

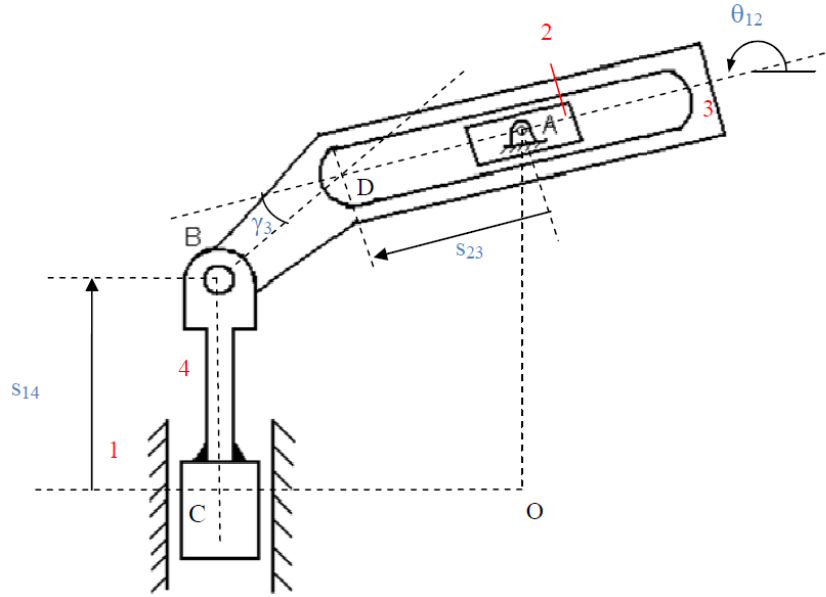
MAK313 MEKANİZMA TEKNİĞİ
Örnek Çözümlü Sorular
Dr. Nurdan Bilgin

SORULAR

Soru 1: Aşağıdaki mekanizmaların her biri için

- Uzay serbestlik derecesi, uzuv sayısı, mafsalsayısı ve mafsalserbestlik derecelerini belirterek, ilgili formülü kullanarak mekanizma serbestlik derecesini bulunuz.
- Vektör kapalılık denklemlerini yazınız.
- Vektör kapalılık denklemlerini kompleks sayılar kullanarak yeniden yazınız.
- Bilinmeyen mafsalsdeğişkenlerini bulunuz.

i.) Şekil 1’de gösterilen ilk mekanizma bir çift kızak mekanizmasıdır. Boyutları $|OA| = b_1$, $|OC| = c_1$ ve $|BD| = b_3$ olarak verilmektedir. Giriş mafsalsdeğişkeni s_{14} olarak verilmiştir, γ_3 uzvun şekline bağlı bir açı olup sabittir. Buna göre diğer değişkenler s_{23} , ve θ_{12} ’yi bulunuz.



Şekil 1

Çözüm:

- $F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$
Düzlemde hareket ediyor; uzay serbestlik derecesi $\lambda = 3$
 $l = 4, j = 4$ ($2P + 2R$) ve $\sum_{i=1}^j f_i = 4$ olarak bulunur.
Bu durumda $F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i = 1$ dir.
- $\vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DB} = \vec{OC} + \vec{CB}$
- $ib_1 + s_{23}e^{i\theta_{12}} + b_3e^{i(\theta_{12} + \gamma_3)} = -c_1 + is_{14}$

d.) Bilinmeyen mafsalsal değişkenlerini bulmak için yukarıda yazdığımız devre kapalılık denkleminin sanal ve gerçel parçalarını ayrı ayrı yazalım

Euler denkleminin: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ olduğunu hatırlayalım.

$$\text{Sanal Parça: } b_1 + s_{23}\sin\theta_{12} + b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3) = s_{14} \quad (1)$$

$$\text{Gerçel Parça: } s_{23}\cos\theta_{12} + b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3) = -c_1 \quad (2)$$

(1) ve (2)'yi düzenleyelim.

$$s_{23}\sin\theta_{12} = s_{14} - b_1 - b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3) \quad (1')$$

$$s_{23}\cos\theta_{12} = -c_1 - b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3) \quad (2')$$

(1') ve (2')'ı taraf tarafa bölersek; bilinmeyenlerden biri yok edilmiş olur.

$$\frac{\sin\theta_{12}}{\cos\theta_{12}} = \frac{s_{14} - b_1 - b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3)}{-c_1 - b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3)} \quad (3')$$

Elde ettiğimiz denklemin (3') taraf tarafa çarpıp düzenleyelim

$$\begin{aligned} -c_1 \sin\theta_{12} - b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3) \sin\theta_{12} &= (s_{14} - b_1) \cos\theta_{12} - b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3) \cos\theta_{12} \\ b_3 (\sin(\theta_{12} + \gamma_3) \cos\theta_{12} - \cos(\theta_{12} + \gamma_3) \sin\theta_{12}) &= (s_{14} - b_1) \cos\theta_{12} + c_1 \sin\theta_{12} \quad (4') \end{aligned}$$

Hatırlayalım; $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

Bu özellikten yararlanarak (4') denkleminin

$$b_3 \sin\gamma_3 = (s_{14} - b_1) \cos\theta_{12} + c_1 \sin\theta_{12} \quad (5')$$

$b_3 \sin\gamma_3 =$ sabit bir sayı, buna C diyelim.

$s_{14} - b_1 =$ an itibarıyla bilinenler oluşan bir nicelik buna da A diyelim.

c_1 de B olsun. Bu durumda

$$C = A \cos\theta_{12} + B \sin\theta_{12} \quad (6')$$

çözerek θ_{12} 'yi elde edebiliriz.

$\sqrt{A^2 + B^2} = D$ olmak üzere, $A = D \cos\phi$ ve $B = D \sin\phi$ yazabiliriz. İki ifadeyi taraf tarafa bölersek, $\tan\phi = \frac{B}{A} \Rightarrow \phi = \tan^{-1} \frac{B}{A}$ olarak bulunur. Artık bilinen ϕ açısı değeriyle (6')

ifadesi

$C = D \cos\phi \cos\theta_{12} + D \sin\phi \sin\theta_{12}$ halini alır. Bu denklem kapalı formda (7') deki gibi yazılabilir.

$$C = D \cos(\theta_{12} - \phi) \quad (7')$$

$$\theta_{12} = \phi \pm \cos^{-1} \frac{C}{D}$$

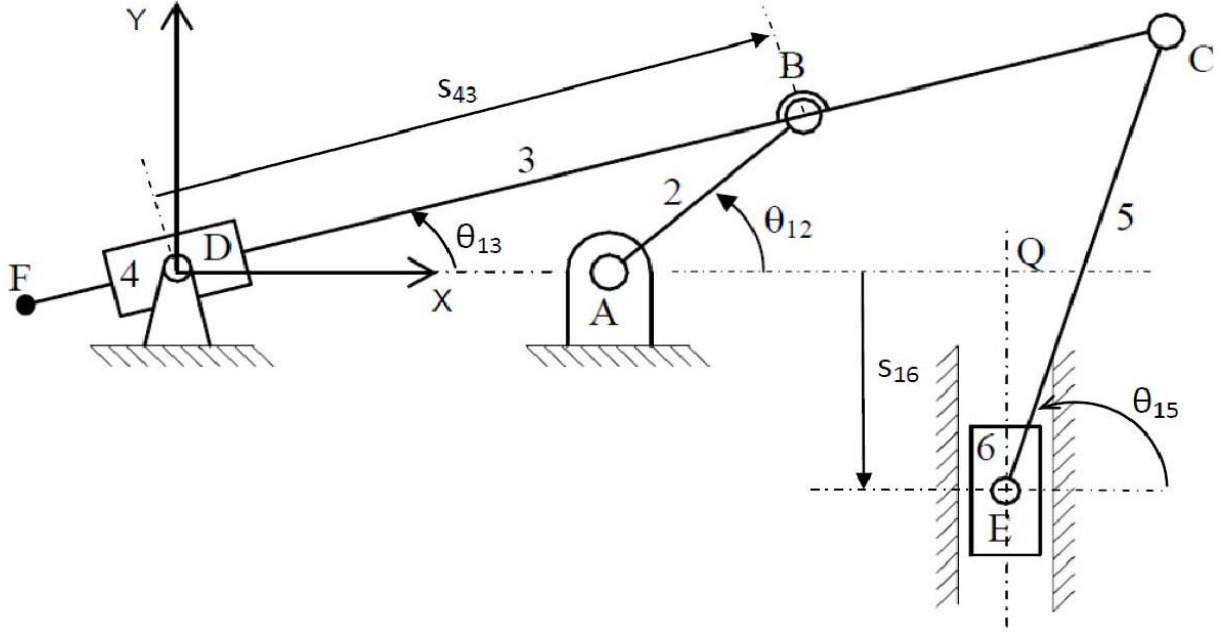
Bulunur. Ardından diğer bilinmeyen s_{23} (1') veya (2') denkleminde bulunabilir. Şöyle ki

$$s_{23} = \frac{s_{14} - b_1 - b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3)}{\sin\theta_{12}}$$

veya

$$s_{23} = \frac{-c_1 - b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3)}{\cos\theta_{12}}$$

- ii.) Şekil 2’de gösterilen ikinci mekanizmanın boyutları $|AB| = r_2$, $|AD| = r_1$, $|AQ| = b_1$, $|BC| = r_3$ ve $|EC| = r_5$ olarak verilmektedir. Giriş mafsalsal değişkeni θ_{12} olarak verilmiştir. Buna göre diğer değişkenler θ_{14} , θ_{15} , s_{34} ve s_{16} ’yi bulunuz.



Şekil 2

Çözüm:

- a.) $F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$
 Düzlemde hareket ediyor; uzay serbestlik derecesi $\lambda = 3$
 $l = 6, j = 7$ ($2P + 5R$) ve $\sum_{i=1}^j f_i = 7$ olarak bulunur.
 Bu durumda $F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i = 1$ dir.

b.) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EC}$

c.) $r_1 + r_2 e^{i\theta_{12}} = s_{43} e^{i\theta_{13}}$ (1)
 $r_2 e^{i\theta_{12}} + r_3 e^{i\theta_{13}} = b_1 - i s_{16} + r_5 e^{i\theta_{15}}$ (2)

d.) $r_1 + r_2 \cos\theta_{12} = s_{43} \cos\theta_{13}$ (1a)
 $r_2 \sin\theta_{12} = s_{43} \sin\theta_{13}$ (1b)
 $r_2 \cos\theta_{12} + r_3 \cos\theta_{13} = b_1 + r_5 \cos\theta_{15}$ (2a)
 $r_2 \sin\theta_{12} + r_3 \sin\theta_{13} = -s_{16} + r_5 \sin\theta_{15}$ (2b)

(1b)/(1a) ifadesi bize bilinmeyenlerden birinin yok edilmesi olanağını tanır. Böylelikle

$$\frac{r_2 \sin\theta_{12}}{r_1 + r_2 \cos\theta_{12}} = \frac{\sin\theta_{13}}{\cos\theta_{13}} = \tan\theta_{13}$$

Elde edilir. Buradan θ_{13}

$$\theta_{13} = \tan^{-1} \left(\frac{r_2 \sin\theta_{12}}{r_1 + r_2 \cos\theta_{12}} \right)$$

Şeklinde bulunur. (1a) ve (1b) denklemlerinin karelerini alıp taraf tarafa toplarsak;

$$r_1^2 + r_2^2 \cos^2 \theta_{12} + 2r_1 r_2 \cos \theta_{12} = s_{43}^2 \cos^2 \theta_{13}$$

$$r_2^2 \sin^2 \theta_{12} = s_{43}^2 \sin^2 \theta_{13}$$

$$\text{Toplam} = r_1^2 + r_2^2 \left(\frac{\cos^2 \theta_{12} + \sin^2 \theta_{12}}{1} \right) + 2r_1 r_2 \cos \theta_{12} = s_{43}^2 \left(\frac{\cos^2 \theta_{13} + \sin^2 \theta_{13}}{1} \right)$$

Bu ifadeyi düzenlersek

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta_{12} = s_{43}^2$$

$$s_{43} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta_{12}}$$

Kalan değişkenler için (2a) ve (2b) denklemlerini kullanacağız. Öncelikle (2a) denkleminde

$$r_2 \cos \theta_{12} + r_3 \cos \theta_{13} = b_1 + r_5 \cos \theta_{15} \quad (2a)$$

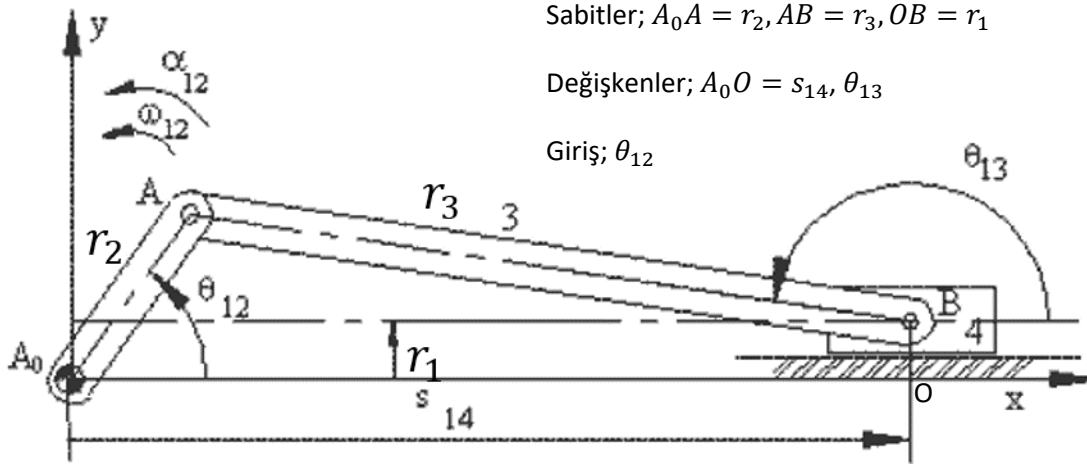
$$\cos \theta_{15} = \frac{r_2 \cos \theta_{12} + r_3 \cos \theta_{13} - b_1}{r_5}$$

$$\theta_{15} = \cos^{-1} \left(\frac{r_2 \cos \theta_{12} + r_3 \cos \theta_{13} - b_1}{r_5} \right)$$

Bulunur. Ardından (2b) denkleminde θ_{15} yerine yazılarak s_{16} çözülür.

$$s_{16} = r_5 \sin \theta_{15} - r_2 \sin \theta_{12} - r_3 \sin \theta_{13}$$

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması: Mekanizmanın konum analizini yapınız.



$$\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

$$r_2 e^{i\theta_{12}} = s_{14} + r_1 i + r_3 e^{i\theta_{13}} \quad (\text{Vektör Kapalılık Denklemi} - 1)$$

$$r_2 \cos \theta_{12} = s_{14} + r_3 \cos \theta_{13} \Rightarrow r_3 \cos \theta_{13} = r_2 \cos \theta_{12} - s_{14} \quad (2)$$

$$r_2 \sin \theta_{12} = r_1 + r_3 \sin \theta_{13} \Rightarrow r_3 \sin \theta_{13} = r_2 \sin \theta_{12} - r_1 \quad (3)$$

(2) ve (3) denklemlerinin karelerini alıp taraf tarafa toplayalım.

$$(r_3)^2 \cos^2 \theta_{13} = (r_2)^2 \cos^2 \theta_{12} - 2s_{14}r_2 \cos \theta_{12} + (s_{14})^2$$

$$(r_3)^2 \sin^2 \theta_{13} = (r_2)^2 \sin^2 \theta_{12} - 2r_1r_2 \sin \theta_{12} + (r_1)^2$$

$$(r_3)^2 = (r_2)^2 - 2s_{14}r_2 \cos \theta_{12} - 2r_1r_2 \sin \theta_{12} + (r_1)^2 + (s_{14})^2$$

$$(s_{14})^2 - \underbrace{2r_2 \cos \theta_{12}}_b s_{14} + \underbrace{(r_1)^2 + (r_2)^2 - (r_3)^2 - 2r_1r_2 \sin \theta_{12}}_c = 0$$

$$(s_{14})^2 - bs_{14} + c = 0$$

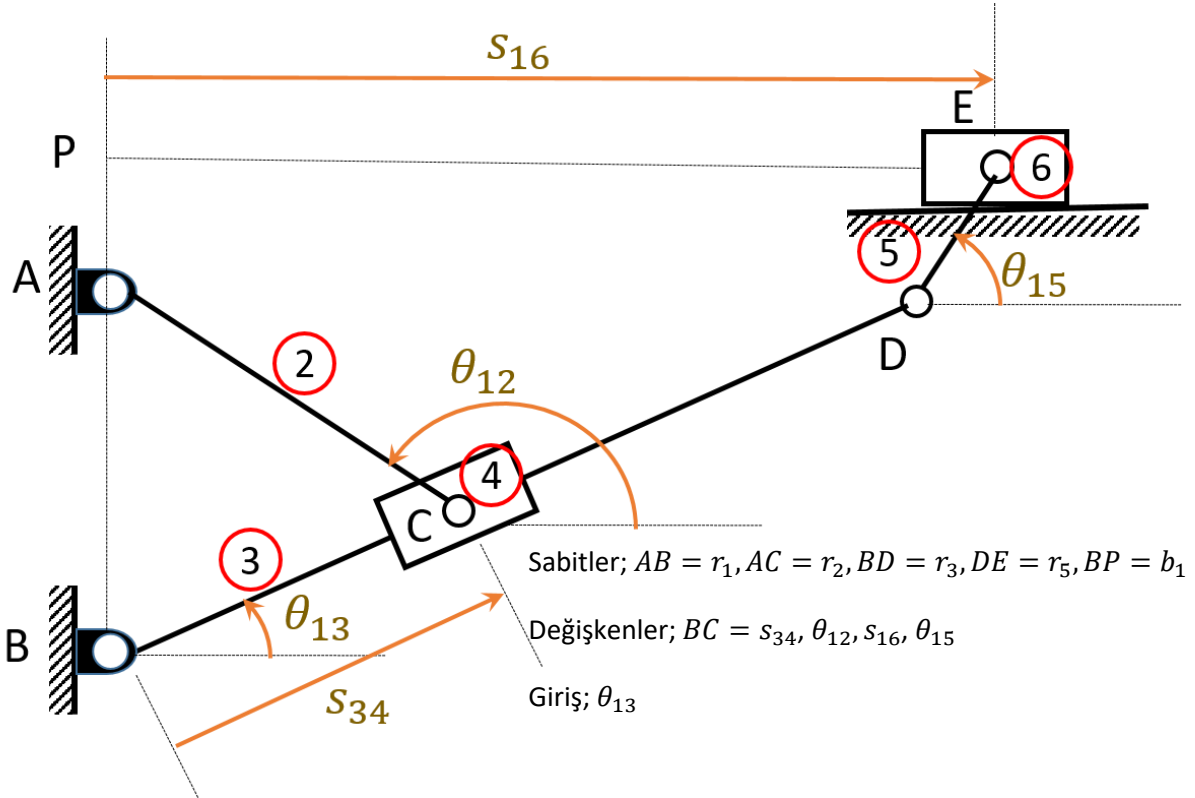
$$s_{14(1,2)} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$(\cos \theta_{13})_1 = \frac{r_2 \cos \theta_{12} - s_{14(1)}}{r_3}, \quad (\cos \theta_{13})_2 = \frac{r_2 \cos \theta_{12} - s_{14(2)}}{r_3}$$

$$\sin \theta_{13} = \frac{r_2 \sin \theta_{12} - r_1}{r_3}$$

$$(\theta_{13})_{(1,2)} = (\text{atan2}[(\cos \theta_{13})_1, \sin \theta_{13}]; \text{atan2}[(\cos \theta_{13})_2, \sin \theta_{13}])$$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği: Mekanizmanın Konum analizini yapınız.



Konum Analizi;

$$\vec{P} = [s_{34}, \theta_{12}, s_{16}, \theta_{15}] = ?$$

$$ABCA \Rightarrow \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BA}$$

$$BPEDB \Rightarrow \vec{BD} + \vec{DE} = \vec{BP} + \vec{PE}$$

$$s_{34}e^{i\theta_{13}} + r_2e^{i\theta_{12}} = ir_1 \quad (1)$$

$$r_3e^{i\theta_{13}} + r_5e^{i\theta_{15}} = ib_1 + s_{16} \quad (2)$$

(1) ve (2)'yi gerçel ve sanal kısımlarına ayıralım

$$s_{34} \cos \theta_{13} + r_2 \cos \theta_{12} = 0 \quad (3)$$

$$s_{34} \sin \theta_{13} + r_2 \sin \theta_{12} = r_1 \quad (4)$$

$$r_3 \cos \theta_{13} + r_5 \cos \theta_{15} = s_{16} \quad (5)$$

$$r_3 \sin \theta_{13} + r_5 \sin \theta_{15} = b_1 \quad (6)$$

(3) ve (4) birlikte çözülerek s_{34} ve θ_{12} elde edilir. θ_{15} (6) denkleminde direkt elde edilir. Bulunan değerler (5)'de yerine yazılarak s_{16} değerleri elde edilir. Önce (3) ve (4)'ü ele alalım.

$$r_2 \cos \theta_{12} = -s_{34} \cos \theta_{13} \Rightarrow \cos \theta_{12} = \frac{-s_{34} \cos \theta_{13}}{r_2} \quad (7)$$

$$r_2 \sin \theta_{12} = r_1 - s_{34} \sin \theta_{13} \Rightarrow \sin \theta_{12} = \frac{r_1 - s_{34} \sin \theta_{13}}{r_2} \quad (8)$$

Bilinmeyenlerden θ_{12} 'yi yok etmek üzere, bu değişkeni yalnız bırakıp (7) ve (8) denklemlerinin karelerini taraf tarafa toplayalım.

$$r_2^2 \cos^2 \theta_{12} = s_{34}^2 \cos^2 \theta_{13} \quad (7a)$$

$$r_2^2 \sin^2 \theta_{12} = r_1^2 + s_{34}^2 \sin^2 \theta_{13} - 2r_1 s_{34} \sin \theta_{13} \quad (8a)$$

(7) ve (8) taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse (9) elde edilir.

$$s_{34}^2 - 2r_1 \sin \theta_{13} s_{34} + r_1^2 + r_2^2 = 0 \quad (9)$$

Dikkat edilirse, (9) ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemdir bu denklemin çözümünden iki farklı s_{34} değeri bulunur. Çözüm = $\{(s_{34})_{1,2}\}$ elde edilir. Ardından (7) ve (8) denkleminde bulunan her iki çözümde ayrı ayrı değerlendirilerek $(\theta_{12})_{1,2}$ değerleri elde edilir. Şöyle ki;

$$(\theta_{12})_{1,2} = \left[\begin{array}{l} \text{atan2} \left(\frac{-(s_{34})_1 \cos \theta_{13}}{r_2}, \frac{r_1 - (s_{34})_1 \sin \theta_{13}}{r_2} \right) \\ \text{atan2} \left(\frac{-(s_{34})_2 \cos \theta_{13}}{r_2}, \frac{r_1 - (s_{34})_2 \sin \theta_{13}}{r_2} \right) \end{array} \right] \quad (10)$$

Not: Diğer bir yol önce θ_{12} 'yi bulmak ardından s_{34} 'ü bulmak şeklinde olabilir.

(3) denklemden

$$s_{34} = -\frac{r_2 \cos \theta_{12}}{\cos \theta_{13}} \quad (11)$$

olarak bulunur. Bu ifade (4)'de yerine yazılarak

$$-\frac{r_2 \cos \theta_{12}}{\cos \theta_{13}} \sin \theta_{13} + r_2 \sin \theta_{12} = r_1 \text{ elde edilir. Gerekli düzenlemelerle}$$

$$\underbrace{-r_2 \sin \theta_{13} \cos \theta_{12}}_A + \underbrace{r_2 \cos \theta_{13} \sin \theta_{12}}_B = \underbrace{r_1 \cos \theta_{13}}_C$$

Böylece sadece bilinmeyen θ_{12} 'yi içeren $A \cos \theta_{12} + B \sin \theta_{12} = C$ doğrusal olmayan denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü daha önce tartışılmıştır. Çözümün bu şekilde nasıl elde edileceği oradan görülebilir. Ancak çözümün varlığı için (11) denkleminde $\cos \theta_{13} \neq 0$ koşulu sağlanmalıdır.

Konum analizine diğer bilinmeyenler s_{16}, θ_{15} 'i bulmak üzere devam edelim. (6) denklemden

$$\theta_{15} = \sin^{-1} \left(\frac{b_1 - r_3 \sin \theta_{13}}{r_5} \right) \quad (12)$$

Elde edilir. (12)'nin tek bir fonksiyon olduğunu ancak $(\theta_{15})_1$ ve $(\theta_{15})_2 = \pi - (\theta_{15})_1$ olmak üzere iki farklı değer döndürdüğünü hatırlayalım. Ardından (5) denklemden $(s_{16})_{1,2}$ elde edilir. Şöyle ki

$$(s_{16})_{1,2} = \left[\begin{array}{l} r_3 \cos \theta_{13} + r_5 \cos(\theta_{15})_1 \\ r_3 \cos \theta_{13} + r_5 \cos(\theta_{15})_2 \end{array} \right] \quad (13)$$

Özet: (9), (10), (12) ve (13) denklemlerinden verilen sırada 4 farklı çözüm belirlenebilir.

$$\vec{P} = [(s_{34})_1, (\theta_{12})_1, (s_{16})_1, (\theta_{15})_1]$$

$$\vec{P} = [(s_{34})_1, (\theta_{12})_1, (s_{16})_2, (\theta_{15})_2]$$

$$\vec{P} = [(s_{34})_2, (\theta_{12})_2, (s_{16})_1, (\theta_{15})_1]$$

$$\vec{P} = [(s_{34})_2, (\theta_{12})_2, (s_{16})_2, (\theta_{15})_2]$$

Şimdi aynı mekanizmayı s_{16} giriş olarak verildiğinde çözmemiz istensin;

- Vektör kapalılık devrelerinin seçimi konum analizini zorlaştırabilir.

Vektör kapalılık denklemlerindeki mafsal değişkenlerini inceleyelim.

ABCA devresindeki mafsal değişkenleri $\Rightarrow s_{34}, \theta_{12}, \theta_{13}$

ACDEPA devresindeki mafsal değişkenleri $\Rightarrow s_{34}, \theta_{12}, \theta_{13}, \underbrace{s_{15}}_{\text{Giriş}}, \theta_{15}$

BPEDB devresindeki mafsal değişkenleri $\Rightarrow \theta_{13}, \underbrace{s_{15}}_{\text{Giriş}}, \theta_{15}$

Eğer ABCA ve ACDEPA devrelerini seçerek çözüme başlarsak; bu ders kapsamında öğrendiğimiz yöntemlerle çözüme ulaşamayız, sayısal çözümlmeye gerek duyarız. Çünkü ACDEPA devresinde girişten farklı dört mafsal değişkeni vardır. Bu 4 bilinmeyen değişkenin bulunması için devreden elde edilen sadece 2 adet denklem yetmez. Bu durumda farklı L devre kümeleri aramalıyız.

Eğer BPEDB ve ACDEPA devreleri seçilirse, Önce BPEDB devresinden θ_{13} , ve θ_{15} çözülür. Ardından ACDEPA devresinden s_{34}, θ_{12} bulunur.

Çok devreli mekanizmalarda uygun L devreleri kümesi seçilmelidir. Uygunluk kavramı seçilen devre takımının hem konum değişkenleri, hem de hız ve ivme değişkenleri için çözüm üreten nitelikte olması anlamında kullanılmaktadır.