Modern Kontrol

Veren kişi

Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Durum Uzayı Formunda Kontrol Sistemleri Tasarımı

Bu bölümde

Kutup yerleştirme yöntemi

Gözlemci Tasarımı

Kuadratik Optimal Regülatör Sistemleri Tasarımı ve

Gürbüz (Robust) Kontrol Sistemlerine Giriş

Şeklinde alt bölümler ile durum uzayı formunda kontrol sistemleri tasarımına giriş yapmaktadır.

Kutup Yerleştirme Yöntemi

Kutup yerleştirme yöntemi, kök-yer eğrisi yöntemine benzerdir. Her ikisinde de kapalı çevrim sistemin kutuplarının tasarım isterlerini karşılayacak yerlere yerleştirilmesi hedeflenmektedir.

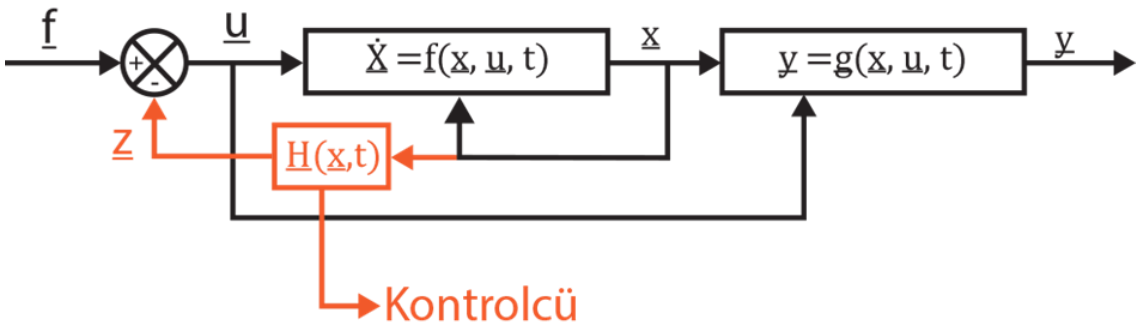
Temel fark şu ki, kök-yer eğrisi ile tasarımda sadece istenen kapalı döngü kutuplarını istenilen yerlere koyarken, kutup yerleştirme tasarımında tüm kapalı çevrim kutuplarını istenilen yerlere yerleştiriyoruz .

Durum Geri Bildirim

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Diyagrama göre;

$$u = f - Hx$$



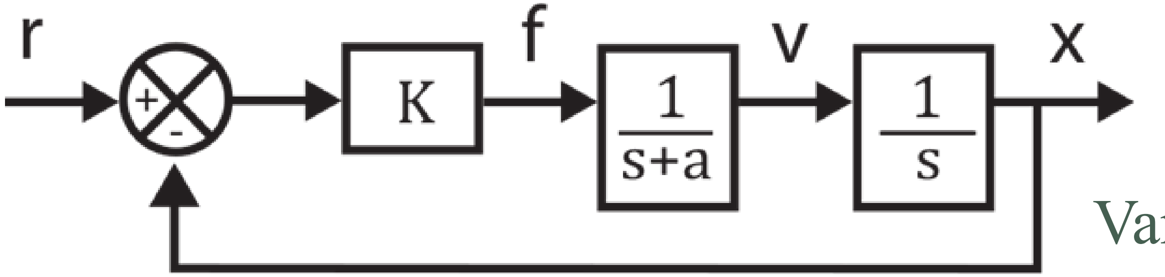
Örnek

Açık Çevrim Sistemin Transfer Fonksiyonu

$$\frac{K}{s(s+a)}$$

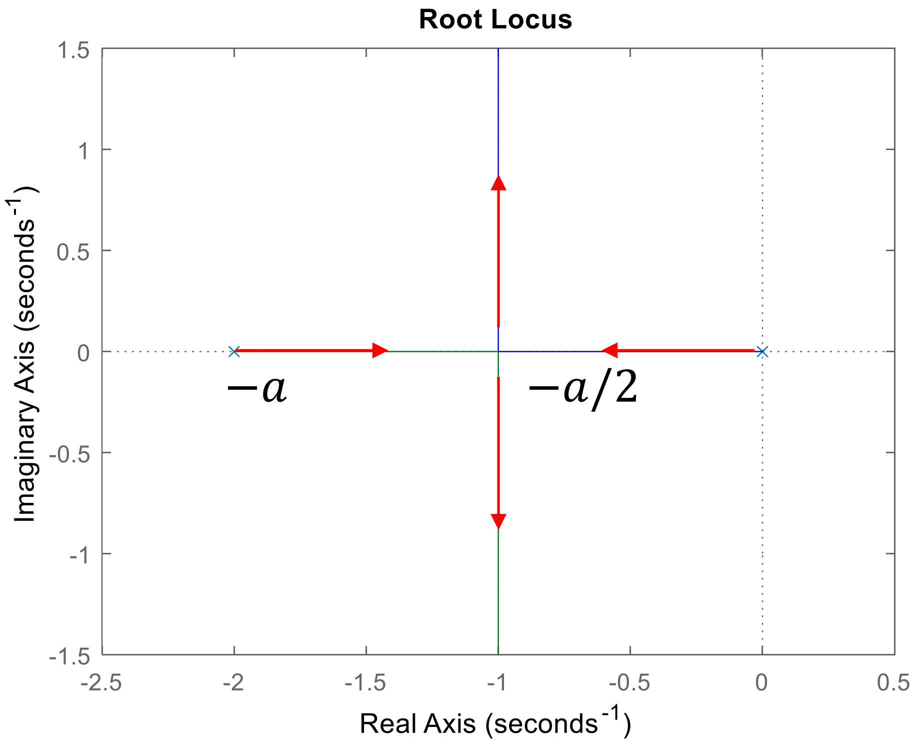
Kapalı Çevrim Sistemin Transfer Fonksiyonu

$$\frac{\frac{K}{s(s+a)}}{1+\frac{K}{s(s+a)}} = \frac{K}{s^2+as+K}$$



Varsayalım a=2 olsun.

Kök Yer eğrisi



K’yı 0 ile a/2 arasında seçersem kökler gerçek ve 0 ile a arasındadır.

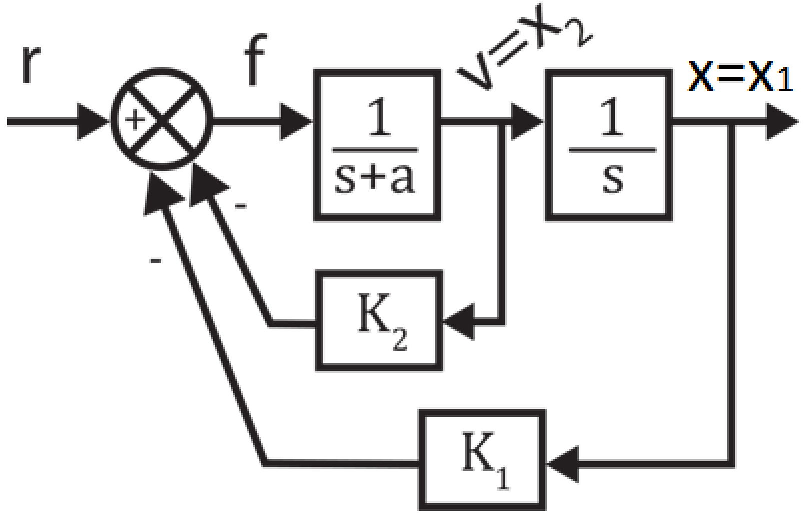
K’yı a/2 olarak seçersem katlı iki kök vardır.

K’yı a/2’den büyük seçersem sistemin köklerinin gerçek kısmı değişmeksizin K’nın büyüklüğüne bağlı imajiner kısmı büyür.

Örnek Devam

Sistemin hem hızını hem de konumunu geri bildirdiğimizi düşünelim.

Bu durumda sistemin transfer fonksiyonu değişmeyecektir.

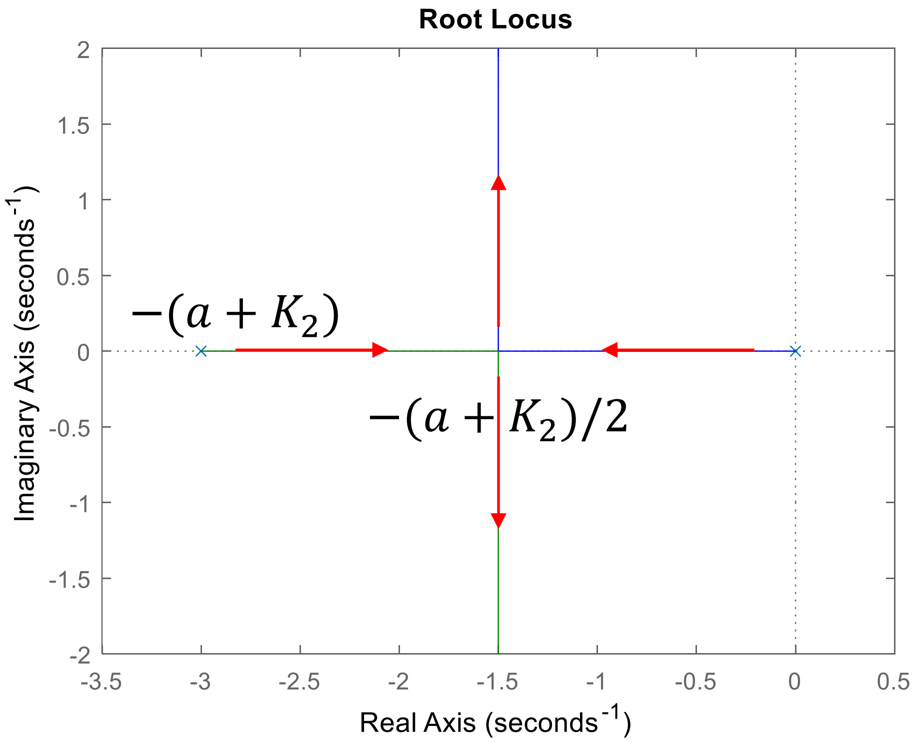


$$\frac{\frac{1}{(s+a)}}{1+\frac{K_2}{(s+a)}}=\frac{1}{s+a+K_2}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{s+a+K_2}\right)\frac{1}{s}}{1+\left(\frac{1}{s+a+K_2}\right)\frac{1}{s}K_1}=\frac{1}{s^2+(a+K_2)s+K_1}$$

Varsayalım $a=2, K_2=1$ olsun.

Kök Yer Eğrisi

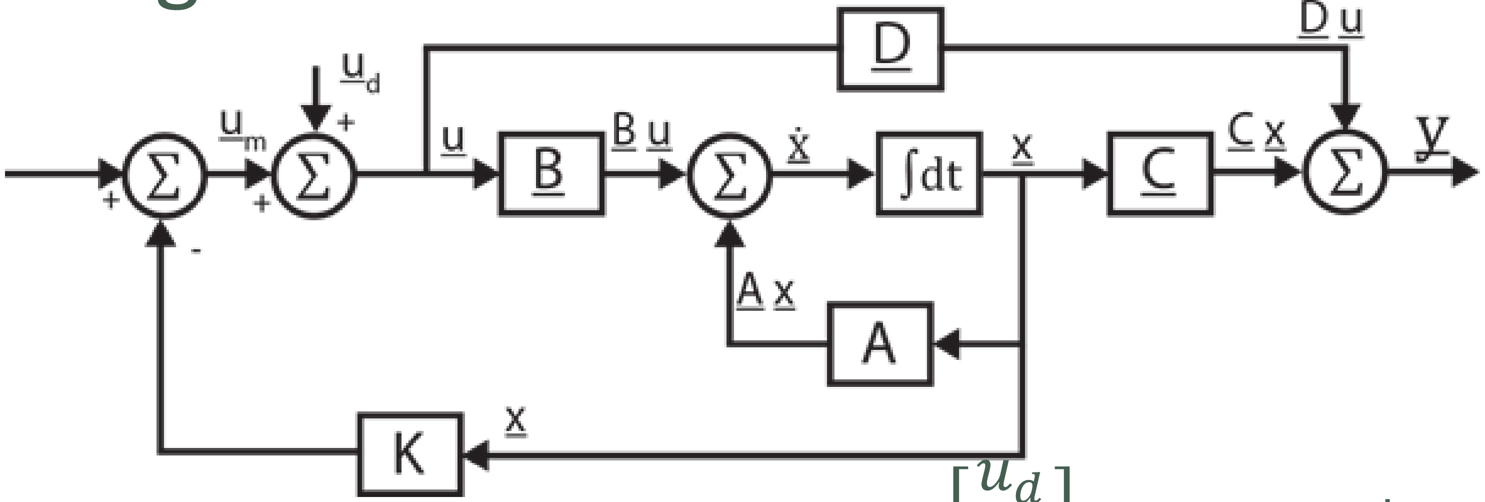


K_1'i 0 ile $(a+K_2)/2$ arasında seçersem kökler gerçek ve 0 ile $(a+K_2)$ arasındadır.

K_1'i $(a+K_2)/2$ olarak seçersem katlı iki kök vardır.

K_1'i $(a+K_2)/2$ 'den büyük seçersem sistemin köklerinin gerçek kısmı değişmeksizin K_1'in büyüklüğüne bağlı imajiner kısmı büyür.

Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemler (LTI) için Doğrusal Durum Geri Bildirimi



$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_m \end{bmatrix}; \quad \underline{u} = \underline{u}_d + \underline{u}_m$$

$$\underline{u}_m = \underline{r} - \underline{K}\,\underline{x}$$

$$K = Durum\ Geribildirim\ Katsayı\ Matrisi, Kazanç\ Matrisi$$

$$\dot{x} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}(\underline{u}_d + \underline{u}_m) = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}_d + \underline{B}\,\underline{r} - \underline{B}\,\underline{K}\,\underline{x} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\underline{X} + \underline{B}\,\underline{u}_d + \underline{B}\,\underline{r}$$

$$y = Cx + D(u_d + u_m) = Cx + Du_d + Dr + DKx = (\underline{C} + \underline{D}\,\underline{K})\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}_d + \underline{D}\,\underline{r}$$

$$A - BK = A^* \rightarrow Yeni\ sistem\ matrisi$$

Kutup Yerleştirme (Pole Placement/Assignment)

Doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) bir sistem için eğer (A,B) çifti kontrol edilebilir ise, uygun bir K matrisi seçimiyle oluşturulacak yeni sistem matrisinin $(A^* = A - BK)$ tüm öz değerlerinin istenilen konumlara yerleştirilebilmesi mümkündür.

Eğer kontrol edilebilirlik matrisinin rankı tam değilse, ör: $rank(M) = q < n$, o zaman sadece q tane özdeğer istenen konumlara yerleştirilebilir.

Tek Girişli Tek Çıkışlı (SISO) Sistem ve Kontrol Edilebilir Kanonik Form

Kontrol Edilebilir Kanonik formunun sistem ve giriş matrislerini ele alalım.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$K = [k_1\ k_2\ k_3 \cdots k_{n-1}\ k_n]$$

$$u = -Kx$$

Bu durumda yeni sistem matrisi $A - BK = A^*$ olacaktır.

SISO Sistem ve Kontrol Edilebilir Kanonik Form

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1\ k_2\ k_3 \cdots k_{n-1}\ k_n]$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_{n-1} & -k_n \end{bmatrix}$$

SISO Sistem ve Kontrol Edilebilir Kanonik Form

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_1 + k_1) & -(a_2+k_2) & -(a_3 + k_3) & \cdots & -(a_{n-1} + k_{n-1}) & -(a_n + k_n) \end{bmatrix}$$

Şimdi problemimizi

$$|\lambda I - A^*|$$

Determinantı ile elde edeceğimiz karakteristik denkleminin köklerinin bizim istediğimiz kökler olmasını sağlama problemine dönüştü.

SISO Sistem ve Kontrol Edilebilir Kanonik Form

$$|\lambda I - A^*| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & -1 & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ (a_1+k_1) & (a_2+k_2) & (a_3+k_3) & \cdots & (a_{n-1}+k_{n-1}) & \lambda+(a_n+k_n) \end{vmatrix}$$

$$|\lambda I - A^*| = \lambda^n + (a_n + k_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (a_2+k_2)\lambda + (a_1 + k_1)$$

Sistemin öz değerlerinin $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$ şeklinde istendiğini varsayalım.

Bu durumda istenilen karakteristik denklem

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda - \hat{\lambda}_i\right) = \lambda^n + \hat{a}_n\lambda^{n-1} + \cdots + \hat{a}_2\lambda + \hat{a}_1$$

Yeni sistem matrisinin karakteristik denkleminin istenilen karakteristik denklemle eşit olması durumu problemin çözümüdür. Dolayısıyla bu eşitliği sağlayacak k değerlerini bulmamız gerekir.

SISO Sistem ve Kontrol Edilebilir Kanonik Form

$$|\lambda I - A^*| = \lambda^n + (a_n + k_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (a_2 + k_2)\lambda + (a_1 + k_1)$$

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - \hat{\lambda}_i\right) = \lambda^n + \hat{a}_n\lambda^{n-1} + \cdots + \hat{a}_2\lambda + \hat{a}_1$$

$$|\lambda I - A^*| = \Phi(\lambda)$$

Eşitliği sağlayacak k değerlerini bulduğumuzda problem çözülmüş olur..

$$\left.\begin{array}{c} a_n + k_n = \hat{a}_n \\ \vdots \\ a_2 + k_2 = \hat{a}_2 \\ a_1 + k_1 = \hat{a}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} k_n = \hat{a}_n - a_n \\ \vdots \\ k_2 = \hat{a}_2 - a_2 \\ k_1 = \hat{a}_1 - a_1 \end{array}$$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; K = [k_1 \; k_2 \; k_3]$$

$$|\lambda I - A^*| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 + k_1 & 3 + k_2 & \lambda + 3 + k_3 \end{vmatrix}$$

$$|\lambda I - A^*| = (\lambda + 3 + k_3)\lambda^2 + (3 + k_2)\lambda + 1 + k_1$$

$$|\lambda I - A^*| = \lambda^3 + (3 + k_3)\lambda^2 + (3 + k_2)\lambda + 1 + k_1$$

Sistemin öz değerleri $\hat{\lambda}_1 = -2, \hat{\lambda}_2 = -3 \; ve \; \hat{\lambda}_3 = -4$ şeklinde istensin.

Bu durumda istenilen karakteristik denklem

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \hat{\lambda}_i) = (\lambda + 2)\,(\lambda + 3)(\lambda + 4)$$

$$\Phi(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24$$

Örnek

$$|\lambda I - A^*| = \lambda^3 + (3 + k_3)\lambda^2 + (3 + k_2)\lambda + 1 + k_1$$

$$\Phi(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24$$

$$|\lambda I - A^*| = \Phi(\lambda)$$

Eşitliği sağlayacak k değerlerini bulduğumuzda problem çözülmüş olur..

$$\left.\begin{aligned} 3 + k_3 &= 9 \\ 3 + k_2 &= 26 \\ 1 + k_1 &= 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_3 &= 6 \\ k_2 &= 23 \\ k_1 &= 23 \end{aligned}$$

$$u = -Kx$$

$$u = -23x_1 - 23x_2 - 6x_3$$

Uygun Kazanç Matrisinin Bulunmasına İlişkin Yöntemler
Direkt Yöntem

$$|\lambda I - (\underline{A} - \underline{B}K)| = \Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda - \underbrace{\hat{\lambda}_i}_{\substack{istenen \\ \text{ö}zde\breve{g}er}} \right)$$

Konuyu anlatırken çözdüğümüz gibi bu eşitlikten n adet doğrusal cebirsel denklem çıkar ve bunların çözümü ile elde edilen kazanç katsayıları kazanç matrisini oluşturur.

Örnek

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -7$$

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = -10\ olsun$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \right| = (\lambda + 10)^2$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 + k_1 & -2 + k_2 \\ -4 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda + 10)^2$$

$$\lambda^2 + (k_1 + 8)\lambda + (5k_1 + 4k_2 + 7) = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

$$k_1 + 8 = 20;\ k_1 = 12;$$

$$5k_1 + 4k_2 + 7 = 100;\ k_2 = \frac{33}{4}$$

Uygun Kazanç Matrisinin Bulunmasına İlişkin Yöntemler
KK Forma Dönüştürme Yoluyla Kazançların Bulunması

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u$$

$$\underline{x} = Px^* \; olsun$$

$$\dot{x}^* = A^*x^* + b^*u$$

$$\underline{M} = [b \vdots Ab \vdots \cdots \vdots A^{n-1}b]$$

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_n & 1 \\ a_3 & \iddots & \iddots & 0 \\ a_n & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P} = \underline{M} \cdot \underline{W}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda + a_1$$

$$o\ halde;\, k_i^* = \hat{a}_i - a_i^*, u = -{k^*}^T x^* = -{k^*}^T P^{-1} x \Rightarrow k^T = {k^*}^T P^{-1}$$

Örnek

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Bir önceki yöntemde çözdüğümüz problemi karşılaştırma açısından tekrar yeni öğrendiğimiz yöntemle bulalım.

$$\underline{M} = [b \vdots Ab \vdots \cdots \vdots A^{n-1}b] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ -4 & \lambda + 5 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda - 7$$

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_n & 1 \\ a_3 & \iddots & \iddots & 0 \\ a_n & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\underline{P} = \underline{M} \cdot \underline{W} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Örnek Devam

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}; \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = -10 \; olsun$$

$$\Phi(\lambda) = (\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

$$A^* = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 8 + k_2 &= 20 \\ 7 + k_1 &= 100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_2 &= 12 \\ k_1 &= 93 \end{aligned}$$

Direkt yöntemle bulduğumuz kazançları elde edebilir miyiz?

$$K = K^* P^{-1} = [93\ 12] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} = [12\ 33/4]$$

Uygun Kazanç Matrisinin Bulunmasına İlişkin Yöntemler
Ackermann'ın Formülü

$$\underline{k}^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]\underline{M}^{-1}\Phi(A)$$

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - \hat{\lambda}_i\right)$$

$$\mathrm{M} = [b \vdots Ab \vdots \cdots \vdots A^{n-1}b]$$

Örnek

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Bir önceki yöntemde çözdüğümüz problemi karşılaştırma açısından şimdide Accermann'ın formülünü kullanarak çözelim.

$$\underline{M} = [b \vdots Ab \vdots \cdots \vdots A^{n-1}b] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = -10 \; olsun$$

$$\Phi(\lambda) = (\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

Örnek

$$\Phi(\lambda) = (\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

$$\Phi(A) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} + 20\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} + 100\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(A) = \begin{bmatrix} 17 & -16 \\ -32 & 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -60 & 40 \\ 80 & -100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 & 24 \\ 48 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^T = [0 \quad 1]\underline{M}^{-1}\Phi(A)$$

$$\underline{k}^T = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 57 & 24 \\ 48 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}^T = [0 \quad 1/4]\begin{bmatrix} 57 & 24 \\ 48 & 33 \end{bmatrix} = [12\ 33/4]$$

Ödev

Kitabınızdan 10.1,10.2 ve 10.3 numaralı örnekleri yeniden çözünüz.

Bilgisayar uygulamalarını yapınız. Grafikleri elde ediniz.

Bilgisayar uygulamanızda tanımladığınız kutup yerleri (öz değerleri) değiştirerek sistemin kararlı, marjinal kararlı ve kararsız olmasını sağlayınız.

Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemlerde Çıkışın Geri Bildirimi

$$\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx + Du$$

Çıkışın geri beslenmesi;

$$\underbrace{u}_{r\times 1} = -\underbrace{K_0}_{r\times m}\underbrace{y}_{m\times 1}$$

$$u = -K_0(Cx + Du) = -K_0Cx - K_0Du \Longrightarrow u(I + K_0D) = -K_0Cx$$

$$u = -\overbrace{(I + K_0D)^{-1}K_0C}^{K}x$$

$$\left|\lambda I - \left\{A - B\overbrace{(I + K_0D)^{-1}K_0C}\right\}\right| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \hat{\lambda}_i)$$

Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemlerde Çıkışın Geri Bildirimi

Eğer kontrol edilebilirlik matrisinin rankı tam ve çıkış matrisinin rankı $rank(C) = q < n$, o zaman sadece q tane öz değer istenen konumlara keyfi olarak yerleştirilebilir.

Yukarıda ifade edilen kavramı anlamak için aşağıda verilen örneği çözelim.

Örnek:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u; y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x; \underbrace{u}_{2\times 1} = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}}_{K_0} y$$

Çözüm

$$\left|\lambda I - \left\{A - B\overbrace{(I + K_0 D)^{-1} K_0 C}\right\}\right|$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right\}\right|$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}k_2\\ k_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right\}\right|$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & k_2\\ 0 & k_1\end{bmatrix}\right\}\right|$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & -k_2\\ 0 & -4-k_1\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}\lambda + 1 & k_2\\ 0 & \lambda + k_1 + 4\end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + k_1 + 4)$$

Kontrollü çıkış için oluşturulan sistemin karakteristik denklemi $\hat{\lambda}_1 = -1$'i dayatmaktadır. Yani sadece ikinci öz değerin yerini belirleyebiliriz. Varsayalım ki ikinci öz değerin $\hat{\lambda}_2 = -10$ olmasını istiyoruz bu durumda $k_1 = 6$ olarak seçilmelidir.

Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemlerde Durum Geri Bildirimi

$$u = -\underbrace{K}_{r\times n}\ x$$

İstenen öz değerler $i = 1,2,3,\cdots,n$ olmak üzere $\hat{\lambda}_i$

K, $r \times n$ boyutlarında bir matris olmak üzere sistemin serbestlik derecesini n(r-1) şeklinde belirlenir.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$u = -Kx$$

K'yı şu şekilde seçelim;

$$\underbrace{K}_{r\times n} = \underbrace{r}_{r\times 1}\ \underbrace{k^T}_{1\times n}$$

$$K = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 k_1 & r_1 k_2 & \cdots & r_1 k_n \\ r_2 k_1 & r_2 k_2 & \cdots & r_2 k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_r k_2 & r_r k_2 & \cdots & r_r k_n \end{bmatrix}$$

Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemlerde Durum Geri Bildirimi

$$\dot{x} = Ax + B(-rk^T x)$$
$$\dot{x} = (A - Brk^T)x$$
$$Br = \underbrace{b}_{n\times 1}$$

Kontrol edilebilirlik;

$$rank[b \vdots Ab \vdots A^2 b \vdots \cdots \vdots A^{n-1} b] = n$$
$$|\lambda I - \{A - Brk^T\}| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \hat{\lambda}_i)$$

Örnek

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u; \hat{\lambda}_1 = -2;\ \hat{\lambda}_2 = -10\ olsun$$

$$b = Br = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 \end{bmatrix}$$

$$rank\left(\begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 \end{bmatrix}\right) = rank\left(\begin{bmatrix} r_2 & -r_2 \\ r_1 & -4r_1 \end{bmatrix}\right) = 2\ (r_1 \neq 0\ \&\ r_2 \neq 0)$$

Hesaplamada basitlik sağlama için $r_1 = r_2 = r \neq 0$ seçelim.

$$|\lambda I - \{A - Brk^T\}| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \hat{\lambda}_i)$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \right| = (\lambda + 2)(\lambda + 10)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 + rk_1 & rk_2 \\ rk_1 & \lambda + 4 + rk_2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 10)$$

Örnek Devam

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 + rk_1 & rk_2 \\ rk_1 & \lambda + 4 + rk_2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 10)$$

$$\lambda^2 + \lambda[1 + rk_1 + 4 + rk_2] + (1 + rk_1)(4 + rk_2) - r^2 k_1 k_2 = \lambda^2 + 12\lambda + 20$$

$$\lambda^2 + \lambda[5 + r(k_1 + k_2)] + 4 + r(k_2 + 4k_1) = \lambda^2 + 12\lambda + 20$$

$$5 + r(k_1 + k_2) = 12 \Longrightarrow k_1 + k_2 = 7/r$$

$$4 + r(k_2 + 4k_1) = 20 \Longrightarrow k_2 + 4k_1 = 16/r$$

$$3k_1 = \frac{9}{r} \Longrightarrow k_1 = \frac{3}{r}; k_2 = \frac{4}{r}$$

$$K = rk^T = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} [3/r \quad 4/r] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = u_2 = -3x_1 - 4x_2$$