektrik alanının dağılımı problemini göstermektedir.
- Uygun sınır koşullarıyla Laplace denklemi, bu dağılımları hesaplamak için uygulanabilir

Kısmi Diferansiyel Denklemler

- Tablodaki, kısmi diferansiyel denklem kategorilerinin her biri özel bir mühendislik problemine denk gelmektedir.
- **Parabolik denklemler** bir bilinmeyeninin hem zamanla hem konumla nasıl değiştiğini belirler.
- Bu durum, tablodaki ısı iletimi denkleminde, hem zamana hem de konuma göre türevlerin varlığından bellidir.
- Bu tür durumlar, çözüm zamanla değiştiği veya “yayıldığı” için yayılma problemleri diye adlandırılır.

Örnek bir **Parabolik Durum** Problemi

- Şekil (a), uçları dışında her tarafı yalıtılmış olan uzun, ince bir çubuk problemini göstermektedir. Yalıtım, çubuk uzunluğu boyunca ısı kaybı nedeniyle oluşacak karmaşıklıktan kaçınmak içindir. Önceki slaytta gördüğümüz, ısıtılan plaka için olduğu gibi, çubuğun uçları sabit sıcaklıktadır. Ancak, ordaki durumun tersine, çubuğun inceliği, ısının çubuğun kesit alanı boyunca - yani yanal doğrultuda düzenli dağıldığını varsaymamızı olanaklı kılar. Dolayısıyla, yanal ısı akısı söz konusu değildir ve problem, çubuğun boyuna eksenini boyunca ısı iletiminin incelenmesine indirgenir. İki boyutlu olarak kararlı hal dağılımına odaklanmak yerine, problem bir boyutlu dağılımın zamanın fonksiyonu olarak nasıl değiştiğinin (Şekil (b)) belirlenmesine dönüşmüştür.
- Böylece çözüm, çubuğun farklı zamanlardaki durumuna karşılık gelen bir dizi yerel dağılımdan ibarettir.



Özet ifade !!!

Eliptik durum bir sistemin kararlı durumunun bir portresini verir,
Parabolik durum, bir durumdan diğerine değişimin nasıl olduğunu gösteren hareketli bir resim verir.

Kısmi Diferansiyel Denklemler

- Tablodaki, en son kısmi diferansiyel denklem kategorisi hiperbolik denklemlerdir.
- **Hiperbolik denklemler**'de parabolik denklemler gibi yayılma problemlerinin çözümü için kullanılırlar, ancak tablodaki dalga denkleminin de belirttiği gibi
- Bilinmeyenler zamana göre ikinci türevle karakterize edilirler.
- Sonuç olarak çözüm salınır.



- Yukarıdaki şekildeki titreşen yay, dalga denklemiyle tanımlanabilecek basit bir fiziksel modeldir.
- Çözüm, yayın salındığı bir takım karakteristik durumları içerir.
- Mühendislik sistemlerinin çoğu bu modelle karakterize edilebilirler.
 - Çubukların ve kirişlerin titreşimi,
 - akışkan dalgalarının hareketi,
 - Sesin ve elektrik sinyallerinin iletilmesi gibi

Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

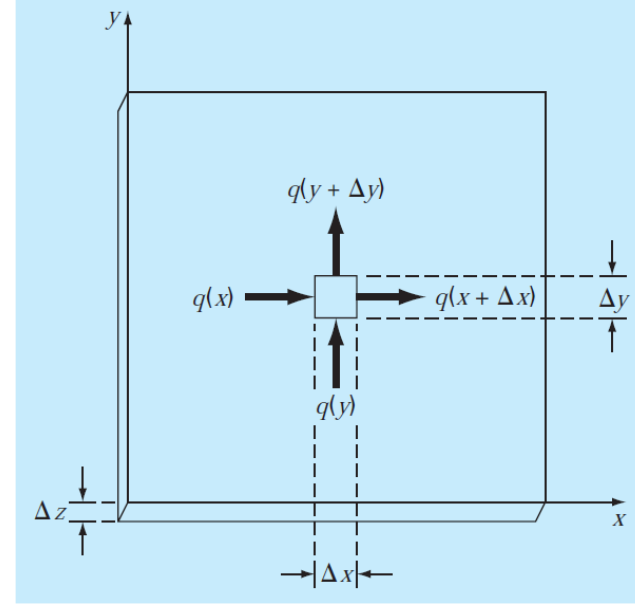
- **Eliptik ve Parabolik KDD**'lerin sonlu fark yaklaşımları ile çözümü,
- **Sonlu fark yaklaşımları**, sonlu sayıda noktada çözüme yaklaşma temeline dayanmaktadır.
- **Hiperbolik denklemlerin** sonlu eleman yöntemleri ile çözümü,
- **Sonlu eleman yöntemi**, çözüm bölgesini basitçe şekillendirilmiş parçalara veya "elemanlara" ayırır, her bir elemanda KDD'nin çözümü yapılır, daha sonra birleşik çözüm eleman sınırlarında süreklilik sağlanmasına dikkat edilerek bir araya getirilir.

Sonlu Fark: Eliptik Denklemler

- Eliptik denklemlerin sonlu fark çözümlerine geçmeden önce, Isıtılan bir plakadaki sıcaklık dağılımını içeren fiziksel problem için Laplace denklemini türeteceğiz.
- Daha sonra, çözüm yöntemlerini tartışacağız
 - Laplasiyen Fark Denklemi
 - Liebmann Yöntemi
 - İkincil Değişkenler
- Ardından sınır koşullarını tartışacağız.
- En Kontrol Hacmi Yaklaşımını öğreneceğiz.

Isıtılan Bir Plakadaki Sıcaklık Dağılımı

- Plaka her yerinden yalıtılmıştır, ancak uçları belli bir sıcaklıkta tutulabilmektedir.
- Plakanın yalıtılması ve inceliği, ısı transferinin sadece x ve y doğrultusunda olacağı kabulüne izin verir.
- Kararlı halde, birim Δt zamanında, birim elemana giren ısı akısı çıkana eşit olmak zorundadır.



$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y)\Delta x\Delta z\Delta t = q(x + \Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y + \Delta y)\Delta x\Delta z\Delta t \quad (*)$$

- Burada $q(x)$ ve $q(y)$ x ve y 'deki ısı akılarıdır. (*) denklemini Δz ve Δt 'ye bölünüp denklem düzenlenirse

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} = 0 \quad (**)$$

- (**) denkleminin limiti alınırsa (***) denklemini elde edilir.

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (***)$$

Isıtılan Bir Plakadaki Sıcaklık Dağılımı

- Elde edilen (***) denklemini plaka için enerjinin korunumunu ifade eden kısmi diferansiyel denklemdir. Ancak, plakanın kenarlarındaki ısı akıları tanımlanmadığı sürece bu denklem çözülemez. Sınır koşulları sıcaklık olarak verildiği için (***) denklemini sıcaklığa göre yeniden formüle etmek gerekmektedir.
- Akı ve sıcaklık arasındaki ilişki, aşağıdaki gibi ifade edilebilen *Fourier'nin ısı iletimi yasası* ile tanımlanır:

$$q_i = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i} \quad (4 *)$$

Burada

$q \rightarrow$ i doğrultusundaki ısı akısı [$cal/(cm^2 \cdot s)$],

$k \rightarrow$ ısı yayılım katsayısı [cm^2/s],

$\rho \rightarrow$ malzemenin yoğunluğu [g/cm^3],

$C \rightarrow$ malzemenin özgül ısı [$cal/(g \cdot ^\circ C)$] ve

$T \rightarrow$ sıcaklık ($^\circ C$) olup aşağıdaki gibi tanımlanır

$$T = \frac{H}{\rho CV}$$

Isıtılan Bir Plakadaki Sıcaklık Dağılımı

- Elde edilen aşağıdaki sıcaklık ifadesinde

$$T = \frac{H}{\rho CV}$$

$H \rightarrow$ ısı (cal) ve $V \rightarrow$ hacim (cm^3). (4*) diferansiyel denklemin önündeki terim bazen tek bir terim olarak alınır $k' = k\rho C$ ve $k' \rightarrow$ ısı iletim katsayısı [$cal/(s \cdot cm \cdot ^\circ C)$], olarak adlandırılır.

- $q_i = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i}$ (4 *) denklemini, $-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$ (***) denkleminde yerine yazılırsa, (5*) denklemini elde edilir.

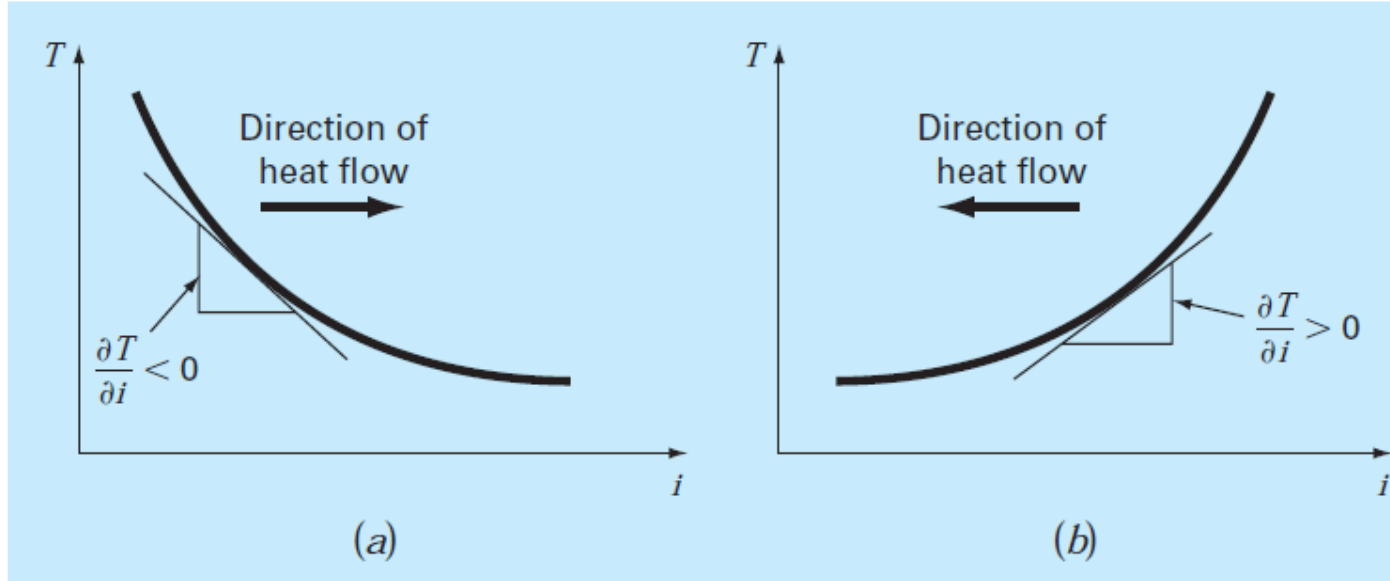
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5 *)$$

- İki boyutlu bölgede ısı kaynakları veya ısı kuyularının olduğu durumlar için bu denklem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (6 *)$$

- Burada $f(x, y)$, ısı kaynağı ya da kuyusunu tanımlayan bir fonksiyondur. (6*) denklemini Poisson denklemini özel adıyla da bilir.

Isıtılan Bir Plakadaki Sıcaklık Dağılımı



Sıcaklık gradyeninin grafik açıklaması: Isı yüksek sıcaklıktan düşüğe doğru aşağı yönde hareket ettiği için, (a)'daki akış i doğrultusunda pozitif yönde soldan sağa doğrudur. Ancak Kartezyen koordinatların konumundan dolayı, bu durumda eğim negatiftir. Bu nedenle negatif bir gradyen pozitif bir ısı akısına neden olur. Bu, Fourier ısı iletimi yasasındaki eksi işaretinin nedenidir. Ters durum (b)'de açıklanmış olup pozitif bir gradyen sağdan sola doğru negatif bir ısı akısı oluşturur.

$$q_i = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i} \quad (4^*)$$

- (4*) denkleminin incelenmesi, i eksenine dik yöndeki ısı akısının i doğrultusundaki sıcaklık eğimi veya gradyeniyle orantılı olduğunu göstermektedir. Denklem başındaki (-) eksi işareti, i doğrultusundaki pozitif bir ısı akısının, negatif eğimden dolayı yüksek sıcaklıktan düşük sıcaklığa doğru akacağını göstermektedir.

Çözüm Yöntemleri: Laplasiyen Fark Denklemleri

- Bu çözüm yönteminde, plakayı ayırık noktaların bir ızgarası gibi düşünüyoruz.
- Izgara üzerinde merkezi sonlu farklar açılımını kullanıyoruz.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

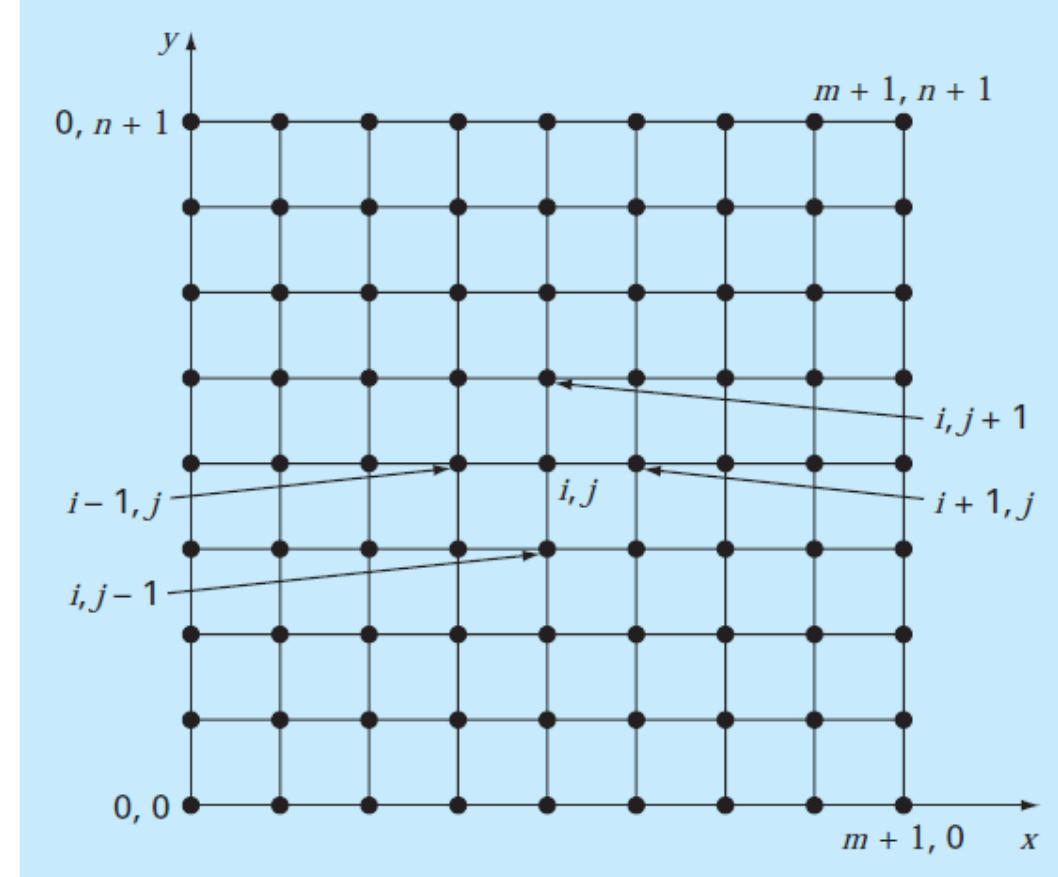
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

Eğer ızgara şekilde gösterildiği gibi kare bir ızgara ise $\Delta x = \Delta y$ dir. Yukarıdaki denklem yeniden düzenlenirse

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Elde edilir. Plakadaki tüm iç noktalar için geçerli olan bu bağlantıya ***laplasiyen fark denklemi*** adı verilir.



Örnek: Laplasiyen Fark Denklemleri

- Şekildeki gibi sınır sıcaklıklarınınin sabit tutulduğu (*Diriclet sınır koşulu*) ısıtılan bir plakada, iç noktaların sıcaklıklarını laplasiyen fark formülü kullanarak bulunuz.

- $(i, j) = (1, 1)$ için.

$$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0$$

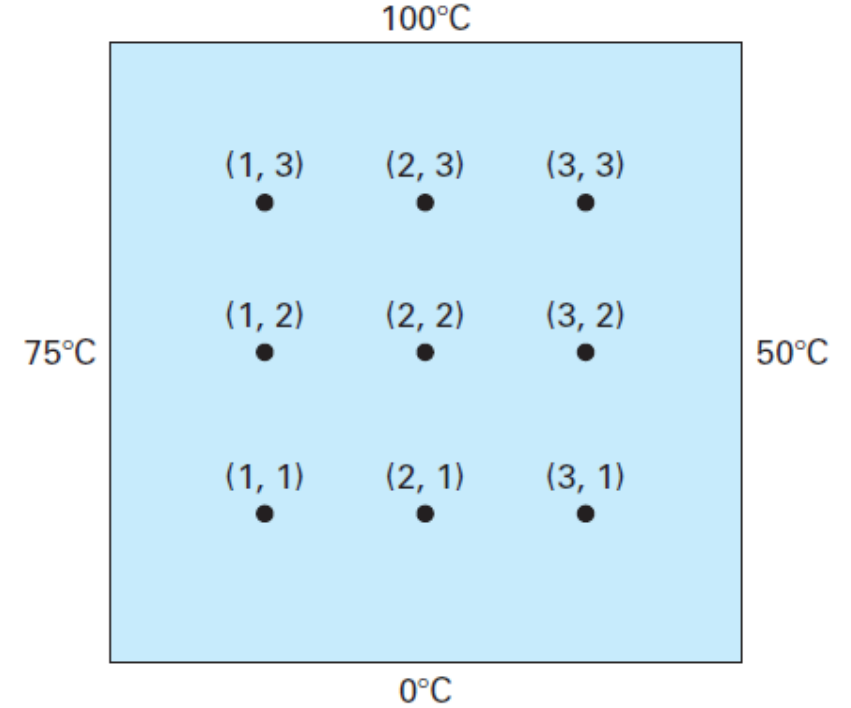
$$T_{2,1} + 75 + T_{1,2} + 0 - 4T_{1,1} = 0$$

$$T_{2,1} + T_{1,2} - 4T_{1,1} = -75$$

- $(i, j) = (2, 1)$ için.

$$T_{3,1} + T_{1,1} + T_{2,2} + 0 - 4T_{2,1} = 0$$

$$T_{3,1} + T_{1,1} + T_{2,2} - 4T_{2,1} = 0$$

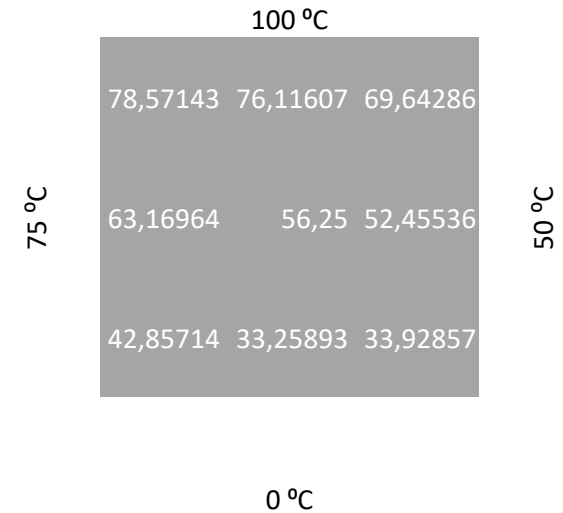


Örnek Devam: Laplasiyen Fark Denklemleri

4	-1	0	-1	0	0	0	0	0	$0T_{11}$	75	T_{11}	42,85714
-1	0	0	4	-1	0	-1	0	0	$0T_{12}$	0	T_{12}	63,16964
0	0	0	-1	0	0	4	-1	0	$0T_{13}$	50	T_{13}	78,57143
-1	4	-1	0	-1	0	0	0	0	$0T_{21}$	75	T_{21}	33,25893
0	-1	0	-1	4	-1	0	-1	0	$0T_{22}$	0	T_{22}	56,25
0	0	0	0	-1	0	-1	4	-1	$-1T_{23}$	50	T_{23}	76,11607
0	-1	4	0	0	-1	0	0	0	$0T_{31}$	175	T_{31}	33,92857
0	0	-1	0	-1	4	0	0	0	$-1T_{32}$	100	T_{32}	52,45536
0	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	$4T_{33}$	150	T_{33}	69,64286



$$\begin{aligned}
 4T_{11} - T_{21} - T_{12} &= 75 \\
 -T_{11} + 4T_{21} - T_{31} - T_{22} &= 0 \\
 -T_{21} + 4T_{31} - T_{32} &= 50 \\
 -T_{11} + 4T_{12} - T_{22} - T_{13} &= 75 \\
 -T_{21} - T_{12} + 4T_{22} - T_{32} - T_{23} &= 0 \\
 -T_{31} - T_{22} + 4T_{32} - T_{33} &= 50 \\
 -T_{12} + 4T_{13} - T_{23} &= 175 \\
 -T_{22} - T_{13} + 4T_{23} - T_{33} &= 100 \\
 -T_{32} - T_{23} + 4T_{33} &= 150
 \end{aligned}$$



Çözüm Yöntemi: Liebmann Yöntemi

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

- Gauss-Siedel ile iteratif olarak şu şekilde çözülebilir.

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

- Her iterasyondan sonra çözümün hızını artırmak için aşağıdaki yaklaşım benimsenebilir.

$$T_{i,j}^{yeni} = \lambda T_{i,j}^{yeni} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{eski}$$

- Burada $T_{i,j}^{yeni}$ ve $T_{i,j}^{eski}$, sırasıyla $T_{i,j}$ 'nin mevcut ve bir önceki iterasyondaki değerlerini göstermektedir. λ ise 1-2 arasında değişen bir ağırlık katsayısıdır.
- Hata istenen orana inene kadar iterasyon tekrarlanır; yüzde bağıl hata ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$|(\varepsilon_a)_{i,j}| = \left| \frac{T_{i,j}^{yeni} - T_{i,j}^{eski}}{T_{i,j}^{yeni}} \right| \times 100$$

Örnek: Liebmann Yöntemi

- Bir önceki problemi, Liebmann yöntemi ile çözün $\lambda = 1.5$ ve ε_a yüzde 1'in altına inince durun.
- $(i, j) = (1,1)$ için.

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} = \frac{0 + 75 + 0 + 0}{4} = 18.75$$

$$T_{i,j}^{yeni} = \lambda T_{i,j}^{yeni} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{eski} = 1.5 * 18.75 + (1 - 1.5)0 = 28.125$$

- $(i, j) = (2,1)$ için.

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} = \frac{0 + 28.125 + 0 + 0}{4} = 7.03125$$

$$T_{i,j}^{yeni} = \lambda T_{i,j}^{yeni} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{eski} = 10.54$$

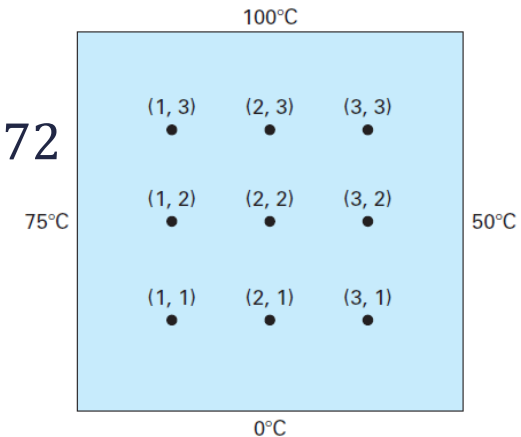
- $(i, j) = (3,1)$ için.

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} = \frac{50 + 10.54 + 0 + 0}{4} = 15.13672$$

$$T_{i,j}^{yeni} = \lambda T_{i,j}^{yeni} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{eski} = 22.70508$$

Hesaplamalar diğer adımlar içinde yapılırsa

$T_{12} = 38.67188$	$T_{22} = 18.45703$	$T_{32} = 34.18579$
$T_{13} = 80.12696$	$T_{23} = 74.46900$	$T_{33} = 96.99554$



Örnek Devam: Liebmann Yöntemi

- İlk iterasyonda doğal olarak hatalar %100 olacaktır.
- İkinci iterasyona geçilirse aşağıdaki değerler elde edilir.

$$\begin{array}{lll} T_{11} = 32.51953 & T_{21} = 22.35718 & T_{31} = 28.60108 \\ T_{12} = 57.95288 & T_{22} = 61.63333 & T_{32} = 71.86833 \\ T_{13} = 75.21973 & T_{23} = 87.95872 & T_{33} = 67.68736 \end{array}$$

$$|(\varepsilon_a)_{1,1}| = \left| \frac{T_{i,j}^{yeni} - T_{i,j}^{eski}}{T_{i,j}^{yeni}} \right| \times 100 = \left| \frac{32.51953 - 28.125}{32.51953} \right| \times 100 = \%13.5$$

Elde edilen hata yüzdesi %1'den büyük olduğuna göre devam edilmesi gerekmektedir. **Dokuzuncu** iterasyonun sonunda aşağıdaki sonuca **% 0.71** hataya ulaşılır.

$$\begin{array}{lll} T_{11} = 43.00061 & T_{21} = 33.29755 & T_{31} = 33.88506 \\ T_{12} = 63.21152 & T_{22} = 56.11238 & T_{32} = 52.33999 \\ T_{13} = 78.58718 & T_{23} = 76.06402 & T_{33} = 69.71050 \end{array}$$

Örnek Devam: Liebmann Yöntemi

	100	100	100	
75	78,57142857	76,11607143	69,64285714	50
75	63,16964286	56,25	52,45535714	50
75	42,85714286	33,25892857	33,92857143	50
	0	0	0	

İvmelendirme amacıyla kullanılan katsayılar olmadan, excel'de iteratif çözüm sekmesini aktif ederseniz yukarıdaki çözüme ulaşabilirsiniz.

Çözüm Yöntemi: İkincil Değişkenler

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

- Denkleminde sıcaklık birincil değişken, ısı akısı ise ikincil değişkendir. Eğer problemle ilgilenen kişinin asıl amacı sıcaklık dağılımını değil de ısı akısı dağılımını bulmak ise bunu yapabilir.
- Şöyle ki $q_i = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i}$ denklemini hatırlayalım; buradaki $\frac{\partial T}{\partial i}$ ifadesini merkezi farklarla açarsak

$$q_x = -k\rho C \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

ve

$$q_y = -k\rho C \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta y}$$

- Ortaya çıkan ısı akısının büyüklüğü $q_n = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$; yönüde $\theta = \text{atan2}(q_y, q_x)$ ifadeleri ile bulunabilir.

Sınır Koşulları

- **Türev Sınır Koşulu** (Neumann sınır koşulu): Kenarın yalıtıldığı durumu ifade eder.

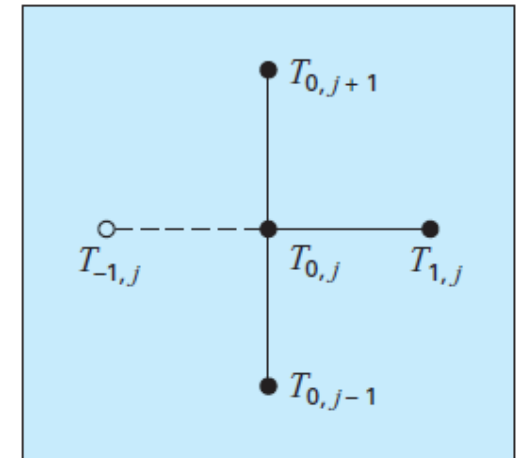
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

- Başka problemlerde, türevin sıfırdan farklı olduğu durumlarda olabilir, belirli bir ısı kaybı gibi
- Çözüm son derece basit; ızgarayı 0'dan sonraya -1'i de kapsayacak şekilde genişletiyoruz.
- $(i, j) = (0, j)$ için.

$$T_{1,j} + T_{-1,j} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} - 4T_{0,j} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{1,j} - T_{-1,j}}{2\Delta x} \Rightarrow T_{-1,j} = T_{1,j} - 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$2T_{1,j} - 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} - 4T_{0,j} = 0$$



Örnek: Sınır Koşulları

- Önceki problemi, plakanın alt tarafı yalıtılmış olarak $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ yeniden çözün.

Çözüm: $(i, j) = (i, 0)$ için

$$T_{i+1,0} + T_{i-1,0} + T_{i,1} + T_{i,-1} - 4T_{i,0} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,1} - T_{i,-1}}{2\Delta y} \Rightarrow T_{i,-1} = T_{i,1} - 2\Delta y \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$T_{i+1,0} + T_{i-1,0} + 2T_{i,1} - 2\Delta y \frac{\partial T}{\partial y} - 4T_{i,0} = 0$$

$$T_{i+1,0} + T_{i-1,0} + 2T_{i,1} - 4T_{i,0} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & -2 & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -2 & & & & & & \\ & -1 & 4 & & & -2 & & & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & & & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 & & \\ & & & -1 & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & & & & -1 & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & & & & -1 & & 4 & -1 & & \\ & & & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{10} \\ T_{20} \\ T_{30} \\ T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \\ 50 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 175 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} T_{10} = 71.91 & T_{20} = 67.01 & T_{30} = 59.54 \\ T_{11} = 72.81 & T_{21} = 68.31 & T_{31} = 60.57 \\ T_{12} = 76.01 & T_{22} = 72.84 & T_{32} = 64.42 \\ T_{13} = 83.41 & T_{23} = 82.63 & T_{33} = 74.26 \end{array}$$

Sınır Koşulları

- Düzensiz Sınırlar: Düzensiz sınıra sahip bir plaka üzerinde ızgaralama yapılır ve ağırlık katsayıları yardımıyla düzensiz sınırlar hesaba katılabilir şöyle ki;

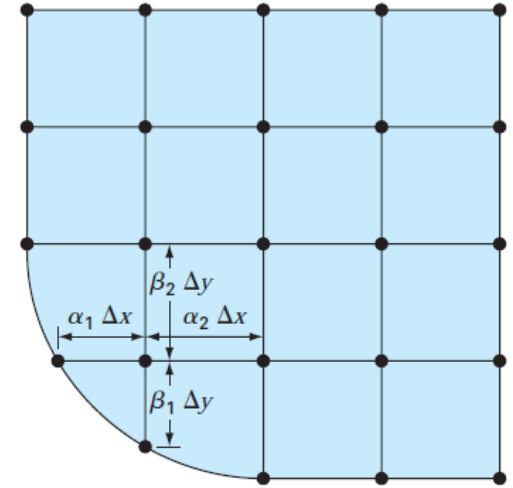
$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1,i} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\alpha_1 \Delta x}; \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,i+1} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 \Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,i+1} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1,i}}{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2 \frac{\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 \Delta x} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\alpha_1 \Delta x}}{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2 \frac{\frac{\alpha_1 \Delta x T_{i+1,j} - \alpha_1 \Delta x T_{i,j} - \alpha_2 \Delta x T_{i,j} + \alpha_2 \Delta x T_{i-1,j}}{\alpha_2 \Delta x \alpha_1 \Delta x}}{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x} = \frac{2}{\Delta x^2} \left[\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} \right]$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2}{\Delta y^2} \left[\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\beta_1 (\beta_1 + \beta_2)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\beta_2 (\beta_1 + \beta_2)} \right]$$



Sınır Şartları

- Düzensiz sınırlar için aşağıdaki KDD bir aşağısındaki yeni formu ile ifade edilebilir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{2}{\Delta x^2} \left[\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] + \frac{2}{\Delta y^2} \left[\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\beta_1(\beta_1 + \beta_2)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\beta_2(\beta_1 + \beta_2)} \right] = 0$$

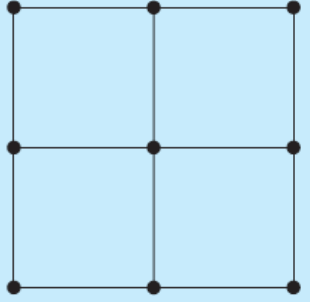
- Önceki problemi, plakanın alt sol tarafı düzensiz olarak çözümlen. $\alpha_1 = \beta_1 = 0.732$ ve $\alpha_2 = \beta_2 = 1$
- Bu değerler $(i,j)=(1,1)$ noktası için yerine konulursa yukarıdaki eşitlikten

$$-4T_{1,1} + 0.8453T_{2,1} + 0.8453T_{1,2} = -1.1547T_{0,1} - 1.1547T_{1,0}$$

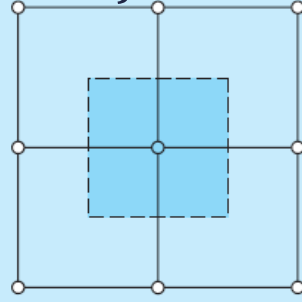
$$\begin{bmatrix} 4 & -0.845 & -0.845 & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & 4 & & & & & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & -1 & & & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & -1 & & & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & & \\ & & & -1 & & 4 & -1 & & & \\ & & & & -1 & & 4 & -1 & & \\ & & & & & -1 & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & & & & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 173.2 \\ 75 \\ 125 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 175 \\ 100 \\ 150 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} T_{11} = 74.98 & T_{21} = 72.76 & T_{31} = 66.07 \\ T_{12} = 77.23 & T_{22} = 75.00 & T_{32} = 66.52 \\ T_{13} = 83.93 & T_{23} = 83.48 & T_{33} = 75.00 \end{array}$$

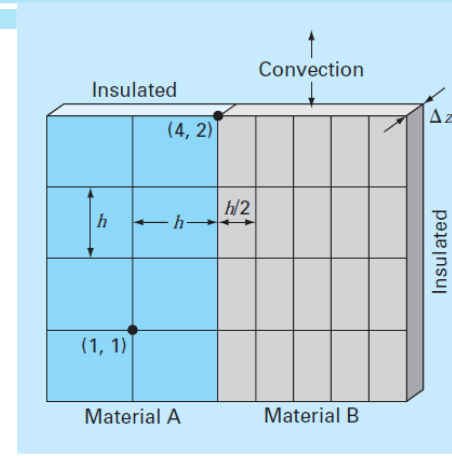
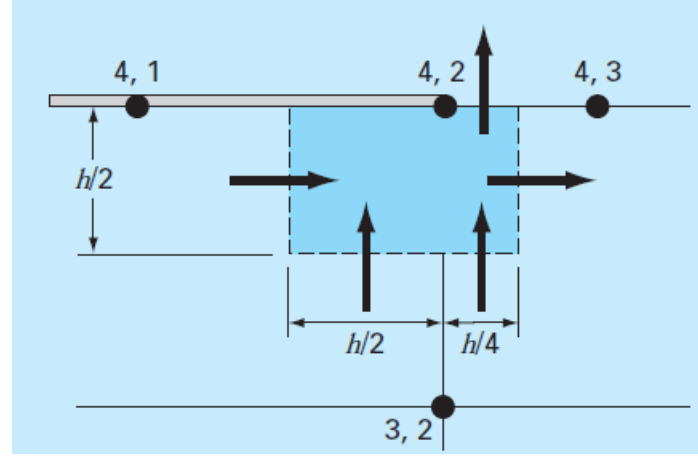
Kontrol Hacmi Yaklaşımı



(a) Pointwise, finite-difference approach



(b) Control-volume approach



$$0 = \left(\begin{array}{c} \text{sol taraf} \\ \text{iletimi} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{sağ taraf} \\ \text{iletimi} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{alt iletim} \\ \text{malzeme "a"} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{alt iletim} \\ \text{malzeme "b"} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{üst} \\ \text{taşınım} \end{array} \right)$$

Sol taraftaki iletim kazancı

$$q = -k'_a \frac{T_{42} - T_{41}}{h}$$

Hacme birim zamanda giren toplam ısı $akı * \Delta z * h/2$ ile bulunur.

$$Q = -k'_a \frac{T_{42} - T_{41}}{2} \Delta z$$

Taşınım ile ısı akısı aşağıdaki gibi formüleleştirilebilir.

$$q = h_c(T_a - T_{42})$$

Isı akısı ilgili alan $* \Delta z * h/4$ ile çarpılarak birim zamandaki ısı akımı

$$Q = h_c(T_a - T_{42})\Delta z \cdot h/4$$

Diğer ifadelerde benzer şekillerde geliştirilerek nihai denklem şekildeki gibi elde edilir.

$$0 = -k'_a \frac{T_{42} - T_{41}}{h} \frac{h}{2} \Delta z + k'_b \frac{T_{43} - T_{42}}{h/2} \frac{h}{2} \Delta z$$

(left-side conduction) (right-side conduction)

$$-k'_a \frac{T_{42} - T_{32}}{h} \frac{h}{2} \Delta z - k'_b \frac{T_{42} - T_{32}}{h} \frac{h}{4} \Delta z + h_c(T_a - T_{42}) \frac{h}{4} \Delta z$$

(lower conduction material "a") (lower conduction material "b") (upper convection)