Mekanizma Tekniği

MEKANİZMALARDA HIZ VE İVME ANALİZLERİ

DR. ÖĞR. ÜYESİ NURDAN BİLGİN

Giriş

Mekanizmalarda hız ve ivme analizi vektörel olarak bağıl hız ve ivme kavramı ile yapılır.

Genel olarak verilen değerler ile başlanılır ve A,B,C,… gibi genellikle mafsal eksenlerinin geçtiği noktalar sırası ile kullanılarak analiz gerçekleştirilir.

Seçilen A,B,C,D noktaları döner mafsal ekseni üzerinde olursa, bu noktada her iki uzvun hız ve ivmesi eşit olacaktır.

Mekanizmaların Kinematik Analizi		
Konum Analizi	Hız Analiz	İvme Analizi

Değişken Tanımları

Konum (mafsal) değişkenleri: vektör kapalılık denkleminde $s_{ij}\ ve\ \theta_{ij}$ şeklinde yer alan değişkenlerdir.

Hız değişkenleri: konum değişkenlerinin zamana bağlı türevi olan değişkenlerdir. Zamana bağlı türevi alınan değişkenler $\dot{s}_{ij}\ ve\ \dot{\theta}_{ij}$ şeklinde gösterilir.

İvme değişkenleri: hız değişkenlerinin zamana bağlı türevi olan değişkenlerdir. Konum değişkenlerinin ise ikinci türevi, ivmeyi ifade eder örneğin, $\ddot{s}_{ij}\ ve\ \ddot{\theta}_{ij}$ şeklindedir.

Hız ve ivme analizi

F serbestlik dereceli bir sistem için hız analizi

Verilenler: bütün konum değişkenleri ve serbestlik derecesine uygun sayıda hız değişkeni

Bulunmak istenenler: bütün bilinmeyen hız değişkenleri (dolayısıyla herhangi bir uzvun üzerindeki herhangi bir noktanın hızı belirlenebilir.)

F serbestlik dereceli bir sistem için ivme analizi

Verilenler: bütün konum ve hız değişkenleri ve serbestlik derecesine uygun sayıda ivme değişkeni

Bulunmak istenenler: bütün bilinmeyen ivme değişkenleri (dolayısıyla herhangi bir uzvun üzerindeki herhangi bir noktanın ivmesi belirlenebilir.)

İşlem Sırası

Konum analizleri: Vektör kapalılık denklemleri temel alınarak bütün bilinmeyen konum değişkenleri çözülür.

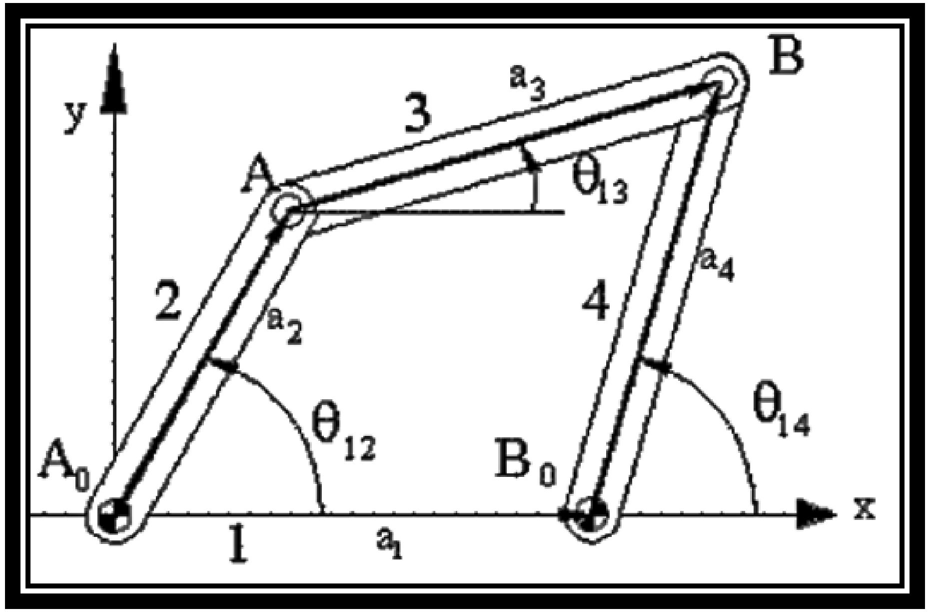
Hız Analizleri: Vektör kapalılık denkleminin zamana göre birinci türevi alınarak hız döngü denklemi elde edilir. Hız döngü denkleminden çıkarılan eşitlikler doğrusal denklemlerdir, çözümleri sonucunda bilinmeyen hız değişkenleri bulunur.

İvme Analizleri: İvme döngü denklemi hız döngü denkleminin zamana bağlı türevidir. İvme döngü denkleminden çıkarılan eşitlikler doğrusal denklemlerdir, çözümleri sonucunda bilinmeyen ivme değişkenleri bulunur.

Yukarıdaki analizler verildikleri sırayla yapılmalıdır.

Her üç analizde, değişken sayısı eksi serbestlik derecesi kadar bilinmeyen değişken bulunur.

Dört Çubuk Mekanizması Örneği Üzerinden Hız ve İvme Analizi



Bu yöntemi, dört-çubuk mekanizması üzerinde ele alacağız. Devre kapalılık denklemi

$$A_0A + AB = A_0B_0 + B_0B$$

Bu durumda devre kapalılık denklemi kompleks sayılar ile:

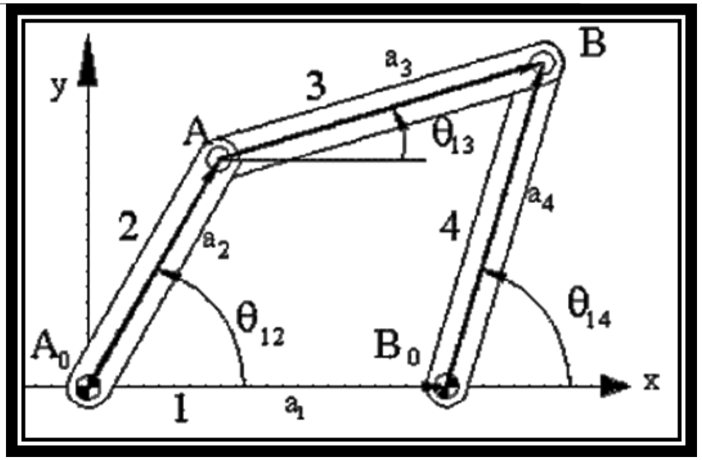
$$a_2e^{i\theta_{12}} + a_3e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4e^{i\theta_{14}} \qquad (1)$$

Önce Konum Analizi Yapılmalı veya Tüm Verilmiş Olmalıdır:

Giriş: θ_{12} ; Bilinmeyenler: θ_{13},θ_{14} (1) denkleminden çözülür.

Dört Çubuk Mekanizması Örneği Üzerinden Hız ve İvme Analizi

$$a_2 e^{i\theta_{12}} + a_3 e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4 e^{i\theta_{14}} \qquad (1)$$



Hız Analizi

Giriş: $\dot{\theta}_{12}$ (θ_{12}, θ_{13} ve θ_{14} konum analizinden biliniyor.)

Bilinmeyenler: $\dot{\theta}_{13}, \dot{\theta}_{14}$

$$\frac{d}{dt} VKD = \frac{d}{dt}(1) \Rightarrow a_2 \frac{d}{dt}\left(e^{i\theta_{12}}\right) + a_3 \frac{d}{dt}\left(e^{i\theta_{13}}\right) = a_4 \frac{d}{dt}\left(e^{i\theta_{14}}\right)$$

$$a_2 e^{i\theta_{12}} i\dot{\theta}_{12} + a_3 e^{i\theta_{13}} i\dot{\theta}_{13} = a_4 e^{i\theta_{14}} i\dot{\theta}_{14} \qquad (2)$$

Dört Çubuk Mekanizması Örneği Üzerinden Hız ve İvme Analizi

$$a_2 e^{i\theta_{12}} i\dot{\theta}_{12} + a_3 e^{i\theta_{13}} i\dot{\theta}_{13} = a_4 e^{i\theta_{14}} i\dot{\theta}_{14} \qquad (2)$$

(2) denklemini gerçel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı yazalım.

$$a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} + a_3\dot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} = a_4\dot{\theta}_{14}\cos\theta_{14} \qquad (3)$$

$$a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} + a_3\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} = a_4\dot{\theta}_{14}\sin\theta_{14} \qquad (4)$$

(3) ve (4) iki bilinmeyenli ($\dot{\theta}_{13}$,$\dot{\theta}_{14}$) doğrusal iki denklemdir. Çözüm için bu iki denklemi matris formunda düzenleyelim.

$$\begin{bmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_4\cos\theta_{14} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_4\sin\theta_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} \\ a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Dört Çubuk Mekanizması Örneği Üzerinden Hız ve İvme Analizi

$$\begin{bmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_4\cos\theta_{14} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_4\sin\theta_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} \\ a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_4\cos\theta_{14} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_4\sin\theta_{14} \end{bmatrix}; \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{14} \end{bmatrix};\ \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} \\ a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, (5) denklemi kapalı formda (6) denklemindeki gibi yazılabilir.

$$[A]\vec{\Omega} = \vec{b} \qquad (6)$$

Eğer $detA \neq 0$ ise (6) denkleminin $\vec{\Omega}$ vektörü için tekil bir çözümü vardır.

Dört Çubuk Mekanizması Örneği Üzerinden Hız ve İvme Analizi

$$A = \begin{bmatrix} -a_3 \cos\theta_{13} & a_4 \cos\theta_{14} \\ -a_3 \sin\theta_{13} & a_4 \sin\theta_{14} \end{bmatrix};$$

$$detA = -a_3 a_4 (\sin\theta_{14} \cos\theta_{13} - \cos\theta_{14} \sin\theta_{13})$$

$$detA = -a_3 a_4 \sin(\theta_{14} - \theta_{13}) \qquad (7)$$

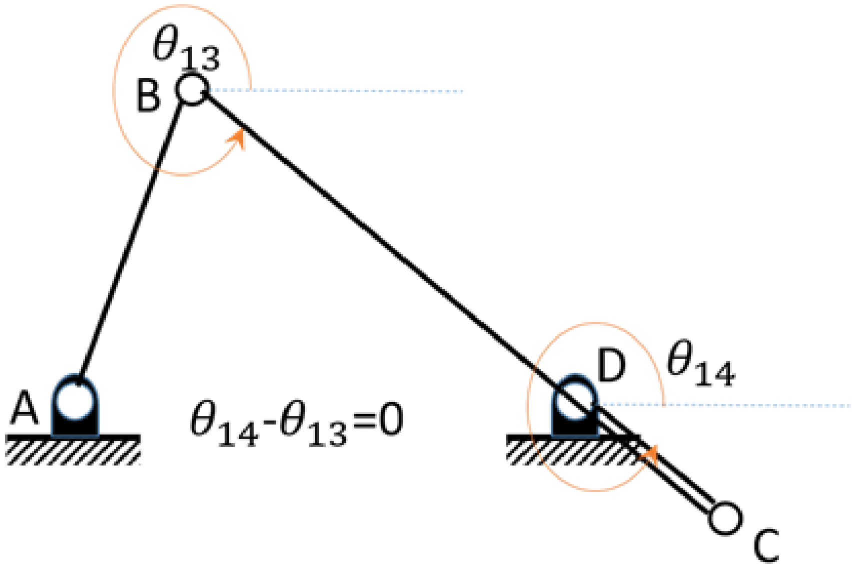
Dolayısıyla

$$detA = 0 \Longrightarrow\Longrightarrow \sin(\theta_{14} - \theta_{13}) = 0$$

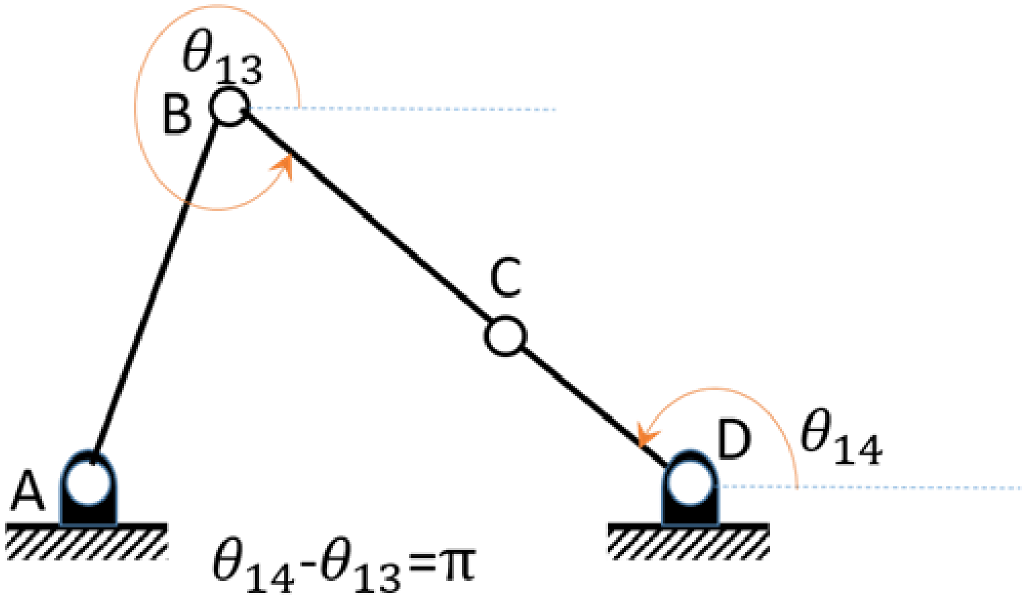
$$\Longrightarrow\Longrightarrow \theta_{14} - \theta_{13} = 0 \quad ya\ da\ \theta_{14} - \theta_{13} = \pi$$

Tekil Olmama Durumları

$$detA = 0 \Longrightarrow\Longrightarrow sin(\theta_{14} - \theta_{13}) = 0$$
$$\theta_{14} - \theta_{13} = 0$$



$$detA = 0 \Longrightarrow\Longrightarrow sin(\theta_{14} - \theta_{13}) = 0$$
$$\theta_{14} - \theta_{13} = \pi$$



$[A]\overrightarrow{\Omega} = \vec{b}$ Denkleminin Çözümü

Hatırlatma: Cramer Kuralı

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & c_2 \\ k_2 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}, \quad \Omega_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & k_1 \\ c_3 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}$$

$Det(C) \neq 0$ ise denklem takımı kramer kuralıyla çözülür.

$[A]\overrightarrow{\Omega} = \vec{b}$ Denkleminin Çözümü

$$\begin{bmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_4\cos\theta_{14} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_4\sin\theta_{14} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} \\ a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Bu durumda

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{\begin{vmatrix} a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} & a_4\cos\theta_{14} \\ a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} & a_4\sin\theta_{14} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_4\cos\theta_{14} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_4\sin\theta_{14} \end{vmatrix}} = \frac{a_2a_4\dot{\theta}_{12}(\sin\theta_{14}\cos\theta_{12} - \cos\theta_{14}\sin\theta_{12})}{-a_3a_4(\sin\theta_{14}\cos\theta_{13} - \cos\theta_{14}\sin\theta_{13})}$$

$$\dot{\theta}_{14} = \frac{\begin{vmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_4\cos\theta_{14} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_4\sin\theta_{14} \end{vmatrix}} = \frac{-a_2a_3\dot{\theta}_{12}(\sin\theta_{12}\cos\theta_{13} + \cos\theta_{12}\sin\theta_{13})}{-a_3a_4(\sin\theta_{14}\cos\theta_{13} - \cos\theta_{14}\sin\theta_{13})}$$

$[A]\vec{\Omega} = \vec{b}$ Denkleminin Çözümü

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{\begin{vmatrix} a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} & a_4\cos\theta_{14} \\ a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} & a_4\sin\theta_{14} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_4\cos\theta_{14} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_4\sin\theta_{14} \end{vmatrix}} = \frac{a_2a_4\dot{\theta}_{12}(\sin\theta_{14}\cos\theta_{12} - \cos\theta_{14}\sin\theta_{12})}{-a_3a_4(\sin\theta_{14}\cos\theta_{13} - \cos\theta_{14}\sin\theta_{13})}$$

$$\dot{\theta}_{14} = \frac{\begin{vmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a_3\cos\theta_{13} & a_4\cos\theta_{14} \\ -a_3\sin\theta_{13} & a_4\sin\theta_{14} \end{vmatrix}} = \frac{a_2a_3\dot{\theta}_{12}(\cos\theta_{12}\sin\theta_{13} - \sin\theta_{12}\cos\theta_{13})}{-a_3a_4(\sin\theta_{14}\cos\theta_{13} - \cos\theta_{14}\sin\theta_{13})}$$

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{a_2\sin(\theta_{12} - \theta_{14})}{a_3\sin(\theta_{14} - \theta_{13})}\dot{\theta}_{12} \qquad (8)$$

$$\dot{\theta}_{14} = \frac{a_2\sin(\theta_{12} - \theta_{13})}{a_3\sin(\theta_{14} - \theta_{13})}\dot{\theta}_{12} \qquad (9)$$

Hız Etki Katsayısı

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{a_2 \sin(\theta_{12} - \theta_{14})}{a_3 \sin(\theta_{14} - \theta_{13})} \dot{\theta}_{12} = g_{32} \dot{\theta}_{12}$$

$$\dot{\theta}_{14} = \frac{a_2 \sin(\theta_{12} - \theta_{13})}{a_3 \sin(\theta_{14} - \theta_{13})} \dot{\theta}_{12} = g_{42} \dot{\theta}_{12}$$

Burada g_{32} $\dot{\theta}_{13}$ ve $\dot{\theta}_{12}$ arasındaki etki katsayısı ve g_{42} $\dot{\theta}_{14}$ ve $\dot{\theta}_{12}$ arasındaki etki katsayısıdır.

Etki katsayıları daima uzuv uzunluklarının ve pozisyon değişkenlerinin bir fonksiyonudur.

det(A)=0 olursa o zaman etki katsayısı sonsuza gider.

İvme Analizi

$$a_2 e^{i\theta_{12}} i\dot{\theta}_{12} + a_3 e^{i\theta_{13}} i\dot{\theta}_{13} = a_4 e^{i\theta_{14}} i\dot{\theta}_{14} \qquad (2)$$

Hız analizi sonunda (2) denklemindeki tüm hız değişkenlerinin çözüldüğü veya verildiği durumda, mekanizmanın serbestlik derecesi kadar ivme değişkeni verilirse tüm ivme değişkenleri çözülebilir.

İvme Analizi

Giriş: $\boldsymbol{\ddot{\theta}_{12}}$ (θ_{12}, θ_{13} ve θ_{14} konum analizinden, $\dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}$ ve $\dot{\theta}_{14}$ hız analizinden biliniyor. **Bilinmeyenler:** $\boldsymbol{\ddot{\theta}_{13}, \ddot{\theta}_{14}}$

$$\frac{d}{dt} HDD = \frac{d}{dt}(2) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(a_2 e^{i\theta_{12}} \dot{\theta}_{12} + a_3 e^{i\theta_{13}} \dot{\theta}_{13} = a_4 e^{i\theta_{14}} \dot{\theta}_{14}\right)$$

İvme Analizi

$\frac{d}{dt}HDD = \frac{d}{dt}(2) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(a_2 e^{i\theta_{12}}\dot{\theta}_{12} + a_3 e^{i\theta_{13}}\dot{\theta}_{13} = a_4 e^{i\theta_{14}}\dot{\theta}_{14}\right)$

$a_2 e^{i\theta_{12}} i\dot{\theta}_{12}^{\ 2} + a_2 e^{i\theta_{12}}\ddot{\theta}_{12} + a_3 e^{i\theta_{13}} i\dot{\theta}_{13}^{\ 2} + a_3 e^{i\theta_{13}}\ddot{\theta}_{13} = a_4 e^{i\theta_{14}} i\dot{\theta}_{14}^{\ 2} + a_4 e^{i\theta_{14}}\ddot{\theta}_{14} \qquad (10)$

(10) denkleminin gerçel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı yazalım.

Dikkat: $e^{i\theta_{12}} i = i(cos\theta + isin\theta) = icos\theta - sin\theta$

$$-a_2\dot{\theta}_{12}^{\ 2}\sin\theta_{12} + a_2\ddot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} - a_3\dot{\theta}_{13}^{\ 2}\sin\theta_{13} + a_3\ddot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} = -a_4\dot{\theta}_{14}^{\ 2}\sin\theta_{14} + a_4\ddot{\theta}_{14}\cos\theta_{14} \quad (11)$$

$$a_2\dot{\theta}_{12}^{\ 2}\cos\theta_{12} + a_2\ddot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} + a_3\dot{\theta}_{13}^{\ 2}\cos\theta_{13} + a_3\ddot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} = a_4\dot{\theta}_{14}^{\ 2}\cos\theta_{14} + a_4\ddot{\theta}_{14}\sin\theta_{14} \quad (12)$$

İvme Analizi

$$-a_2\dot{\theta}_{12}{}^2 \sin\theta_{12} + a_2\ddot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} - a_3\dot{\theta}_{13}{}^2 \sin\theta_{13} + a_3\ddot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} = -a_4\dot{\theta}_{14}{}^2 \sin\theta_{14} + a_4\ddot{\theta}_{14}\cos\theta_{14} \quad (11)$$

$$a_2\dot{\theta}_{12}{}^2 \cos\theta_{12} + a_2\ddot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} + a_3\dot{\theta}_{13}{}^2 \cos\theta_{13} + a_3\ddot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} = a_4\dot{\theta}_{14}{}^2 \cos\theta_{14} + a_4\ddot{\theta}_{14}\sin\theta_{14} \quad (12)$$

(11) ve (12) denklemleri iki doğrusal denklem bilinmeyenler $\ddot{\theta}_{13}$ ve $\ddot{\theta}_{14}$, hız analizinde öğrendiğimiz kramer kuralıyla çözebiliriz. Önce denklemi matris formunda yazalım.

$$[A]\vec{\mathrm{a}} = \vec{d} \quad (13)$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -a_2\dot{\theta}_{12}{}^2 \sin\theta_{12} + a_2\ddot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} - a_3\dot{\theta}_{13}{}^2 \sin\theta_{13} + a_4\dot{\theta}_{14}{}^2 \sin\theta_{14} \\ a_2\dot{\theta}_{12}{}^2 \cos\theta_{12} + a_2\ddot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} + a_3\dot{\theta}_{13}{}^2 \cos\theta_{13} - a_4\dot{\theta}_{14}{}^2 \cos\theta_{14} \end{bmatrix}$$

İvme Analizi

$[A]\vec{\mathrm{a}} = \vec{d} \quad (13)$

Dikkat;

$[A]$ matrisi hız analizinde bulunan matrisin aynısıdır;

(5)’de $[A]$ matrisinin açık hali yazılıdır.

(6) denkleminde bilinmeyenler vektörü $\overrightarrow{\Omega}$ hızları içerirken, (13)’de bilinmeyen vektörü $\vec{\mathrm{a}}$, ivmeleri içerir.

$\vec{d}$ vektörü, uzuv boyutlarının, pozisyon değişkenlerinin, hız değişkenlerinin ve bilinen ivme değişkenlerinin fonksiyonudur.

İvme Analizi için Alternatif Yöntem

Hız Etki katsayılarını kullanarak İvme analizi;

Hatırlatma

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{a_2 \sin(\theta_{12} - \theta_{14})}{a_3 \sin(\theta_{14} - \theta_{13})} \dot{\theta}_{12} = g_{32} \dot{\theta}_{12}$$

$$\dot{\theta}_{14} = \frac{a_2 \sin(\theta_{12} - \theta_{13})}{a_3 \sin(\theta_{14} - \theta_{13})} \dot{\theta}_{12} = g_{42} \dot{\theta}_{12}$$

Hız analizinde bilinmeyen hızlarla bilinen hızlar arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonlara etki katsayısı demiştik ve g ile göstermiştik.

Alternatif yöntem bu ifadelerin türevinin alınmasına dayanmaktadır.

İvme Analizi için Alternatif Yöntem

Hız Etki katsayılarını kullanarak İvme analizi;

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_{13} = g_{32}\dot{\theta}_{12}\right) = \ddot{\theta}_{13} = \dot{g}_{32}\dot{\theta}_{12} + g_{32}\ddot{\theta}_{12} \qquad (14)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_{14} = g_{42}\dot{\theta}_{12}\right) = \ddot{\theta}_{14} = \dot{g}_{42}\dot{\theta}_{14} + g_{42}\ddot{\theta}_{14} \qquad (15)$$

$$\dot{g}_{32} = \frac{a_2}{a_3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(\theta_{12}-\theta_{14})}{\sin(\theta_{14}-\theta_{13})}\right)$$

$$\dot{g}_{32} = \frac{a_2}{a_3}\frac{(\dot{\theta}_{12}-\dot{\theta}_{14})\cos(\theta_{12}-\theta_{14})\sin(\theta_{14}-\theta_{13})-(\dot{\theta}_{14}-\dot{\theta}_{13})\cos(\theta_{14}-\theta_{13})\sin(\theta_{12}-\theta_{14})}{\sin^2(\theta_{14}-\theta_{13})}$$

$$\dot{g}_{42} = \frac{a_2}{a_3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(\theta_{12}-\theta_{13})}{\sin(\theta_{14}-\theta_{13})}\right)$$

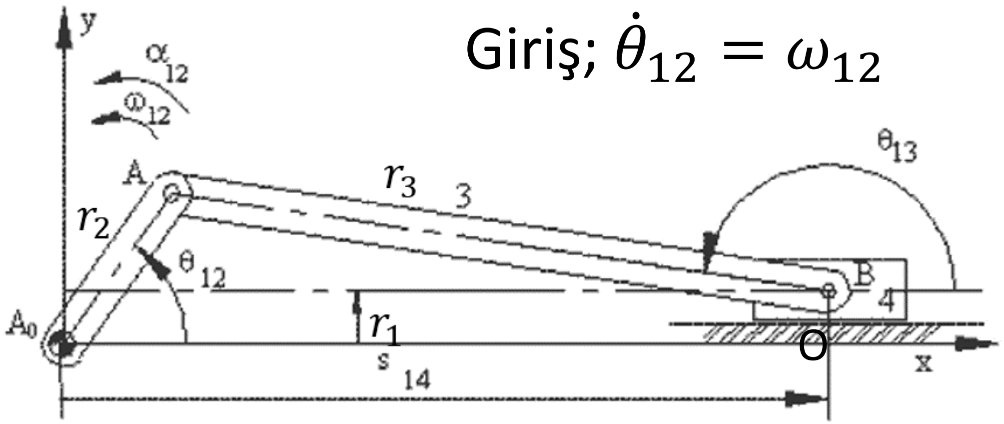
$$\dot{g}_{42} = \frac{a_2}{a_3}\frac{(\dot{\theta}_{12}-\dot{\theta}_{13})\cos(\theta_{12}-\theta_{12})\sin(\theta_{14}-\theta_{13})-(\dot{\theta}_{14}-\dot{\theta}_{13})\cos(\theta_{14}-\theta_{13})\sin(\theta_{12}-\theta_{13})}{\sin^2(\theta_{14}-\theta_{13})}$$

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması

Sabitler; $A_0A = r_2, AB = r_3, OB = r_1$

Değişkenler; $A_0O = \dot{s}_{14}, \dot{\theta}_{13}$

Giriş; $\dot{\theta}_{12} = \omega_{12}$



$$\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

$$r_2 e^{i\theta_{12}} = s_{14} + r_1 i + r_3 e^{i\theta_{13}} \qquad (Vektör\ Kapalılık\ Denklemi - 1)$$

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması

Hız Analizi:

Giriş: $\dot{\theta}_{12} = \omega_{12}\ ve\ tüm\ konum\ değişkenleri$

Bilinmeyenler; $\vec{\Omega} = [\dot{s}_{14}\ ;\ \dot{\theta}_{13}]$

$$r_2 e^{i\theta_{12}} = s_{14} + r_1 i + r_3 e^{i\theta_{13}} \qquad (Vektör\ Kapalılık\ Denklemi - 1)$$

$$\frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}\left(r_2 e^{i\theta_{12}} = s_{14} + r_1 i + r_3 e^{i\theta_{13}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(1) \Longrightarrow r_2 e^{i\theta_{12}} i\dot{\theta}_{12} = \dot{s}_{14} + r_3 e^{i\theta_{13}} i\dot{\theta}_{13}\ (Hız\ Döngü\ Denklemi - 2)$$

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması

Hız Analizi:

$r_2 e^{i\theta_{12}} i\dot{\theta}_{12} = \dot{s}_{14} + r_3 e^{i\theta_{13}} i\dot{\theta}_{13}$ (2)

(2) denklemini gerçel ve sanal kısımlarına ayıralım.

Burada, $e^{i\theta} i = icos\theta - \sin\theta$ olduğuna dikkat edelim.

$-r_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} = \dot{s}_{14} - r_3\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13}$

$r_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} = r_3\dot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} \Longrightarrow \dot{\theta}_{13} = \dfrac{r_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12}}{r_3\cos\theta_{13}}$

$$\therefore \dot{s}_{14} = r_3\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} - r_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12}$$

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması

Hız Analizi:

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{r_2 \cos\theta_{12}}{r_3 \cos\theta_{13}}\dot{\theta}_{12} = g_{32}\dot{\theta}_{12} \quad (4)$$

$$\dot{s}_{14} = r_3 \sin\theta_{13}\frac{r_2 \cos\theta_{12}}{r_3 \cos\theta_{13}}\dot{\theta}_{12} - r_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} = r_2\frac{\sin(\theta_{13}-\theta_{12})}{\cos\theta_{13}}\dot{\theta}_{12}$$

$$\dot{s}_{14} = \frac{r_2 \sin(\theta_{13}-\theta_{12})\dot{\theta}_{12}}{\cos\theta_{13}} = g_{42}\dot{\theta}_{12} \quad (5)$$

$g_{32}\ ve\ g_{42}$ etki katsayıları

$\cos\theta_{13} \neq 0\ için\ çözüm\ var$. Dolayısıyla $\theta_{13} = 90°\ ve\ 270°$ için çözüm yok.

Ancak uzuv boyutları doğru tasarlanırsa mekanizma bu tekil noktalara ulaşmaksızın çalışmasını sürdürebilir.

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması

İvme Analizi:

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{r_2 \cos\theta_{12}}{r_3 \cos\theta_{13}}\dot{\theta}_{12} = g_{32}\dot{\theta}_{12} \quad (4)$$

$$\dot{s}_{14} = \frac{r_2 \sin(\theta_{13} - \theta_{12})\dot{\theta}_{12}}{\cos\theta_{13}} = g_{42}\dot{\theta}_{12} \quad (5)$$

Giriş: $\ddot{\theta}_{12} = \alpha_{12}\ ve\ tüm\ hız\ değişkenleri$

Bilinmeyenler; $\vec{\mathrm{a}} = [\ddot{s}_{14}\ ;\ \ddot{\theta}_{13}]$

Alternatif ivme hesaplama yönteminden yararlanalım ve sırasıyla (4) ve (5) denklemlerinin türevini alalım

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması

İvme Analizi:

$$\frac{d}{dt}(4) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_{13} = \frac{r_2 \cos\theta_{12}}{r_3 \cos\theta_{13}}\dot{\theta}_{12}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(4) = \frac{d}{dt}\left(g_{32}\dot{\theta}_{12}\right)$$

$$\Longrightarrow \ddot{\theta}_{13} = \frac{r_2 \cos\theta_{12}}{r_3 \cos\theta_{13}}\ddot{\theta}_{12} + \frac{\dot{\theta}_{12}\left(-r_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12}\cos\theta_{13} + r_2\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13}\cos\theta_{12}\right)}{r_3\cos^2\theta_{13}}$$

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması

İvme Analizi:

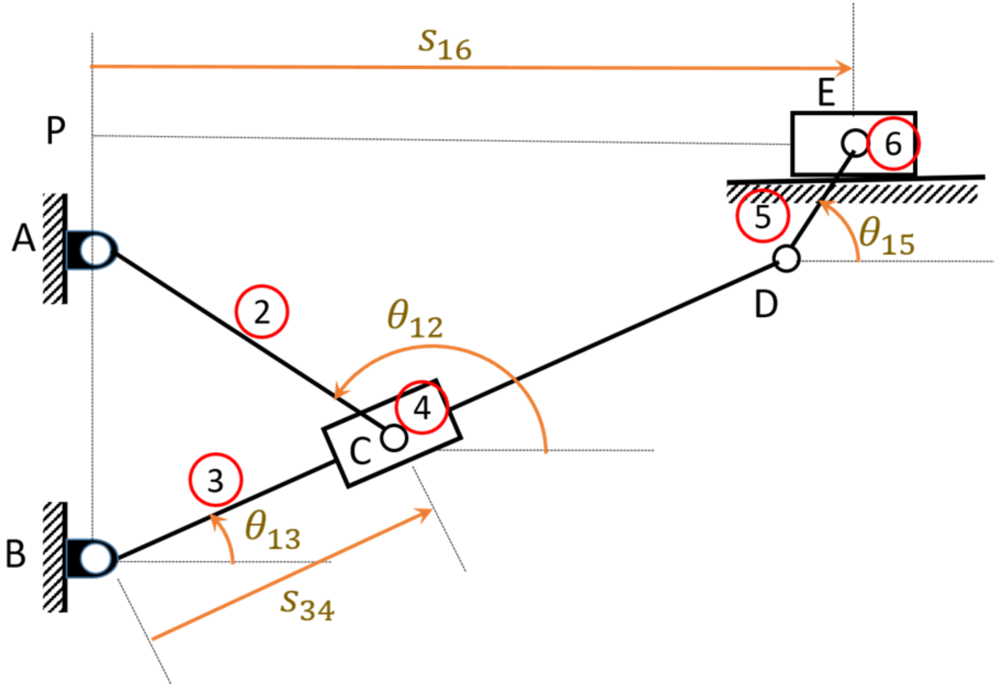
$$\frac{d}{dt}(5) = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}_{14} = \frac{r_2 \sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos\theta_{13}}\dot{\theta}_{12}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(5) = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}_{14} = g_{42}\dot{\theta}_{12}\right) \Longrightarrow$$

$$\ddot{s}_{14} = \frac{r_2 \sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos\theta_{13}}\ddot{\theta}_{12} + \dot{\theta}_{12}\frac{\{r_2\left(\dot{\theta}_{13} - \dot{\theta}_{12}\right)\cos(\theta_{13} - \theta_{12})\cos\theta_{13} - r_2\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13}\sin(\theta_{13} - \theta_{12})\}}{\cos^2\theta_{13}}$$

$$\ddot{s}_{14} = \frac{r_2 \sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos\theta_{13}}\ddot{\theta}_{12} + r_2\dot{\theta}_{12}\frac{\{\dot{\theta}_{13}\cos(2\theta_{13} - \theta_{12}) - \dot{\theta}_{12}\cos(\theta_{13} - \theta_{12})\cos\theta_{13}\}}{\cos^2\theta_{13}}$$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği
Hız ve İvme Analizi



Bu mekanizmanın konum analizini yapmıştık ve

$$s_{34}e^{i\theta_{13}} + r_2e^{i\theta_{12}} = ir_1 \qquad (1)$$

$$r_3e^{i\theta_{13}} + r_5e^{i\theta_{15}} = ib_1 + s_{16} \qquad (2)$$

(1) ve (2) denklemini çözerek konum değişkenlerini bulmuştuk. Şimdi örneğe hız ve ivme analizi için devam edelim;

Bilinenler $s_{34}, \theta_{12}, \theta_{13}, s_{16}, \theta_{15}, \dot{\theta}_{13}$

İstenenler; $\dot{s}_{34}, \dot{\theta}_{12}, \dot{s}_{16}, \dot{\theta}_{15}$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği
Hız ve İvme Analizi

(1) ve (2)'yi gerçel ve sanal kısımlarına ayıralım ve türevlerini alalım ve bilinmeyenleri bulmak üzere düzenleyelim

$$s_{34}\cos\theta_{13} + r_2\cos\theta_{12} = 0 \qquad (3)$$

$$s_{34}\sin\theta_{13} + r_2\sin\theta_{12} = r_1 \qquad (4)$$

$$r_3\cos\theta_{13} + r_5\cos\theta_{15} = s_{16} \qquad (5)$$

$$r_3\sin\theta_{13} + r_5\sin\theta_{15} = b_1 \qquad (6)$$

$$\dot{s}_{34}\cos\theta_{13} - r_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} = \dot{\theta}_{13}s_{34}\sin\theta_{13} \qquad (3')$$

$$\dot{s}_{34}\sin\theta_{13} + r_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} = -\dot{\theta}_{13}s_{34}\cos\theta_{13} \qquad (4')$$

$$r_5\dot{\theta}_{15}\sin\theta_{15} + \dot{s}_{16} = -r_3\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} \qquad (5')$$

$$r_5\dot{\theta}_{15}\cos\theta_{15} = -r_3\dot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} \qquad (6')$$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği
Hız ve İvme Analizi

(3′) - (6′) denklemlerini matris formunda yazalım

$$\dot{s}_{34}\cos\theta_{13} - r_2\dot{\theta}_{12}\sin\theta_{12} = \dot{\theta}_{13}s_{34}\sin\theta_{13} \qquad (3')$$

$$\dot{s}_{34}\sin\theta_{13} + r_2\dot{\theta}_{12}\cos\theta_{12} = -\dot{\theta}_{13}s_{34}\cos\theta_{13} \qquad (4')$$

$$r_5\dot{\theta}_{15}\sin\theta_{15} + \dot{s}_{16} = -r_3\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} \qquad (5')$$

$$r_5\dot{\theta}_{15}\cos\theta_{15} = -r_3\dot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} \qquad (6')$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_{13} & -r_2\sin\theta_{12} & 0 & 0 \\ \sin\theta_{13} & r_2\cos\theta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_5\sin\theta_{15} \\ 0 & 0 & 0 & r_5\cos\theta_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_{34} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{s}_{16} \\ \dot{\theta}_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{13}s_{34}\sin\theta_{13} \\ -\dot{\theta}_{13}s_{34}\cos\theta_{13} \\ -r_3\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} \\ -r_3\dot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} \end{bmatrix}$$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği
Hız ve İvme Analizi

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_{13} & -r_2\sin\theta_{12} & 0 & 0 \\ \sin\theta_{13} & r_2\cos\theta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_5\sin\theta_{15} \\ 0 & 0 & 0 & r_5\cos\theta_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_{34} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{s}_{16} \\ \dot{\theta}_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{13}s_{34}\sin\theta_{13} \\ -\dot{\theta}_{13}s_{34}\cos\theta_{13} \\ -r_3\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} \\ -r_3\dot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} \end{bmatrix}$$

Diagonal (2x2) sıfır matrislerinin varlığı sistemi iki bağımsız matris kümesi olarak ele almamıza olanak verir. Yani;

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_{13} & -r_2\sin\theta_{12} \\ \sin\theta_{13} & r_2\cos\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_{34} \\ \dot{\theta}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{13}s_{34}\sin\theta_{13} \\ -\dot{\theta}_{13}s_{34}\cos\theta_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r_5\sin\theta_{15} \\ 0 & r_5\cos\theta_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_{16} \\ \dot{\theta}_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_3\dot{\theta}_{13}\sin\theta_{13} \\ -r_3\dot{\theta}_{13}\cos\theta_{13} \end{bmatrix}$$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği
Hız ve İvme Analizi

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_{13} & -r_2\sin\theta_{12} \\ \sin\theta_{13} & r_2\cos\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_{34} \\ \dot{\theta}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{13} s_{34}\sin\theta_{13} \\ -\dot{\theta}_{13} s_{34}\cos\theta_{13} \end{bmatrix}$$

$$\dot{s}_{34} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{\theta}_{13} s_{34}\sin\theta_{13} & -r_2\sin\theta_{12} \\ -\dot{\theta}_{13} s_{34}\cos\theta_{13} & r_2\cos\theta_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta_{13} & -r_2\sin\theta_{12} \\ \sin\theta_{13} & r_2\cos\theta_{12} \end{vmatrix}} = \frac{s_{34}\sin(\theta_{13}-\theta_{12})}{\cos(\theta_{13}-\theta_{12})}\dot{\theta}_{13}$$

$$\dot{\theta}_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta_{13} & \dot{\theta}_{13} s_{34}\sin\theta_{13} \\ \sin\theta_{13} & -\dot{\theta}_{13} s_{34}\cos\theta_{13} \end{vmatrix}}{r_2\cos(\theta_{13}-\theta_{12})} = -\frac{s_{34}}{r_2\cos(\theta_{13}-\theta_{12})}\dot{\theta}_{13}$$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği
Hız ve İvme Analizi

$$\begin{bmatrix} 1 & r_5 \sin\theta_{15} \\ 0 & r_5 \cos\theta_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_{16} \\ \dot{\theta}_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_3\dot{\theta}_{13} \sin\theta_{13} \\ -r_3\dot{\theta}_{13} \cos\theta_{13} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta}_{15} = -\frac{r_3 \cos\theta_{13}}{r_5 \cos\theta_{15}} \dot{\theta}_{13}$$

$$\dot{s}_{16} = \frac{\begin{vmatrix} -r_3\dot{\theta}_{13} \sin\theta_{13} & r_5 \sin\theta_{15} \\ -r_3\dot{\theta}_{13} \cos\theta_{13} & r_5 \cos\theta_{15} \end{vmatrix}}{r_5 \cos\theta_{15}} = \frac{r_3\dot{\theta}_{13} \sin(\theta_{15}-\theta_{13})}{\cos\theta_{15}}$$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği
Hız ve İvme Analizi

İvme analizinde bulunan hız ifadelerinin direkt türevini alabiliriz.

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{s}_{34} = \frac{s_{34}\sin(\theta_{13}-\theta_{12})}{\cos(\theta_{13}-\theta_{12})}\dot{\theta}_{13}\right) \Longrightarrow \ddot{s}_{34} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s_{34}\sin(\theta_{13}-\theta_{12})}{\cos(\theta_{13}-\theta_{12})}\dot{\theta}_{13}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_{12} = -\frac{s_{34}}{r_2\cos(\theta_{13}-\theta_{12})}\dot{\theta}_{13}\right) \Longrightarrow \ddot{\theta}_{12} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{s_{34}}{r_2\cos(\theta_{13}-\theta_{12})}\dot{\theta}_{13}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}_{15} = -\frac{r_3\cos\theta_{13}}{r_5\cos\theta_{15}}\dot{\theta}_{13}\right) \Longrightarrow \ddot{\theta}_{15} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{r_3\cos\theta_{13}}{r_5\cos\theta_{15}}\dot{\theta}_{13}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{s}_{16} = \frac{r_3\dot{\theta}_{13}\sin(\theta_{15}-\theta_{13})}{\cos\theta_{15}}\right) \Longrightarrow \ddot{s}_{16} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r_3\dot{\theta}_{13}\sin(\theta_{15}-\theta_{13})}{\cos\theta_{15}}\right)$$