Modern Kontrol

Veren kişi

Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Doğrusal Sistemlerin Zaman Cevabı

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

Burada A ve B matrisleri sabit matrislerdir.

Böyle sistemlere Zamanla Değişmeyen Doğrusal Sistemler (LTI:Linear Time Invariant) adı verilir.

$t \geq t_0$ için belirli bir giriş $u(t)$ ve belirli başlangıç koşulları $x(t_0) = x_0$ için $t \geq t_0$'da $x(t)$'nin çözümü sistemin zaman cevabını gösterir.

Doğrusal Sistemlerin Zaman Cevabı: Zorlanmamış Cevap

$\dot{x} = Ax$'in $x_0 = x(t_0)$'ya cevabını ele alırsak

Serilerle Çözüm:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots = \sum_{(i=1)}^{\infty} c_i t^i$$

$$\sum_{(i=1)}^{\infty} c_i t^i = \underbrace{\left(I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \cdots \right)}_{e^{At}\text{:matris üstel açılımı}} c_0 \ olsun$$

Hatırlatma:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots$$

Zorlanmamış Cevap

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots = \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \cdots \right) c_0$$

Yukarıdaki denklemin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\dot{x}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \cdots = Ac_0 + A^2 c_0 t + \frac{1}{2}A^3 c_0 t^2$$

$$c_1 = Ac_0$$

$$2c_2 = A^2 c_0$$

$$3c_3 = \frac{1}{2}A^3 c_0$$

$$\vdots$$

$$c_m = \frac{1}{m!}A^m c_0$$

Zorlanmamış Cevap

$$x(t) = e^{At}c_0$$

Başlangıç zamanı $t_0 = 0 \Longrightarrow x(0) = \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{A}\cdot 0}}_{\mathrm{I}}\ \mathrm{c}_0$

$$x(t) = e^{At}x(0) \Longrightarrow x(t) = \underbrace{\Phi(t)}_{\text{Durum Geçiş Matrisi}} x(0)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \cdots & \Phi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \Phi_{ij}(t) & \vdots & \vdots \\ \Phi_{n1}(t) & \cdots & c\ \ldots & \Phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

Burada i satır sayısını ve j sütün sayısını göstermektedir. $\Phi(t) = e^{At}$

Başlangıç zamanı $t_0 \neq 0 \Longrightarrow \Phi(t) \Longrightarrow \Phi(t - t_0)$

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(0)$$

Durum Geçiş Matrisi

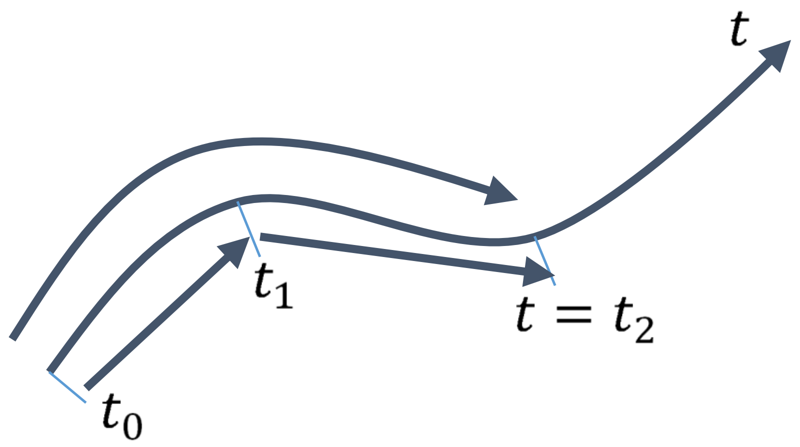
$$\dot{x} = Ax$$
$$sx(s) - x(0) = Ax(s)$$
$$sx(s) - Ax(s) = x(0)$$
$$(sI - A)x(s) = x(0)$$
$$x(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}}_{\Phi(\mathrm{s})}\ x(0)$$

$$\Phi(s) = \mathcal{L}[\Phi(t)] \Longrightarrow \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$$

$$x(s) = \Phi(\mathrm{s})\, x(0)$$

Durum Geçiş Matrisinin Bazı Özellikleri

- ✓ $\Phi(0) = I$
- ✓ $Tekil\ Değil$
- ✓ $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
- ✓ $\Phi(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1)$
- ✓ $\Phi(nT) = \Phi^{\mathrm{n}}(T)$
- ✓ $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$
- ✓ $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$



Örnekler

Örnek 1:

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t^2 + \cdots}_{\text{Bu kısmı silebilirsiniz}}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnekler

Örnek 2:

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & -t^3 \\ t^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{bmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^4 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots & t - \frac{1}{3!}t^3 + \cdots \\ -(t - \frac{1}{3!}t^3 + \cdots) & 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cost & sint \\ -sint & cost \end{bmatrix}$$

Model Ayrışması (Modal Decomposition)

Farklı özdeğerlerin varlığında, $P^{-1}AP = \Lambda \; ve \; x(t) = Pz(t)$ olduğunda

$$x(t) = Pz(t) \Longrightarrow \dot{z}(t) = \Lambda z(t) \;\; yada$$

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t); i = 1,2,3, \dots, n$$

$$z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0); i = 1,2,3, \dots, n$$

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{\Lambda t}} z(0)$$

$$z(t) = e^{\Lambda t} z(0)$$

$$P^{-1}x(t) = e^{\Lambda t} P^{-1} x(0) \Longrightarrow x(t) = \underbrace{P e^{\Lambda t} P^{-1}}_{\Phi(t)} x(0)$$

Model Ayrışması (Modal Decomposition)

Tekrarların özdeğerlerin varlığında, $P^{-1}AP = \mathrm{J}$

$$\Phi(t) = PS(t)e^{\Lambda t}P^{-1}$$

$$S(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2(t) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_p(t) \end{bmatrix}$$

Burada m_i tekrarlayan öz değer sayısı olmak üzere S_i'nin büyüklüğü $m_i \times m_i$ kadardır. $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$ olabilir.

$$S_i = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek

Üç özdeğerinde eşit olduğu durum için

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Alt satırdan itibaren başlangıç koşullarıyla ilişkilerini yazarak yukarı doğru gidelim.

$$z_3(t) = e^{\lambda t} z_3(0)$$

$$z_2(t) = e^{\lambda t} z_2(0) + t e^{\lambda t} z_3(0)$$

$$z_1(t) = e^{\lambda t} z_1(0) + t e^{\lambda t} z_2(0) + t^2 e^{\lambda t} z_3(0)$$

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & t^2 e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{bmatrix}$$

CAYLEY-HAMILTON THEOREM

Her kare matris A kendi karakteristik denklemini gerçekleştirir.

Yani $P(A) = 0$ burada $P(\lambda) = |\lambda I - A|$

CAYLEY-HAMILTON THEOREM: Örnekler

Örnek 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Cayley-Hamilton theoremi bize $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ fonksiyonunda λ yerine A matrisini yazarsanız toplamın sonucu sıfır olur demektedir. O halde aşağıdaki işlemler sonucunda matris toplamını sıfır olarak görmeliyiz.

$$P(A) = A^2 + 3A + 2I$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CAYLEY-HAMILTON THEOREM: Örnekler

Örnek 2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrisinin tersini Cayley-Hamilton teoremi kullanarak alalım. Şöyle ki

$$A^2 + 3A + 2I = 0$$

$$A + 3 + 2A^{-1} = 0 \Longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}(A + 3I)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right] = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

CAYLEY-HAMILTON THEOREM: Örnekler

Örnek 3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrisi için aşağıdaki fonsiyonun değerini bulunuz.

$$N(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A + I$$

CAYLEY-HAMILTON THEOREM: Örnekler

Örnek 3 Devam.

İlk örnekte $P(A) = A^2 + 3A + 2I = 0$ olduğunu göstermiştik. O halde

$$A^2 = -3A - 2I$$

$$A^3 = A * A^2 = -3A^2 - 2A = -3(-3A - 2I) - 2A = 7A + 6I$$

$$A^3 = 7A + 6I$$

$$A^4 = A * A^3 = A * (7A + 6I) = 7A^2 + 6A = 7(-3A - 2I) + 6A = -15A - 14I$$

$$A^4 = -15A - 14I$$

$$N(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A + I = -15A - 14I + 7A + 6I - 3A - 2I + A + I$$

$$N(A) = -10A - 9I = -10\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \begin{bmatrix} -9 & -10 \\ 20 & 21 \end{bmatrix}$$

CAYLEY-HAMILTON THEOREMİ UYGULAMALARI

$$\frac{N(\lambda)}{P(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)}$$

$$N(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)$$

$$N(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

$$N(A) = P(A)Q(A) + R(A)$$

$$N(A) = R(A)$$

Örnek 3’ün Tekrar çözümü

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda^2 + 3\lambda + 2} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 + \frac{-10\lambda - 9I}{\lambda^2 + 3\lambda + 2}$$

$$N(A) = R(A) = -10A - 9I$$

CAYLEY-HAMILTON THEOREMİ UYGULAMALARI

$$N(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)$$

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}$$

farklı öz değerlerin varlığı durumunda, $N(\lambda_i) = R(\lambda_i) \;\; i = 1,2,3, \dots, n$

CAYLEY-HAMILTON THEOREMİ UYGULAMALARI

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

için

$$N(A) = e^{\mathrm{A}t}$$

fonksiyonunun değerini bulunuz.

CAYLEY-HAMILTON THEOREMİ UYGULAMALARI

Örnek devam:

$$N(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Longrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$N(\lambda) = \Phi(t) = e^{\Lambda t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \Lambda^i t^i$$

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$N(\lambda_1) = R(\lambda_1) \Longrightarrow e^{-t} = \alpha_0 + \alpha_1(-1)$$

$$N(\lambda_2) = R(\lambda_2) \Longrightarrow e^{-2t} = \alpha_0 + \alpha_1(-2)$$

Bu iki denklemin çözümünden

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

CAYLEY-HAMILTON THEOREMİ UYGULAMALARI

Örnek devam:

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}$$
$$\alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$N(A) = e^{\mathrm{A}t} = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} - e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Bu yaklaşımı kullanarak A'ya bağlı $log(A), sin(A), \sqrt[5]{A}$ gibi çok değişik fonksiyonların değerini bulabiliriz.

ZORLANMIŞ CEVAP

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Zorlama olmadan sistemi $\dot{x} = Ax$ olarak ele almış ve çözümün $x(t) = e^{At}x(0)$ olduğunu göstermiştik. Ancak zorlama olduğunda bu çözüm geçerli olmaz bu durumda çözümün

$x(t) = e^{At}p(t)$ şeklinde olacağını düşünelim. Doğal olarak çözümün yukarıda verilen durum denklemini sağlamasını bekleriz. O halde $x(t)$'nin türevini alarak denklemde yerine yazalım.

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}p(t) + e^{At}\frac{dp(t)}{dt}$$

ZORLANMIŞ CEVAP

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}p(t) + e^{At}\frac{dp(t)}{dt}$$

Denklemde bulduğumuz değerleri yerine yazalım

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$Ae^{At}p(t) + e^{At}\frac{dp(t)}{dt} = Ae^{At}p(t) + Bu$$

$$e^{At}\frac{dp(t)}{dt} = Bu \Longrightarrow \frac{dp(t)}{dt} = e^{-At}Bu$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = e^{-At}Bu \Longrightarrow p(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

ZORLANMIŞ CEVAP

$$p(t) = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{At}p(t) \Longrightarrow e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \Longrightarrow \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Bu durumda tam cevap

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Eğer $t_0 \neq 0 \Longrightarrow$

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

ZORLANMIŞ CEVAP

$t = 0$’da uygulanan darbe girişlere cevap

$$u(t) = w\delta(t) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \delta(t)$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{At} x_0 + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bw\delta(\tau) d\tau}_{e^{At}Bw} = \mathrm{e}^{At}(x_0 + Bw)$$

En Kısa Polinom

$$\Phi(\lambda) = \lambda^m + a_m\lambda^{m-1} + \cdots + a_2\lambda + a_1$$
$$m = n - j + 1$$

Burada j tekrarlayan özdeğerlerle ilişkili olarak jordan bloklarının sayısı

İşlem Sırası

a) Eşlenik (Adjoint) matrisi yaz. Elemanları çarpım şeklinde bırak çünkü matrisin tamamını bölen bir terim arıyoruz.
b) Eşlenik matriste bütün elemanları ortak böleni olan $d(\lambda)$'yı belirle; eğer ortak bir bölen yoksa $d(\lambda) = 1$ dir.
c) En kısa polinom $\Phi(\lambda) = \frac{|\lambda I - A|}{d(\lambda)}$ ile bulunur.

Örnekler

Örnek 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}; |\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -4 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 & 0 \\ \lambda + 11 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & -3(\lambda - 2) \\ 4(\lambda - 2) & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}^T$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & \lambda + 11 & 4(\lambda - 2) \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & -3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

Ortak bölen yok o halde $d(\lambda) = 1$ dolayısıyla $\Phi(\lambda) = |\lambda I - A|$

Örnekler

Örnek 2 Devam:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1);$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right|$$

Örnekler

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} (\lambda-2)(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)(\lambda-1) & 3(\lambda-2) \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}^T$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} (\lambda-2)(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda-2) & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}$$

$$d(\lambda) = (\lambda-2)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{|\lambda I - A|}{d(\lambda)} = \frac{(\lambda-2)^2(\lambda-1)}{(\lambda-2)}$$

$$\Phi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Soru: en kısa polinom içinde $\Phi(A) = 0$ geçerli midir?

Doğrusal Zamanla Değişen Sistemlerin Cevapları

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Durum geçiş matrisi (State transition matrix STM) $\Phi(t, t_0)$ aşağıdaki denklemin çözümüdür.

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0) \;\; ve \; \Phi(t_0, t_0) = I$$

Dikkat: $\Phi(t, t_0) \neq e^{A(t-t_0)}$

Doğrusal Zamanla Değişen Sistemlerin Cevapları

Teorem:

Doğrusal zamanla değişen sistemlerde (LTV) durum geçiş matrisi (STM) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau) d\tau}$$

Eğer $A(t)$ ve $A(\tau), t\ ve\ \tau$'nun her değeri için yer değişebiliyorlarsa yani

$$A(t)A(\tau) = A(\tau)A(t)$$

Bu koşul, aşağıdaki durumlardan biri karşılandığında sağlanır.

a) $A(t)$ sabit matristir.

b) $A(t)$ köşegen matristir.

c) $A(t) = f(t)C$ burada $f(t)$ skaler bir zaman fonsiyonu ve C herhangi bir sabit matris.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 2\tau & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau} = e^{\begin{bmatrix} t^2 - t_0^2 & 0 \\ 0 & t - t_0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{t^2 - t_0^2} & 0 \\ 0 & e^{t - t_0} \end{bmatrix}$$

LTV sistemlerde, Durum Geçiş Matrisinin Bazı Özellikleri

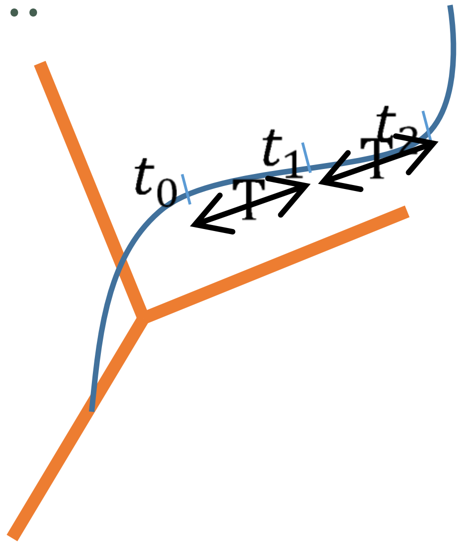
$$\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_1, 0)\Phi^{-1}(t_0, 0)$$

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$$

$$\Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1)$$

$\Phi(t,t_0)$’nun yaklaşık olarak serilerle hesaplanması

$$
\begin{aligned}
&\Phi(t,t_0) \\
&= I + \int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau_0)d\tau_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau_0)\left(\int_{t_0}^{\tau_0} \mathrm{A}(\tau_1)d\tau_1\right)d\tau_0 \\
&+ \int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau_0)\left(\int_{t_0}^{\tau_0} \mathrm{A}(\tau_1)\left(\int_{t_0}^{\tau_1} \mathrm{A}(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1\right)d\tau_0 + \cdots
\end{aligned}
$$



Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}; \Phi(t,0) =?$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau_0) d\tau_0 = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \dfrac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau_0) \left(\int_{t_0}^{\tau_0} \mathrm{A}(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau_0 = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tau_0 \\ 0 & \dfrac{\tau_0{}^2}{2} \end{bmatrix} d\tau_0 = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\tau_0{}^2}{2} \\ 0 & \dfrac{\tau_0{}^3}{2} \end{bmatrix} d\tau_0$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau_0) \left(\int_{t_0}^{\tau_0} \mathrm{A}(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{t^3}{6} \\ 0 & \dfrac{t^4}{8} \end{bmatrix}$$

Örnek Devam

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau_0)\left(\int_{t_0}^{\tau_0} \mathrm{A}(\tau_1)\left(\int_{t_0}^{\tau_1} \mathrm{A}(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1\right)d\tau_0 = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\tau_0{}^3}{6} \\ 0 & \dfrac{\tau_0{}^4}{8} \end{bmatrix} d\tau_0 = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\tau_0{}^4}{8} \\ 0 & \dfrac{\tau_0{}^5}{8} \end{bmatrix} d\tau_0$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(\tau_0)\left(\int_{t_0}^{\tau_0} \mathrm{A}(\tau_1)\left(\int_{t_0}^{\tau_1} \mathrm{A}(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1\right)d\tau_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{t^5}{40} \\ 0 & \dfrac{t^6}{48} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t,0) = \begin{bmatrix} 1 & t + \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^5}{40} + \cdots \\ 0 & 1 + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{8} + \dfrac{t^6}{48} + \cdots \end{bmatrix}$$