Mekanizma Tekniği

MEKANİZMALARDA KONUM ANALİZİ

DR. ÖĞR. ÜYESİ NURDAN BİLGİN

Giriş

Konum Analizi (KA):

Bir mekanizmanın konum analizi, mekanizmanın tüm uzuvlarının konumlarının $(\theta_{ij}\ , s_{ij})$ belirlenmesi demektir.

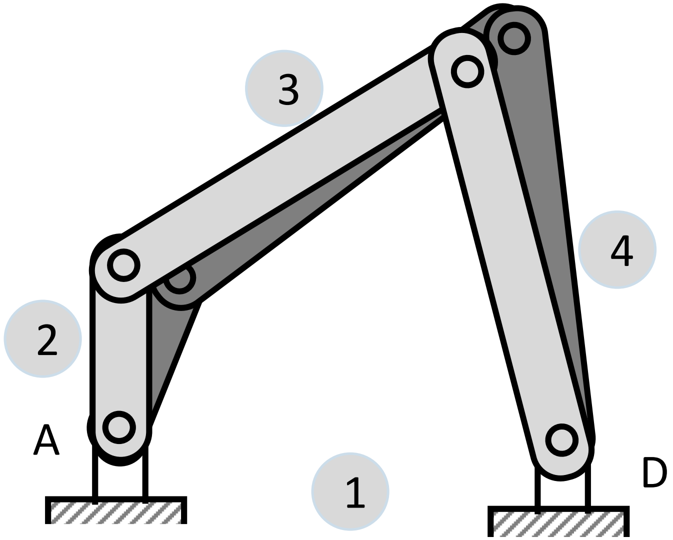
Aynı zamanda, konum analizi **vektör kapalılık (devre)** denklemlerinden tüm bilinmeyenlerinin çözülmesi olarakda bilinir.

Mekanizmaların Kinematik Analizi		
Konum Analizi	Hız Analiz	İvme Analizi

Konum Analizi için Yöntemler

1. Grafiksel Çözüm
2. Analitik Çözümler
   a) Kompleks sayılar kullanılarak çözüm
   b) Gerçek sayılar kullanılarak çözüm
3. Sayısal Çözüm
4. İteratif Çözüm

Grafiksel Çözüm

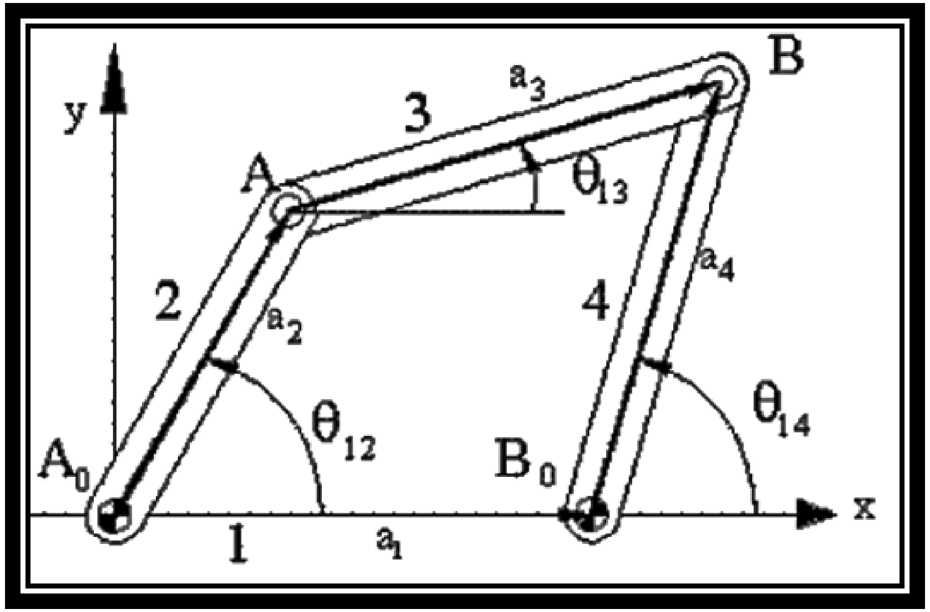


Serbestlik derecesi kadar konum değişken ve uzuv boyutları belirli olan mekanizmanın

Grafik yöntemi kullanılarak bilinmeyen konum parametreleri belirlenebilir.

Ödev: Autocad ile kitabınızdan herhangi bir mekanizmayı çizip, mekanizmayı döndürerek uzuvların yörüngelerini elde edin.

Analitik Çözümler-Gerçek sayılar kullanılarak çözüm



Bu yöntemi, dört-çubuk mekanizması üzerinde ele alacağız.

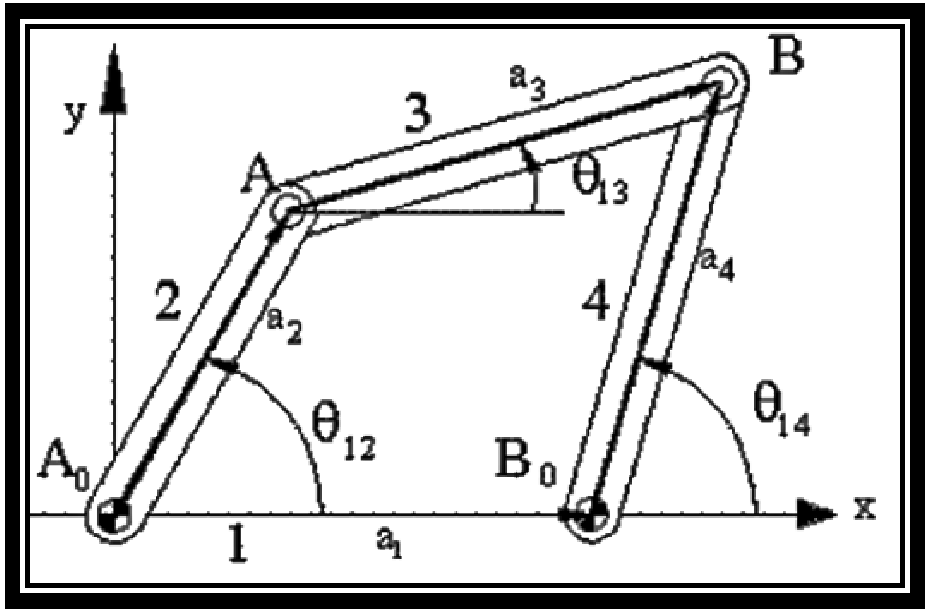
Devre kapalılık denklemi

$$A_0A + AB = A_0B_0 + B_0B$$

Bu durumda devre kapalılık denklemi kompleks sayılar ile:

$$a_2e^{i\theta_{12}} + a_3e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4e^{i\theta_{14}} \qquad (1)$$

Analitik Çözümler-Gerçek sayılar kullanılarak çözüm



$$a_2 e^{i\theta_{12}} + a_3 e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4 e^{i\theta_{14}} \qquad (1)$$

Sanal ve gerçel parçaları ayrı ayrı yazılarak

$$a_2 \cos\theta_{12} + a_3 \cos\theta_{13} = a_1 + a_4 \cos\theta_{14}$$
$$a_2 \sin\theta_{12} + a_3 \sin\theta_{13} = a_4 \sin\theta_{14}$$

Önce bilinmeyenlerden biri (θ_{13} açısı) yok edilmek üzere sol da yalnız bırakılır

$$a_3 \cos\theta_{13} = a_1 - a_2 \cos\theta_{12} + a_4 \cos\theta_{14} \quad (1)$$
$$a_3 \sin\theta_{13} = a_4 \sin\theta_{14} - a_2 \sin\theta_{12} \qquad (2)$$

Analitik Çözümler-Gerçek sayılar kullanılarak çözüm

$$a_3 \cos\theta_{13} = a_1 - a_2 \cos\theta_{12} + a_4 \cos\theta_{14} \; (1)$$

$$a_3 \sin\theta_{13} = a_4 \sin\theta_{14} - a_2 \sin\theta_{12} \qquad (2)$$

(1) ve (2)'nin kareleri alınıp taraf tarafa toplanır.

$$a_3{}^2 \cos^2\theta_{13} = a_1{}^2 + a_2{}^2 \cos^2\theta_{12} + a_4{}^2 \cos^2\theta_{14} - 2a_1a_2 \cos\theta_{12} + 2a_1a_4 \cos\theta_{14} - 2a_2a_4 \cos\theta_{12} \cos\theta_{14} \; (1a)$$

$$a_3{}^2 \sin^2\theta_{13} = a_4{}^2 \sin^2\theta_{14} + a_2{}^2 \sin^2\theta_{12} - 2a_2a_4 \sin\theta_{12} \sin\theta_{14} \; (2a)$$

Analitik Çözümler-Gerçek sayılar kullanılarak çözüm

(1a) ve (2a) denklemleri taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse

$$a_3{}^2 = a_1{}^2 + a_4{}^2 + a_2{}^2 + 2a_1a_4\, cos\, \theta_{14} - 2a_1a_2\, cos\, \theta_{12} - 2a_2a_4 \cos\theta_{12} \cos\theta_{14} - 2a_2a_4 \sin\theta_{12} \sin\theta_{14}$$

$$(2a_2a_4 \cos\theta_{12} - 2a_1a_4) \cos\theta_{14} + (2a_2a_4 \sin\theta_{12}) \sin\theta_{14} = a_1{}^2 + a_2{}^2 - a_3{}^2 + a_4{}^2 - 2a_1a_2\, cos\, \theta_{12}$$

böylelikle

$$A \cos\theta_{14} + Bsin\theta_{14} = C$$

Denklemi elde edilir. Elde edilen denklem tek bilinmeyenli ancak trigonometrik bir denklemdir.

Şimdi bu tip bir denklemi nasıl çözeceğimizi göreceğiz.

Analitik Konum Analizi: Temeller

$\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ tek bir argüman için iki değer üreten fonksiyonlardır.

atan2$(\cos\theta, \sin\theta)$ çift argüman girişi ile tek değer döndürür.

$A\cos\theta + B\sin\theta = C$ Denkleminin Çözümü

Bu denklemde A, B ve C sabit ve bilinmektedir, bilinmeyen $\theta'\text{nın}$ çözümü için iki yöntem vardır.

- 1. Yöntem $\sin\theta\ ve\ \cos\theta$ değerlerinin $\tan(\theta/2)$ cinsinden karşılıklarını yazmak
- 2. Yöntem trigonometrik fark formüllerinden yararlanmaktır.

$A\cos\theta + B\sin\theta = C'\,nin\ 1.\,yöntem\ ile$ Çözümü

$\tan(\theta/2) = t$ denilirse,

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad (1)\ ve$$

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (2)$$

olarak ifade edilir.

(1) ve (2) ifadeleri $A\cos\theta + B\sin\theta = C$ ifadesinde yerine yazılarak,

$$A\frac{1-t^2}{1+t^2} + B\frac{2t}{1+t^2} = C \qquad (3)$$

Elde edilir.

$A\cos\theta + B\sin\theta = C'$ nin 1. $yöntem$ ile Çözümü

$$A\frac{1-t^2}{1+t^2} + B\frac{2t}{1+t^2} = C \qquad (3)$$

(3) denkleminin tüm terimleri $(1+t^2)$ ile çarpılarak

$$A(1-t^2) + B(2t) = C(1+t^2) \qquad (4)$$

Elde edilir. (4) düzenlenerek aşağıdaki II. derece denklem elde edilir.

$$(A+C)t^2 - 2Bt + (C-A) = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{A^2+B^2-C^2}}{(A+C)}$$

$A\cos\theta + B\sin\theta = C'\,nin\ 1.\,yöntem\ ile$ Çözümü

$$(A+C)t^2 - 2Bt + (C-A) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Hatırlatma } \Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ ve } \mathrm{x}_{1,2} = \frac{-\mathrm{b} \pm \Delta}{2a}$$

(4) Denkleminde $a = (A+C), b = 2B, c = (C-A) ve\ bulunması\ istenen\ değişken\ t$

$$t_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{(A+C)}$$

t'yi bulmamız yeterli değil, çünkü aradığımız θ

$\tan(\theta/2) = t$ idi,

$A\cos\theta + B\sin\theta = C'nin\ 1.yöntem\ ile$ Çözümü

$\tan(\theta/2) = t$ idi,

$$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}(t) \Rightarrow \theta = 2\tan^{-1}\left[\frac{B+\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{(A+C)}\right]$$

Diğer çözüm için ise,

$$\theta = 2\tan^{-1}\left[\frac{B-\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{(A+C)}\right]$$

Bu denklem çözümünde θ için iki farklı değer bulunur.

$A\cos\theta + B\sin\theta = C'$ $nin\ 2.\ yöntem\ ile$ çözümü

$A\cos\theta + B\sin\theta = C \quad (1)$

$D = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2)$

olmak üzere

$A = \mathrm{D}\cos\phi$ (3) ve

$B = \mathrm{D}\sin\phi$ (4) yazılabilir.

$A\cos\theta + B\sin\theta = C'nin\ 2.yöntem\ ile$ çözümü

Fi açısı $\phi = atan2({}^{A}/_{D}, {}^{B}/_{D})$'den bulunur.

$A = \mathrm{D}\cos\phi$ (3) ve $B = \mathrm{D}\sin\phi$ (4)
$A\cos\theta + B\sin\theta = C \quad (1)$

(3) ve (4)'ü (1)'de yerine yazarsak

$\mathrm{D}\cos\phi\cos\theta + \mathrm{D}\sin\phi\sin\theta = C\ (1a)$ olur.

$$\mathrm{D}(\underbrace{\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta}_{cos(\phi-\theta)}) = C$$

Hatırlatma $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$A\cos\theta + B\sin\theta = C'nin\ 2.yöntem\ ile$ çözümü

$\mathrm{D}\cos(\theta-\phi) = C \qquad (1b).$

(1b) denkleminin çözümü ile θ için iki değer $\theta_{1,2}$ elde edilir.

$$\theta_{1,2} = \pm\cos^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) + \phi$$

Analitik Çözümler-Gerçek sayılar kullanılarak çözüm

Dört çubuk mekanizmasının çözümünde

$$\underbrace{(2a_2a_4\cos\theta_{12} - 2a_1a_4)}_{A}\cos\theta_{14} + \underbrace{(2a_2a_4\sin\theta_{12})}_{B}\sin\theta_{14} = \underbrace{{a_1}^2 + {a_2}^2 - {a_3}^2 + {a_4}^2 - 2a_1a_2\,cos\,\theta_{12}}_{C}$$

böylelikle

$$A\cos\theta_{14} + Bsin\theta_{14} = C$$

Denklemini elde etmiştik

Analitik Çözümler-Gerçek sayılar kullanılarak çözüm

$$A\cos\theta_{14} + B sin\theta_{14} = C$$
$$D = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$A = \mathrm{D}\cos\phi$ ve $B = \mathrm{D}\sin\phi$

$$\mathrm{D}\cos\phi\cos\theta_{14} + \mathrm{D}\sin\phi\, sin\theta_{14} = C$$
$$\mathrm{D}\cos(\phi - \theta_{14}) = \mathrm{C}$$
$$\theta_{14} = \cos^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) + \phi, \theta_{14} = -\cos^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) + \phi$$
$$a_3\cos\theta_{13} = a_1 - a_2\cos\theta_{12} + a_4\cos\theta_{14} \quad (1)$$
$$a_3\sin\theta_{13} = a_4\sin\theta_{14} - a_2\sin\theta_{12} \quad (2)$$

Analitik Çözümler-Gerçek sayılar kullanılarak çözüm

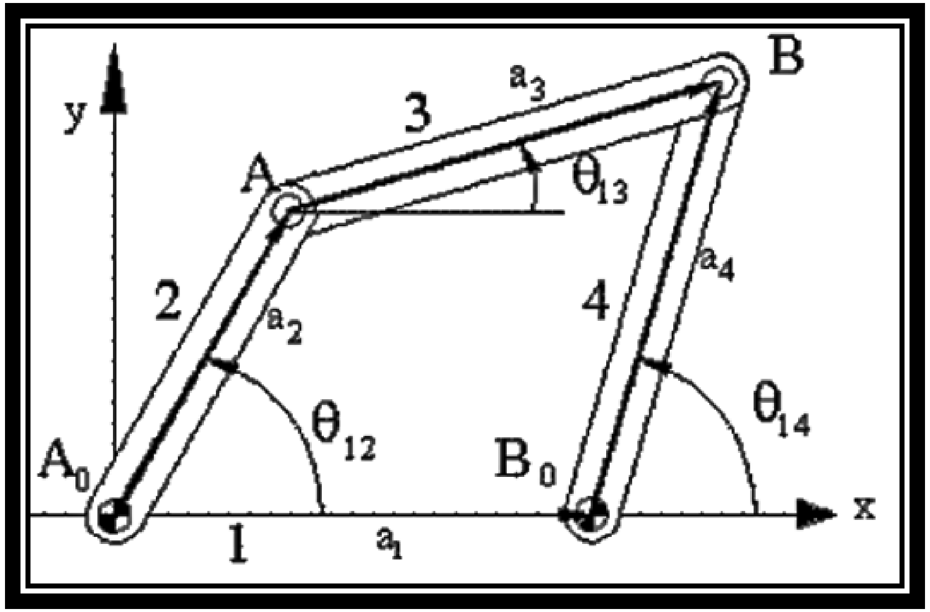
$$\theta_{14} = \cos^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) + \phi, \theta_{14} = -\cos^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) + \phi$$

θ_{14}'ün iki çözümünü sırasıyla (1) ve (2) denkleminde yerine koyarak θ_{13} içinde iki çözüm buluruz.

$$a_3 \cos\theta_{13} = a_1 - a_2 \cos\theta_{12} + a_4 \cos\theta_{14} \quad (1)$$

$$a_3 \sin\theta_{13} = a_4\, sin\, \theta_{14} - a_2 \sin\theta_{12} \quad (2)$$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm



Kompleks sayılar, devre kapalılık denklemlerinin yazılmasında oldukça kullanılışlıdır. Bu nedenle, aynı kolaylıkla mekanizmalarda konum parametrelerinin çözümü için kullanılabilmektedirler. Bu yöntemi de, dört-çubuk mekanizması üzerinde ele alacağız.

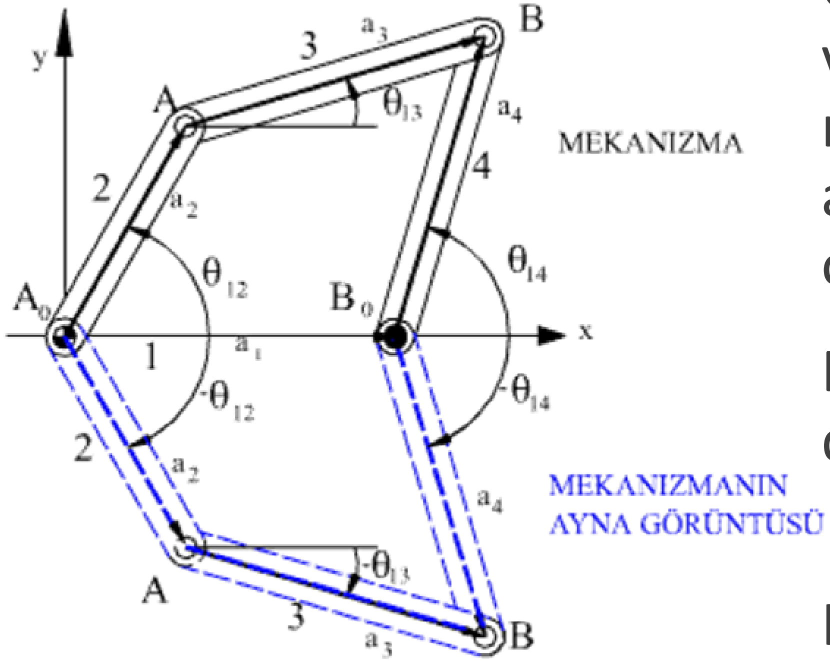
Hatırlarsak devre kapalılık denklemi

$$A_0A + AB = A_0B_0 + B_0B$$

Devre kapalılık denklemi kompleks sayılar ile:

$$a_2e^{i\theta_{12}} + a_3e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4e^{i\theta_{14}} \qquad (1)$$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm



Gerçek devre ile görüntüde oluşan devrede vektörlerin boyutları aynı görülecek ancak gerçek mekanizmada saat yelkovanına ters yönde alınan açılar, ayna görüntüde saat yelkovanı yönünde olacaklardır.

Bu görüntüde oluşan devre için, devre kapalılık denklemini yazdığımızda:

$$a_2 e^{-i\theta_{12}} + a_3 e^{-i\theta_{13}} = a_1 + a_4 e^{-i\theta_{14}} \qquad (2)$$

Kompleks sayı literatüründe elde edilen bu ikinci denkleme **devre kapalılık denkleminin sanal eşleniği** denmektedir.

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

Amacımız, bilinmeyen konum parametrelerini bilinenler cinsinden ifade etmek,

- Örneğimizde $\boldsymbol{\theta_{12}}$'nin verildiğini θ_{13} ve θ_{14}'ün bulunması gerektiğini hatırlayalım.
- Önce θ_{14}'ü bulalım.
- İlk yapılacak iş θ_{13}'ü yok etmek. Bunun için bu değişkeni denklemin sol tarafında yalnız bırakalım.

$$a_3 e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4 e^{i\theta_{14}} - a_2 e^{i\theta_{12}} \qquad (3)$$

$$a_3 e^{-i\theta_{13}} = a_1 + a_4 e^{-i\theta_{14}} - a_2 e^{-i\theta_{12}} \qquad (4)$$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

$$a_3 e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4 e^{i\theta_{14}} - a_2 e^{i\theta_{12}} \qquad (3)$$
$$a_3 e^{-i\theta_{13}} = a_1 + a_4 e^{-i\theta_{14}} - a_2 e^{-i\theta_{12}} (4)$$

(3) ve (4) denklemlerini taraf tarafa çarparsak

$$a_3{}^2 e^{i(\theta_{13}-\theta_{13})} = \left(a_1 + a_4 e^{i\theta_{14}} - a_2 e^{i\theta_{12}}\right)\left(a_1 + a_4 e^{-i\theta_{14}} - a_2 e^{-i\theta_{12}}\right) \qquad (5)$$

$$e^{i(\theta_{13}-\theta_{13})} = e^{i\left(\theta_{ij}-\theta_{ij}\right)} = e^0 = 1$$

Olduğu bilindiğine göre, çarpım sonucu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a_3{}^2 = a_1{}^2 + a_4{}^2 + a_2{}^2 + a_1 a_4\left(e^{i\theta_{14}} + e^{-i\theta_{14}}\right) - a_1 a_2\left(e^{i\theta_{12}} + e^{-i\theta_{12}}\right) - a_2 a_4\left(e^{i(\theta_{14}-\theta_{12})} + e^{-i(\theta_{14}-\theta_{12})}\right) (6)$$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

$$a_3{}^2 = a_1{}^2 + a_4{}^2 + a_2{}^2 + a_1 a_4\left(e^{i\theta_{14}} + e^{-i\theta_{14}}\right) - a_1 a_2\left(e^{i\theta_{12}} + e^{-i\theta_{12}}\right) - a_2 a_4\left(e^{i(\theta_{14}-\theta_{12})} + e^{-i(\theta_{14}-\theta_{12})}\right) \quad (6)$$

Euler denklemine göre $\cos\theta = \left(e^{i\theta_{14}} + e^{-i\theta_{14}}\right)/2$ olacağından, (6) numaralı denklem:

$$a_3{}^2 = a_1{}^2 + a_4{}^2 + a_2{}^2 + 2a_1 a_4 \cos\theta_{14} - 2a_1 a_2 \cos\theta_{12} - 2a_2 a_4 \cos(\theta_{14} - \theta_{12})$$

$$2a_1 a_4 \cos\theta_{14} - 2a_1 a_2 \cos\theta_{12} + a_1{}^2 + a_2{}^2 - a_3{}^2 + a_4{}^2 = 2a_2 a_4 \cos(\theta_{14} - \theta_{12})$$

$$\frac{a_1}{a_2}\cos\theta_{14} - \frac{a_1}{a_4}\cos\theta_{12} + \frac{a_1{}^2 + a_2{}^2 - a_3{}^2 + a_4{}^2}{2a_2 a_4} = \cos(\theta_{14} - \theta_{12})$$

Olur, gerekli düzenlemeler ile

$$K_1 \cos\theta_{14} - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \cos(\theta_{14} - \theta_{12}) \qquad (7)$$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

$$K_1 \cos\theta_{14} - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \cos(\theta_{14} - \theta_{12}) \qquad (7)$$

(7) denkleminde:

$$K_1 = \frac{a_1}{a_2}, \qquad K_2 = \frac{a_1}{a_4} \;\; ve \; K_3 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2}{2a_2a_4}$$

dir. (7) numaralı denkleme, bunu ilk tanımlayan kişiye atfen "**Freudenstein denklemi**" denmektedir.

Bu denklem dört-çubuk mekanizmalarının sentezinde önemli rol oynar.

θ_{14} ve θ_{12} değişkenleri arasında ilişki bu denklem ile belirlidir.

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

$$K_1 \cos\theta_{14} - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \cos(\theta_{14} - \theta_{12}) \qquad (7)$$

Ancak verilen bir θ_{12} değerine karşı gelen θ_{14} açısını (7) numaralı denklemden kolayca belirlemek mevcut durumu ile mümkün değildir.

Freudenstein denklemini

$$K_1 \cos\theta_{14} - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \cos\theta_{14}\cos\theta_{12} + \sin\theta_{14}\sin\theta_{12} \qquad (8)$$

Şeklinde yazabiliriz. Bu denklemde bilinmeyenler $\cos\theta_{14}\ \ ve \sin\theta_{14}$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

$$K_1 \cos\theta_{14} - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \cos\theta_{14}\cos\theta_{12} + \sin\theta_{14}\sin\theta_{12} \qquad (8)$$

Trigonometrik eşitliklerinden yararlanarak $\cos\theta_{14}$ ve $\sin\theta_{14}$ terimlerini

$t = \tan\left({}^{\theta_{14}}/_{2}\right)$ fonksiyonu ile gösterir isek

$$\sin\theta_{14} = \frac{2\tan\left({}^{\theta_{14}}/_{2}\right)}{1+\tan^2\left({}^{\theta_{14}}/_{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\theta_{14} = \frac{1-\tan^2\left({}^{\theta_{14}}/_{2}\right)}{1+\tan^2\left({}^{\theta_{14}}/_{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

$$K_1 \cos\theta_{14} - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \cos\theta_{14} \cos\theta_{12} + \sin\theta_{14} \sin\theta_{12} \qquad (8)$$

Bulunan $\sin\theta_{14} = \frac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos\theta_{14} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ilişkileri (8)'de yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$K_1\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \frac{1-t^2}{1+t^2}\cos\theta_{12} + \frac{2t}{1+t^2}\sin\theta_{12}$$

$$K_1(1-t^2) - K_2(1+t^2)\cos\theta_{12} + K_3(1+t^2) = (1-t^2)\cos\theta_{12} + 2t\sin\theta_{12}$$

$$(\cos\theta_{12}(1-K_2) + K_3 - K_1)\ t^2 + (-2\sin\theta_{12})t + (\cos\theta_{12}(1+K_2) + K_3 + K_1) = 0$$

Freudenstein denklemi:

$$At^2 + Bt + C = 0 \qquad (9)$$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

Freudenstein denklemi:

$$At^2 + Bt + C = 0 \qquad (9)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde:

$$A = \cos\theta_{12}(1 - K_2) + K_3 - K_1$$
$$B = -2\sin\theta_{12}$$
$$C = \cos\theta_{12}(1 + K_2) + K_3 + K_1$$

Not: bir açının yarısını kullanarak açının tüm trigonemetrik fonksiyonlarını sadece yarım açının tanjant fonksiyonu ile ifade edilmesi **yarım tanjant yöntemi** olarak bilinir

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

Dikkat edilir ise, θ_{12} bağımsız parametre değeri ve uzuv boyutları biliniyor ise A,B ve C parametre değerlerini hesaplayabiliriz.

Freudenstein denklemi:

$$At^2 + Bt + C = 0 \qquad (9)$$

Denklemdeki parametreler:

$$A = \cos\theta_{12}(1 - K_2) + K_3 - K_1$$
$$B = -2\sin\theta_{12}$$
$$C = \cos\theta_{12}(1 + K_2) + K_3 + K_1$$

(9) numaralı denklem $t = \tan\left({}^{\theta_{14}}/_{2}\right)$ ‘e göre ikinci dereceden bir denklemdir ve çözümü:

$$t = \tan\left({}^{\theta_{14}}/_{2}\right) = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}$$

olacaktır.

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm

$t = \tan\left({}^{\theta_{14}}/_{2}\right)$ çözüldükten sonra bilinmeyen θ_{14} açısı bu durumda

$$\theta_{14} = 2\tan^{-1}\left[\frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}\right] \qquad (10)$$

olur.

(10) denklemi diskriminantın artı veya eksi işaret almasına göre iki değişik θ_{14} değeri verecektir.

Bu mekanizmanın iki farklı şekilde monte edilmesi ile ilgilidir.

Son olarak, bulunan θ_{14} değeri ve başlangıçta bilinen θ_{12} değeri kullanılarak θ_{13}’de bulunur.

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm (2)

"**Freudenstein denklemi**"

$$K_1 \cos\theta_{14} - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \cos(\theta_{14} - \theta_{12}) \qquad (7)$$

Freudenstein denklemininin düzenlenmiş biçimi

$$K_1 \cos\theta_{14} - K_2 \cos\theta_{12} + K_3 = \cos\theta_{14}\cos\theta_{12} + \sin\theta_{14}\sin\theta_{12} \qquad (8)$$

(8) denklemini yeniden düzenlersek

$$K_3 - K_2 \cos\theta_{12} = \cos\theta_{14}(\cos\theta_{12} - K_1) + \sin\theta_{14}\sin\theta_{12} \qquad (8a)$$

Ardından çözümünü sunumun başında anlatılan denklem formatına ulaşılır.

$$C = A\cos\theta_{14} + B\sin\theta_{14} \qquad (8b)$$

Burada $C = K_3 - K_2\cos\theta_{12}$, $A = \cos\theta_{12} - K_1$ ve $B = \sin\theta_{12}$

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm (2)

$$C = A\cos\theta_{14} + B\sin\theta_{14} \qquad (8b)$$

Burada $C = K_3 - K_2\cos\theta_{12}$, $A = \cos\theta_{12} - K_1$ ve $B = \sin\theta_{12}$

Dikkat edilir ise, θ_{12} bağımsız parametre değeri ve uzuv boyutları biliniyor ise A,B ve C parametre değerlerini hesaplayabiliriz.

$$C = A\cos\theta_{14} + B\sin\theta_{14}$$

Denkleminden bilinmeyen θ_{14} açısı için iki değişik θ_{14} değeri bulunacaktır. Bu mekanizmanın iki farklı şekilde monte edilmesi ile ilgilidir.

Analitik Çözümler-Kompleks sayılar kullanılarak çözüm (2)

Son olarak, bulunan θ_{14} değeri ve başlangıçta bilinen θ_{12} değeri kullanılarak θ_{13}'de bulunur. Vektör kapalılık denkleminin

$$a_2 e^{i\theta_{12}} + a_3 e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4 e^{i\theta_{14}}$$

Sanal ve gerçel parçaları ayrı ayrı yazılırsa

$$a_2 \cos\theta_{12} + a_3 \cos\theta_{13} = a_1 + a_4 \cos\theta_{14}$$
$$a_2 \sin\theta_{12} + a_3 \sin\theta_{13} = a_4 \sin\theta_{14}$$

bulunur. Buradan θ_{13} açısının cos ve sin değeri elde edilir. Bulunan değerler atan2 fonksiyonunda yerine yazılarak θ_{13} açısı bulunur.

$$\cos\theta_{13} = \frac{a_1 - a_2 \cos\theta_{12} + a_4 \cos\theta_{14}}{a_3}$$
$$\sin\theta_{13} = \frac{a_4 \sin\theta_{14} - a_2 \sin\theta_{12}}{a_3}$$
$$\theta_{13} = \mathrm{atan2}(\cos\theta_{13}, \sin\theta_{13})$$