MÜHENDİSLİKTE SAYISAL YÖNTEMLER

Adi Diferansiyel Denklemler

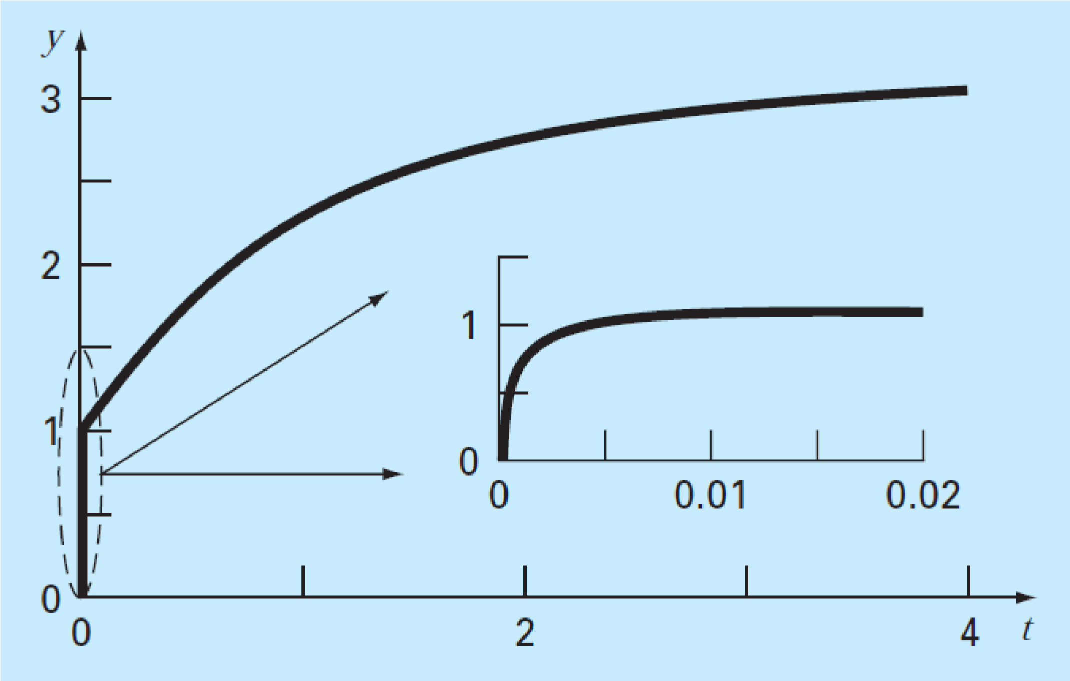
Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Bu bölümde Tartışacağımız Konular

- Bu bölümde *başlangıç değer problemlerinin çözümü* için sayısal yöntemler ele alınacaktır.
- *Adımlı yöntemler,* verilen bir diferansiyel denklemden ve yi'den hareketle yi+1'i hesaplamaya dayanmaktadır. Runge Kutta tekniği diye adlandırılırlar.
  - Euler Yöntemi
  - Heun Tekniği Yöntemi
  - Orta Nokta Yöntemi
  - Runge-Kutta (veya RK)
  - Adım büyüklüğünü otomatik olarak ayarlayan uyarlanmış RK yöntemi
- *Çok adımlı yöntemler* ise, i'dekilerden başka ek y değerlerini de gerektirmektedir. Katı ADD'lerin çözümünde kullanılırlar.
- Katı ADD'ler hem tek hem de sistem halinde olan ADD'lerdir ve çözümleri için *hem hızlı hem de yavaş bileşenler* vardır.
  - Kendiliğinden Başlamayan Heun Yöntemi
- Ardından, *sınır-değer* ve *özdeğer problemlerini* tartışacağız. İlki için *tahmin* ve *sonlu fark yöntemleri*nin her ikisini de tanıtacağız. İkincisi için: *polinom* ve *üslü yöntemler* dahil olmak üzere farklı yaklaşımları tartışacağız.
- Son olarak bu derste, ADD'lerin ve özdeğerlerin çözümünde matlab uygulamalarından bahsedeceğiz
- Mühendislik uygulamaları ile ilgili örnekler çözeceğiz.

Katılık ve Çok Adımlı Yöntemler

- Katı (Stiff) ADD’ler hızlı ve yavaş değişen bileşenlere sahiptirler.
- Genellikle, hızlı değişen bileşenler çok kısa süreli ve geçici olup hızla ortadan kaybolurlar
- Ardından çözümde yavaş değişkenler egemen olur.
- Hızlı değişen bileşenler sadece çok kısa süreli görünse bile, tüm çözüm için zaman adımını etkileyebilir.



Katılık

Örnek üzerinden açıklamak daha kolay olabilir,

$$\frac{dy}{dt} = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}$$

Eğer $y(0) = 0$ ise analitik çözüm;

$$y = 3 - \underbrace{0.998e^{-1000t}}_{\substack{t<0.005'e\ kadar \\ etkili}} - 2.002e^{-t}$$

Sonrasında denklem

$$y = 3 - 2.002e^{-t}$$

Gibi davranmaya başlar çünkü ortadaki terimin değeri sıfıra yaklaşmıştır. Bu problemde çözümün kararlılığı için gerekli adım büyüklüğünün ne olması gerektiğinin anlaşılması açısından analitik çözüme başvurabiliriz. Denklemin homojen kısmına bakacak olursak.

$$\frac{dy}{dt} = -1000y \Rightarrow y = y_0 e^{-at}$$

Çözüm y_0'da başlar ve asimptotik olarak sıfıra yaklaşır.

Katılık

Problemi sayısal olarak çözmek için

- Yeterince küçük adım seçmek problemi çözer; aksi halde çözüm kararsız olur.
- Problemin belirli bölgesinde, küçük adım daha sonra büyük adım seçmek sistemi kararsız yapabilir, iyi bir çözüm önerisi değildir.

Bu tür problemlerin çözümü için farklı yöntemler geliştirilmiştir.

- Kapalı Euler Yöntemi
- Kendiliğinden Başlamayan Heun Yöntemi

Kapalı Euler Yöntemi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_{i+1}}{dt}h$$

Bu, ifade *geriye doğru* veya *kapalı Euler yöntemi* diye adlandırılır. Denklemin homojen kısmı$\frac{dy_{i+1}}{dt} = -ay_{i+1}$ yukarıda yerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$y_{i+1} = y_i - ay_{i+1}h$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 + ah}$$

Bu durumda $i \to \infty, |y_i| \to 0$

Bu nedenle bu yaklaşım ***koşulşuz olarak kararlıdır.***

Örnek

$$\frac{dy}{dt} = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}$$

Örneğini $h = 0.0005, h = 0.002$ ve $h = 0.003$ olmak üzere tam çözüm, açık çözüm ve kapalı çözüm için inceleyelim.

Çözüm;

Tam çözüm;

$$y_i = 3 - 0.998e^{-1000t_i} - 2.002e^{-t_i}$$

Açık Euler Yöntemi

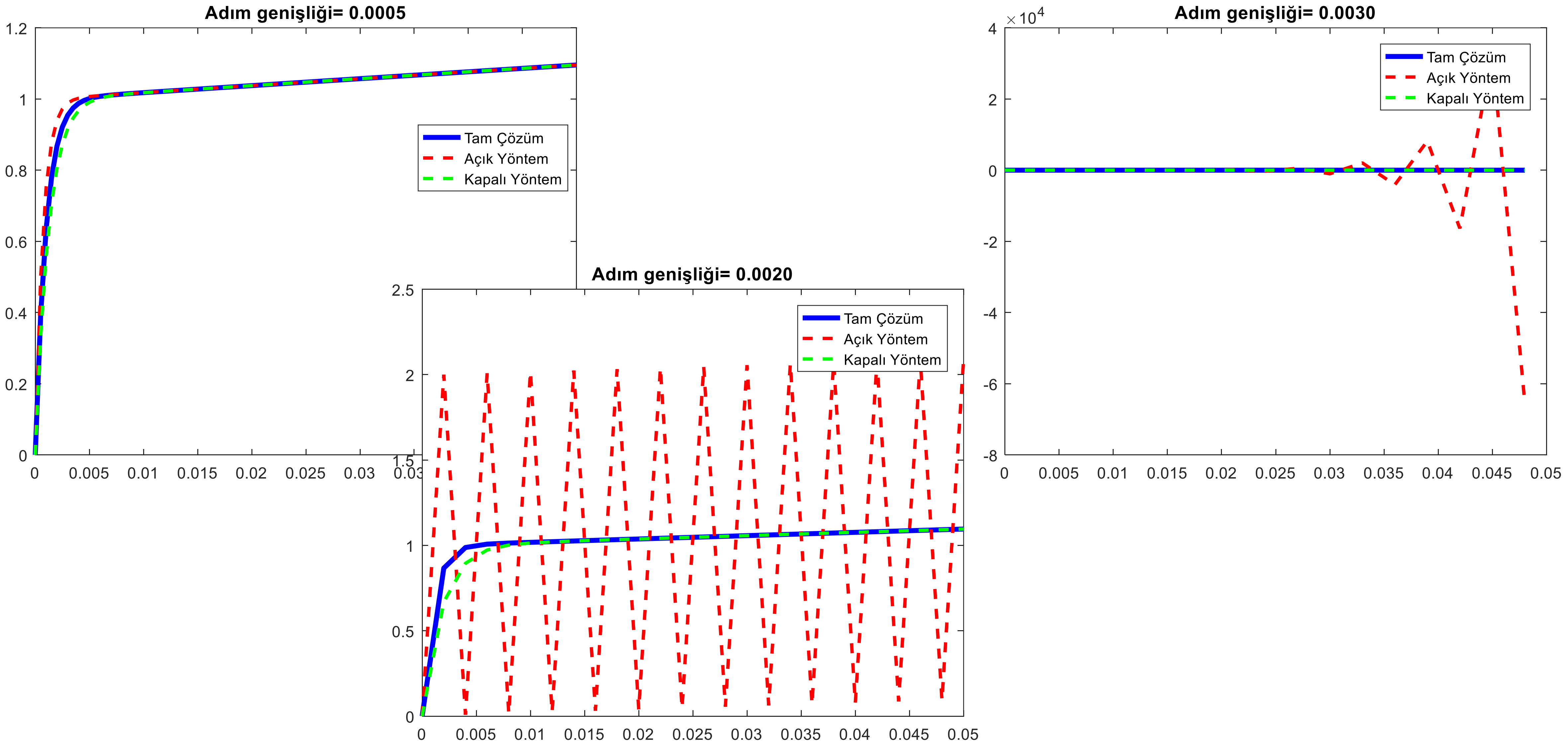
$$y_{i+1} = y_i + (-1000y_i + 3000 - 2000e^{-t_i})h$$

Kapalı Euler Yöntemi

$$y_{i+1} = y_i + (-1000y_{i+1} + 3000 - 2000e^{-t_{i+1}})h$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i + (3000 - 2000e^{-t_{i+1}})h}{1 + 1000h}$$

Örnek Çözüm



Adım genişliği= 0.0005
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
Tam Çözüm
Açık Yöntem
Kapalı Yöntem
Adım genişliği= 0.0020
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
0.035
0.04
0.045
0.05
Tam Çözüm
Açık Yöntem
Kapalı Yöntem
Adım genişliği= 0.0030
$\times 10^4$
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
0.035
0.04
0.045
0.05
Tam Çözüm
Açık Yöntem
Kapalı Yöntem

Çok Adımlı Yöntemler

- Adımlı yöntemler, sadece bir sonraki değeri tahmin etmek i.in içinde bulunulan adımın bilgisini kullanmaktadır.
- Çok adımlı yöntemler ise daha önce türetilmiş olan bilgiyide kullanarak daha iyi tahmin yaparlar.
- Örneğin «Kendiliğinden başlamayan Heun» yöntemi hem içinde bulunulan adımı hem de ondan bir önceki adımı kullanarak tahmin yapar.
- Bu konuda geliştirilmiş bir dizi yöntem vardır, ancak gerekli olduğunda başvurmak üzere varlıklarını bilmemiz yeterlidir.
- Gerekli adım uzunluğunu doğru belirlemek bilgisayarların bu denli hızlı olmadığı zamanlarda önemli bir konu iken bugün pratikte seçilen adım uzunluğunu yarıya bölerek ve/veya ikiye katlayarak denemeler yapıp sonuçları gözlemlemek yeterli olmaktadır.

Kendiliğinden Başlamayan Heun Yöntemi

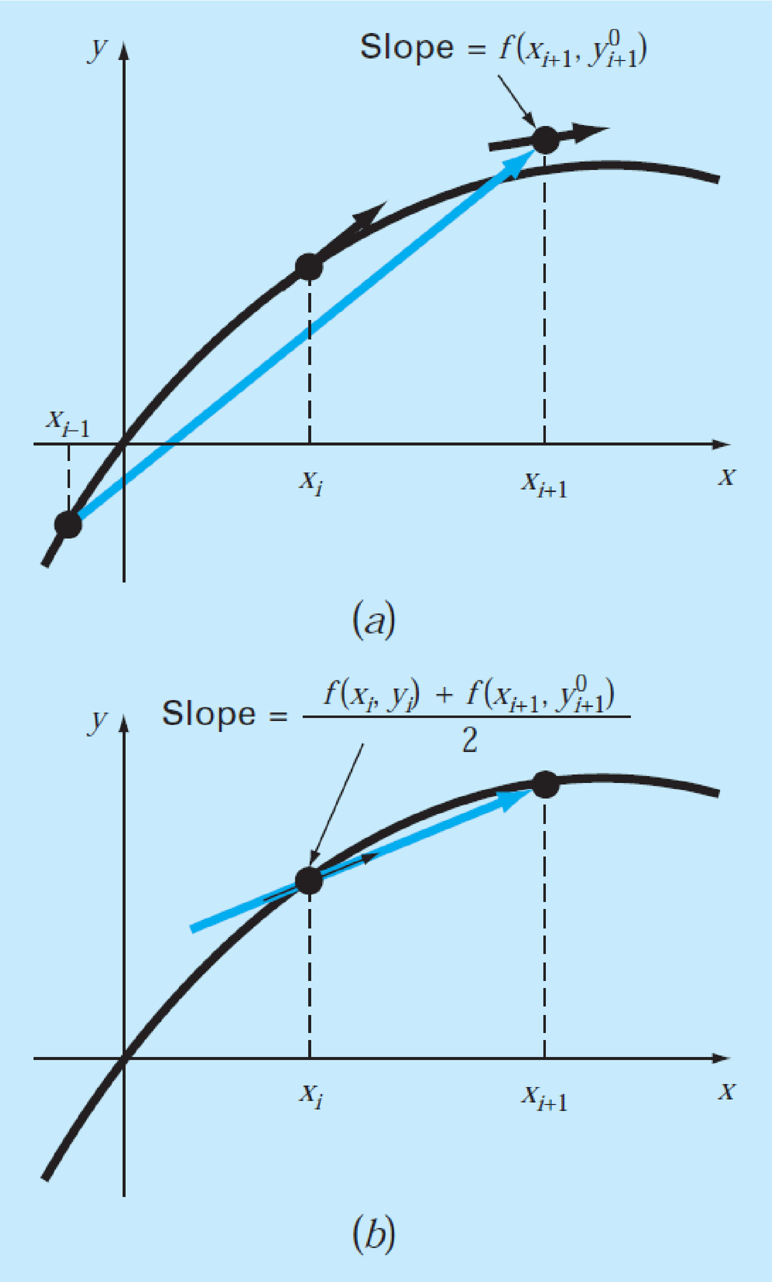
- Çok adımlı yöntemler, i'dekilerden başka ek y değerlerini de gerektirmektedir.
- Katı ADD'lerin çözümünde kullanılırlar.
- Klasik Heun Yönteminin iyileştirmenin bir yolu, yerel hatası $O(h^3)$ olan bir deneme adımı gerçekleştirmektir bunun için ek y_{i-1} değerine ihtiyaç duyulur.

Deneme adımı (Şekil a)

$$y_{i+1}^0 = y_{i-1} + f(x_i, y_i)2h$$

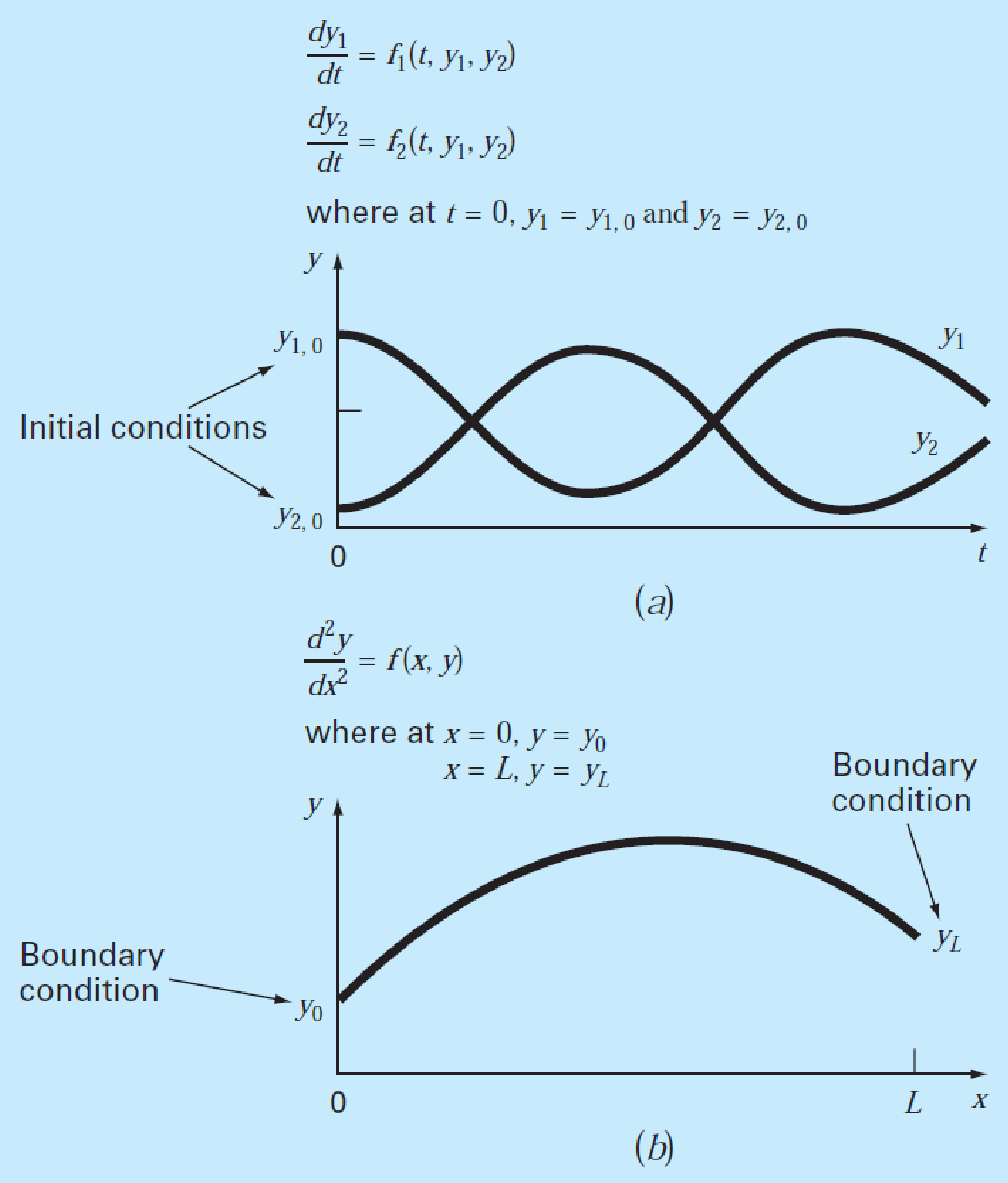
Düzeltme adımı (Şekil b)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$



Sınır Değer ve Özdeğer Problemleri

- Herhangi bir ADD'yi çözmek için yardımcı koşullara ihtiyacımız vardır.
- Bu koşullar denklemi çözerken ortaya çıkan integral sabitlerini hesaplamakta kullanılır.
- n'inci dereceden bir denklem için n adet koşul gereklidir.
- Koşullar bağımsız değişkenin aynı değeri için tanımlanmışsa problemimiz *başlangıç değer problemidir (şekil a).*
- Koşullar bağımsız değişkenin farklı noktaları için verilmişse problemimiz *sınır değer problemidir (şekil b).*



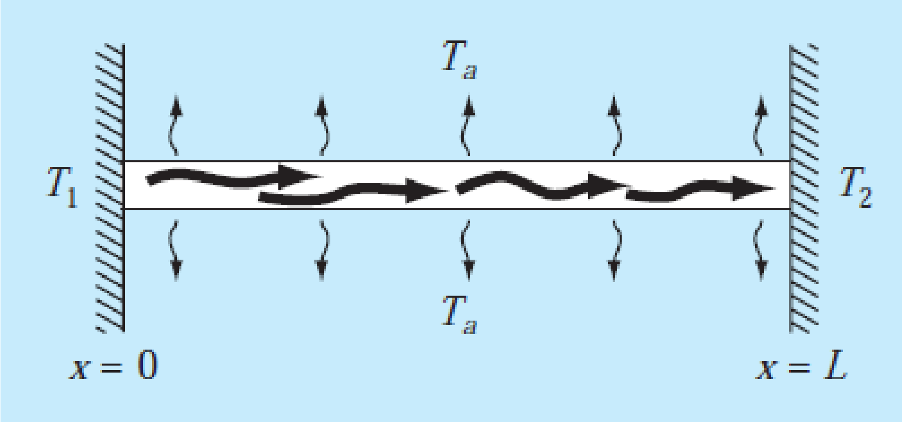
Analitik Çözüm

Uzun ince yalıtılmamış çubuğun ısı dağılımı için verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemin.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

$T_a = 20,\ T(0) = 40\ ve\ T(L) = 200$ sınır değerleriyle analitik çözümü aşağıdaki gibidir.

$$T = 73.4523e^{0.1x} - 53.4523e^{-0.1x} + 20$$



Tahmin Yöntemi

Çözüm:

Sınır değer olarak; $T(0) = 40$ ve $T(10) = 200$ değerleri verilmiş olsun.

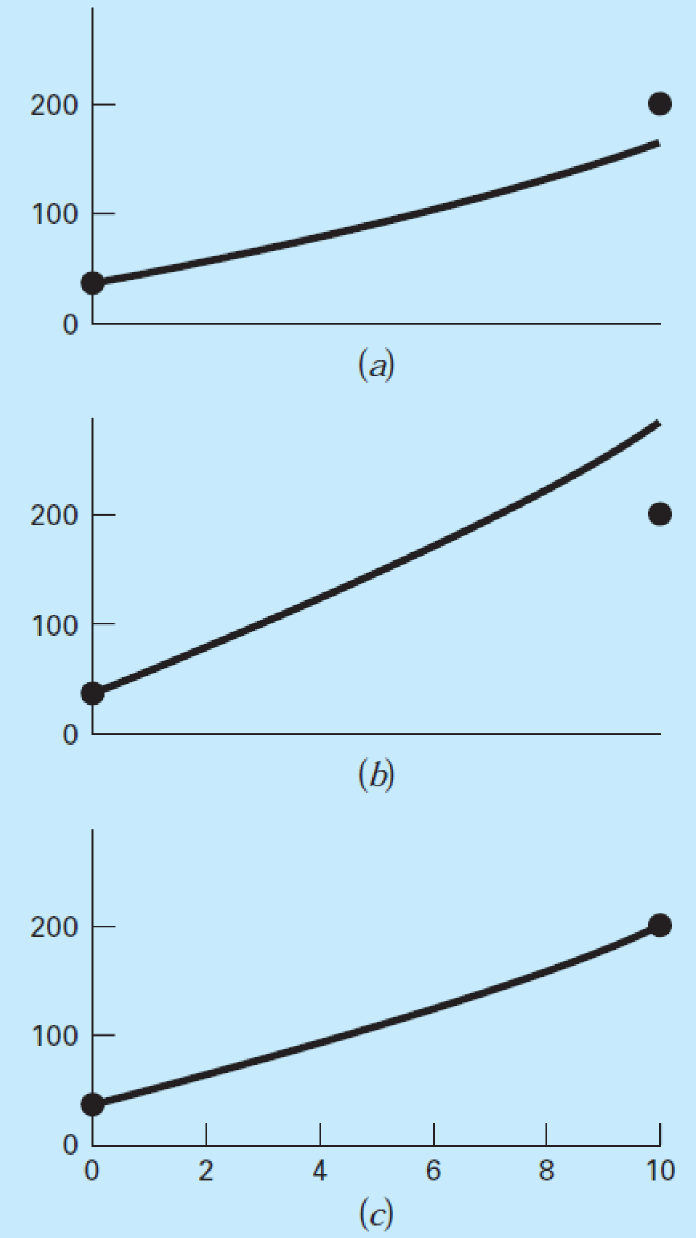
Tahmin yöntemi, bilinmeyen $z(0)$ değerinin tahmin edilmesine dayanır.

İlk tahmin $z(0) = 10$ olsun çözüm sonucu $T(10) = 168.3797$'yi verir

İkinci Tahmin $z(0) = 20$ olsun çözüm sonucu $T(10) = 285.8980$'i verir.

Bu iki tahminden, doğrusal interpolasyon yoluyla $T(10) = 200$'ü verecek $z(0)$ değerine ulaşılabilir.

$$z(0) = 10 + \frac{20 - 10}{285.8980 - 168.3797}(200 - 168.3797) = 12.69$$



Sonlu Fark Yöntemleri

- Diğer bir sınır değer problemini dönüştürme yaklaşımı sonlu fark yöntemidir. Orijinal ADD'deki türevler yerine sonlu fark açılımlarından biri konularak sistem cebirsel bir denklem haline dönüştürülür.
- Örneğin Uzun ince yalıtılmamış çubuğun ısı dağılımı için türetilmiş diferansiyel denkleminde merkezi sonlu bölünmüş fark formülü kullanarak aşağıdaki yaklaşık ifade elde edilebilir:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

- Bu yaklaşımı diferansiyel denklemde yerine yazarsak

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + h'(T_a - T_i) = 0$$

- Terimler düzenlenirse;

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_a$$

Elde edilir.

Örnek

- Problem: Aşağıdaki diferansiyel denklemi T(0)=40, T(10)=200, Ta=20 ve h'=0.01 verilerini baz alarak merkezi sonlu fark açılımını kullanarak çözünüz.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

- Çözüm: $-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_a$ denklemini $\Delta x = 2$ aralıkları kullanarak 4 düğüm noktası için çözelim.
- i=1

$$-40 + (2 + 0.01 * 2^2)T_1 - T_2 = 0.01 * 2^2 * 20$$
$$2.04T_1 - T_2 = 40.8$$

- i=2

$$-T_1 + (2.04)T_2 - T_3 = 0.8$$

- i=3

$$-T_2 + (2.04)T_3 - T_4 = 0.8$$

- i=4

$$-T_3 + (2.04)T_4 - 200 = 0.8$$
$$-T_3 + (2.04)T_4 = 200.8$$

Örnek

Bu dört denklemi matris formuna getirirsek;

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{bmatrix}$$

Bu matris çözülürse;

$$T^T = [65.9698 \; 93.7785 \; 124.5382 \; 159.4795]$$

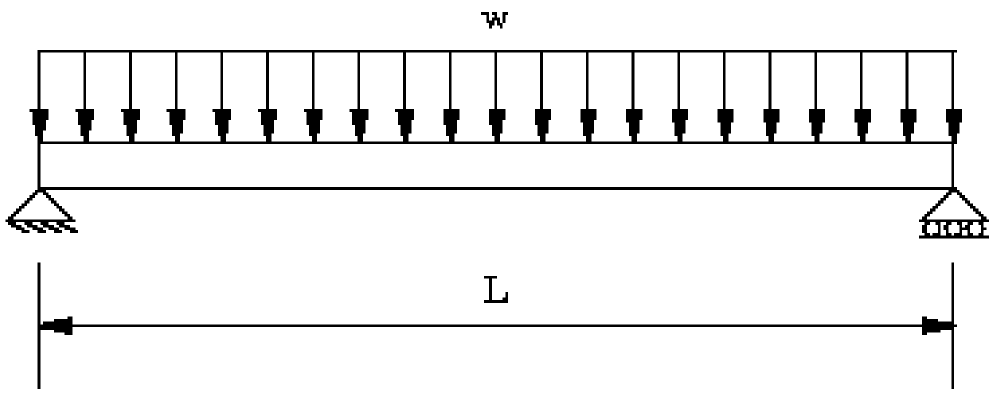
elde edilir.

Sonlu Fark Yöntemi

- Problem: Eşit yayılı yük altında iki ucundan mesnetlenmiş kirişin sehim ifadesini veren diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2}Lx - \frac{w}{2}x^2$$

- $I = 3.35 \times 10^{-4}\ m^4, w = 15\ kN/m\ , L = 3\ m$ ve sınır değer koşulları $y(0) = 0$ ve $y(L) = 0$ olarak verildiğine göre dört düğüm noktası ve merkezi sonlu fark açılımı kullanarak kirişdeki sehimi hesaplayınız.



Sonlu Fark Yöntemi

- Çözüm:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$

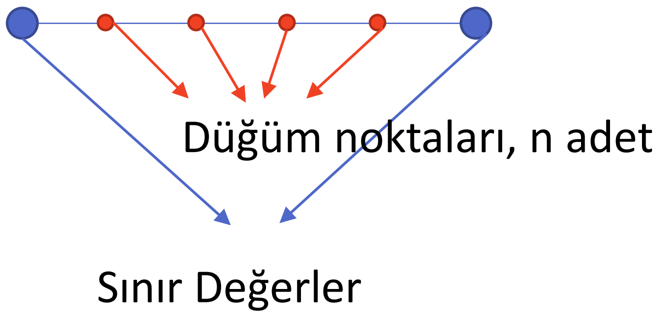
$$EI\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{w}{2}Lx - \frac{w}{2}x^2$$

- Denklem düzenlenirse;

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{w}{2EI}\Delta x^2 Lx - \frac{w}{2EI}\Delta x^2 x^2$$

$$\Delta x = \frac{L}{n+1} = \frac{3}{5} = 0.6; \quad x_i = i * \Delta x$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.527 \times 10^{-5} \\ 8.290 \times 10^{-5} \\ 8.290 \times 10^{-5} \\ 5.527 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$



E=	2,1E+11
I=	0,000335
w=	15000
DX=	0,6
w*DX^2/2EI=	3,83795E-05

L=	3		
i	x	x^2	Değer
1	0,6	0,36	5,52665E-05
2	1,2	1,44	8,28998E-05
3	1,8	3,24	8,28998E-05
4	2,4	5,76	5,52665E-05

Sonlu Fark Yöntemi

		L=	3				-2	1	0	0		-0,00014		-0,13817
E=	2,1E+11	i	x	x^2	Değer		1	-2	1	0		-0,00022		-0,22107
I=	0,000335	1	0,6	0,36	5,52665E-05	A=	0	1	-2	1	y (metre)=	-0,00022	y(mm)=	-0,22107
w=	15000	2	1,2	1,44	8,28998E-05		0	0	1	-2		-0,00014		-0,13817
DX=	0,6	3	1,8	3,24	8,28998E-05									
DX^2/2EI=	3,83795E-05	4	2,4	5,76	5,52665E-05									
							-0,8	-0,6	-0,4	-0,2				
							-0,6	-1,2	-0,8	-0,4				
						A^{-1}=	-0,4	-0,8	-1,2	-0,6				
							-0,2	-0,4	-0,6	-0,8				

Özdeğer Problemleri

$$[A]x = \{B\}$$

Probleminde $[A]$ tekil değilse problemi sağlayan tek bir x değeri bulunabilmekte idi. Oysa

$$[A]x = 0$$

Probleminde, birden fazla çözüm olabilir. Bu tip denklemlerin çözümünde özdeğerlerden yararlanırız.

$$[|A - \lambda I|]x = 0$$

Örnek

Yay kuvveti etkisi ile salınan kütlelerin dinamik denklemleri çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki difarensiyel denklemler elde edilir.

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - k(-2x_1 + x_2) = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k(x_1 - 2x_2) = 0$$

Titreşim kuramından

$$x_i = A_i \sin(\omega t)$$

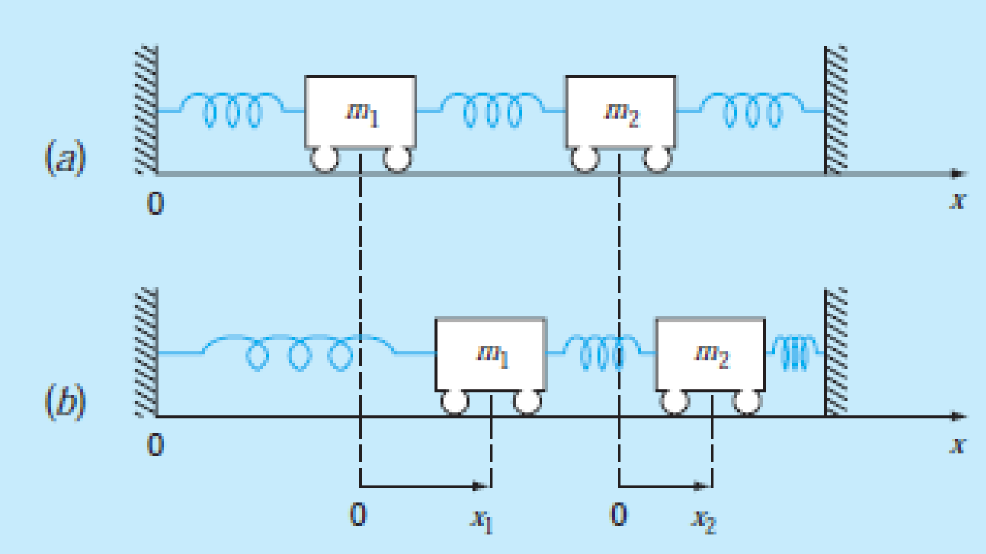
A genlik, ω frekans.

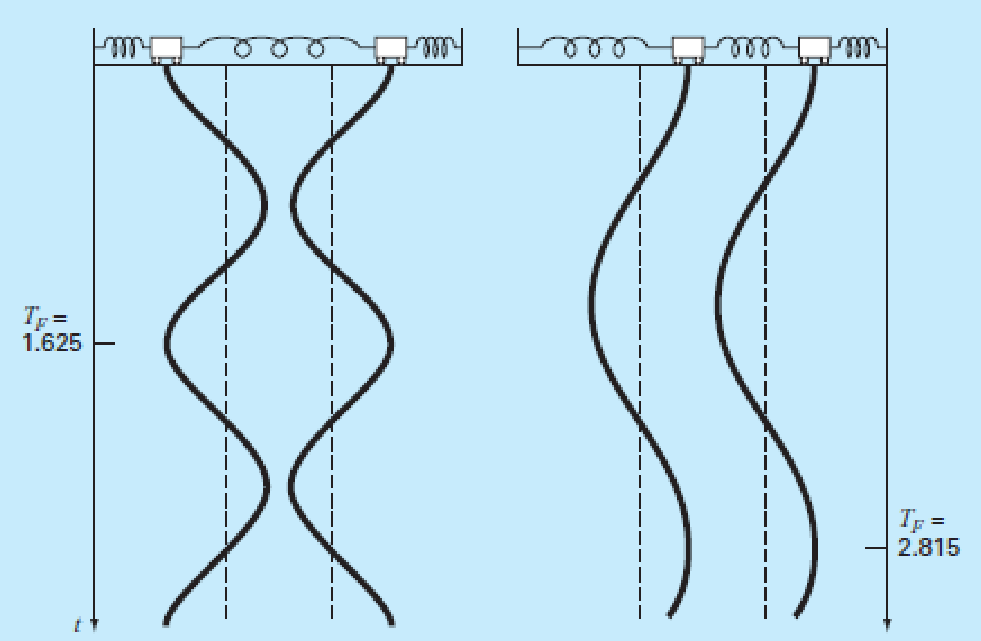
$$x''_i = -A_i \omega^2 \sin(\omega t)$$

Böylece aşağıdaki denklem sistemi oluşur.

$$\left(\frac{2k}{m_1} - \omega^2\right) A_1 - \frac{k}{m_1} A_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m_2} A_1 + \left(\frac{2k}{m_2} - \omega^2\right) A_2 = 0$$





(a) First mode (b) Second mode

Örnek

Aşağıdaki denklem sistemini $m_1 = m_2 = 40\ kg$ ve $k = 200\ N/m$ için çözelim.

$$\left(\frac{2k}{m_1} - \omega^2\right) A_1 - \frac{k}{m_1} A_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m_2} A_1 + \left(\frac{2k}{m_2} - \omega^2\right) A_2 = 0$$

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 10-\omega^2 & -5 \\ -5 & -(10-\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\omega^2)^2 - 20\omega^2 + 75 = 0$$

$$\omega^2 = 15\ ve \omega^2 = 5 \Longrightarrow$$

$$\omega = 3.873\ s^{-1}\ (Birinci\ mode)\ ;$$

$$\omega = 2.236\ s^{-1} (İkinci\ mode)$$

Birinci mode için çözüm $A_1 = -A_2\ ve\ T_p = 1.62\ s$

İkinci mode için çözüm $A_1 = A_2\ ve\ T_p = 2.81\ s$