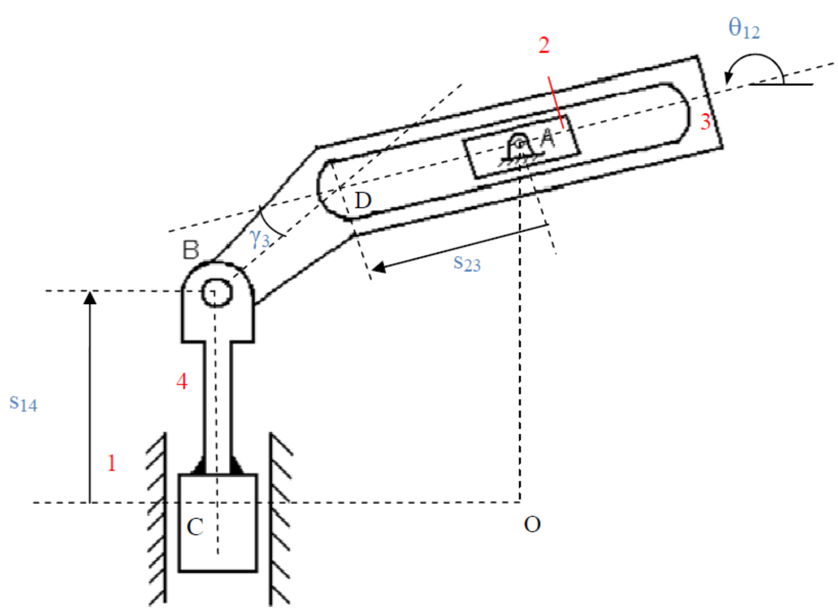
MAK313 MEKANİZMA TEKNİĞİ
Örnek Çözümlü Sorular
Dr. Nurdan Bilgin

SORULAR

Soru 1: Aşağıdaki mekanizmaların her biri için

a.) Uzay serbestlik derecesi, uzuv sayısı, mafsal sayısı ve mafsal serbestlik derecelerini belirterek, ilgili formülü kullanarak mekanizma serbestlik derecesini bulunuz.
b.) Vektör kapalılık denklemlerini yazınız.
c.) Vektör kapalılık denklemlerini kompleks sayılar kullanarak yeniden yazınız.
d.) Bilinmeyen mafsal değişkenlerini bulunuz.

i.) Şekil 1'de gösterilen ilk mekanizma bir çift kızak mekanizmasıdır. Boyutları $|OA| = b_1$, $|OC| = c_1$ ve $|BD| = b_3$ olarak verilmektedir. Giriş mafsal değişkeni s_{14} olarak verilmiştir, γ_3 uzvun şekline bağlı bir açı olup sabittir. Buna göre diğer değişkenler s_{23}, ve θ_{12}'yi bulunuz.



Şekil 1

Çözüm:

a.) $F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^{j} f_i$
Düzlemde hareket ediyor; uzay serbestlik derecesi $\lambda = 3$
$l = 4, j = 4\ (2P + 2R)\ ve\ \sum_{i=1}^{j} f_i = 4$ olarak bulunur.
Bu durumda $F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^{j} f_i$=1 dir.

b.) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$

c.) $ib_1 + s_{23}e^{i\theta_{12}} + b_3e^{i(\theta_{12}+\gamma_3)} = -c_1 + is_{14}$

d.) Bilinmeyen mafsal değişkenlerini bulmak için yukarıda yazdığımız devre kapalılık denkleminin sanal ve gerçel parçalarını ayrı ayrı yazalım

Euler denkleminin: $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ olduğunu hatırlayalım.

Sanal Parça: $b_1 + s_{23}sin\theta_{12} + b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3) = s_{14}$ (1)

Gerçel Parça: $s_{23}cos\theta_{12} + b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3) = -c_1$ (2)

(1) ve (2)'yi düzenleyelim.

$$s_{23}sin\theta_{12} = s_{14} - b_1 - b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3) \quad (1')$$

$$s_{23}cos\theta_{12} = -c_1 - b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3) \quad (2')$$

(1') ve (2')'ı taraf tarafa bölersek; bilinmeyenlerden biri yok edilmiş olur.

$$\frac{sin\theta_{12}}{cos\theta_{12}} = \frac{s_{14} - b_1 - b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3)}{-c_1 - b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3)} \quad (3')$$

Elde ettiğimiz denklemi (3') taraf tarafa çarpıp düzenleyelim

$$-c_1sin\theta_{12} - b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3)sin\theta_{12} = (s_{14} - b_1)cos\theta_{12} - b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3)cos\theta_{12}$$
$$b_3(\sin(\theta_{12} + \gamma_3)cos\theta_{12} - \cos(\theta_{12} + \gamma_3)sin\theta_{12}) = (s_{14} - b_1)cos\theta_{12} + c_1sin\theta_{12} \quad (4')$$

Hatırlayalım; $sin(\alpha - \beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$

Bu özellikten yararlanarak (4') denklemi

$$b_3sin\gamma_3 = (s_{14} - b_1)cos\theta_{12} + c_1sin\theta_{12} \quad (5')$$

$b_3sin\gamma_3 =$ sabit bir sayı, buna C diyelim.

$s_{14} - b_1 =$ an itibariyle bilinenler oluşan bir nicelik buna da A diyelim.

c_1 de B olsun. Bu durumda

$$C = Acos\theta_{12} + Bsin\theta_{12} \quad (6')$$

çözerek θ_{12}'yi elde edebiliriz.

$\sqrt{A^2 + B^2} = D$ olmak üzere, $A = Dcos\phi$ ve $B = Dsin\phi$ yazabiliriz. İki ifadeyi taraf tarafa bölersek, $tan\phi = \frac{B}{A} \Longrightarrow\Longrightarrow \phi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$ olarak bulunur. Artık bilinen ϕ açısı değeriyle (6') ifadesi

$C = Dcos\phi cos\theta_{12} + Dsin\phi sin\theta_{12}$ halini alır. Bu denklem kapalı formda (7') deki gibi yazılabilir.

$$C = Dcos(\theta_{12} - \phi) \quad (7')$$

$$\theta_{12} = \phi \pm \cos^{-1}\frac{C}{D}$$

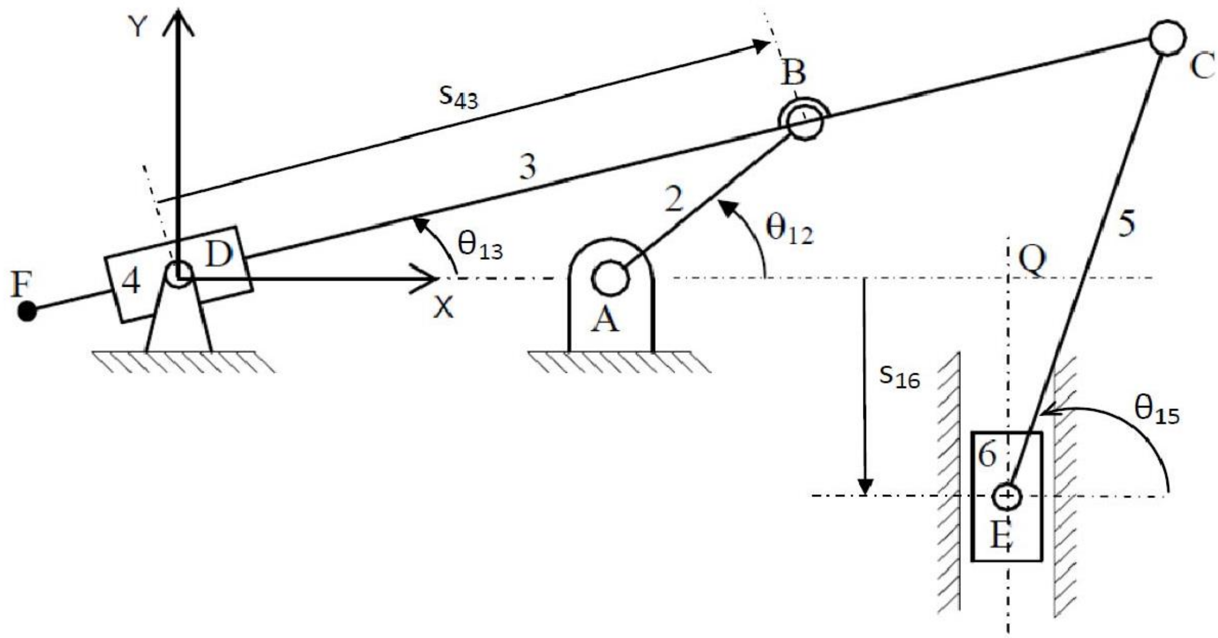
Bulunur. Ardından diğer bilinmeyen s_{23} (1') veya (2') denkleminden bulunabilir. Şöyle ki

$$s_{23} = \frac{s_{14} - b_1 - b_3 \sin(\theta_{12} + \gamma_3)}{sin\theta_{12}}$$

veya

$$s_{23} = \frac{-c_1 - b_3 \cos(\theta_{12} + \gamma_3)}{cos\theta_{12}}$$

ii.) Şekil 2'de gösterilen ikinci mekanizmanın boyutları $|AB| = r_2$, $|AD| = r_1$, $|AQ| = b_1$, $|BC| = r_3$ ve $|EC| = r_5$ olarak verilmektedir. Giriş mafsal değişkeni θ_{12} olarak verilmiştir. Buna göre diğer değişkenler θ_{14}, θ_{15}, s_{34} ve s_{16}'yı bulunuz.



Şekil 2

Çözüm:

a.) $F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^{j} f_i$

Düzlemde hareket ediyor; uzay serbestlik derecesi $\lambda = 3$

$l = 6, j = 7\ (2P + 5R)\ ve\ \sum_{i=1}^{j} f_i = 7$ olarak bulunur.

Bu durumda $F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^{j} f_i$=1 dir.

b.) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EC}$

c.) $r_1 + r_2 e^{i\theta_{12}} = s_{43} e^{i\theta_{13}}$ (1)

$r_2 e^{i\theta_{12}} + r_3 e^{i\theta_{13}} = b_1 - i s_{16} + r_5 e^{i\theta_{15}}$ (2)

d.) $r_1 + r_2 cos\theta_{12} = s_{43} cos\theta_{13}$ (1a)

$r_2 sin\theta_{12} = s_{43} sin\theta_{13}$ (1b)

$r_2 cos\theta_{12} + r_3 cos\theta_{13} = b_1 + r_5 cos\theta_{15}$ (2a)

$r_2 sin\theta_{12} + r_3 sin\theta_{13} = -s_{16} + r_5 sin\theta_{15}$ (2b)

(1b)/(1a) ifadesi bize bilinmeyenlerden birinin yok edilmesi olanağını tanır. Böylelikle

$$\frac{r_2 sin\theta_{12}}{r_1 + r_2 cos\theta_{12}} = \frac{sin\theta_{13}}{cos\theta_{13}} = \tan\theta_{13}$$

Elde edilir. Buradan θ_{13}

$$\theta_{13} = \tan^{-1}\left(\frac{r_2 sin\theta_{12}}{r_1 + r_2 cos\theta_{12}}\right)$$

Şeklinde bulunur. (1a) ve (1b) denklemlerinin karelerini alıp taraf tarafa toplarsak;

$$r_1{}^2 + r_2{}^2 cos^2\theta_{12} + 2r_1r_2cos\theta_{12} = s_{43}{}^2 cos^2\theta_{13}$$
$$r_2{}^2 sin^2\theta_{12} = s_{43}{}^2 sin^2\theta_{13}$$

Toplam = $r_1{}^2 + r_2{}^2\left(\underbrace{cos^2\theta_{12} + sin^2\theta_{12}}_{1}\right) + 2r_1r_2cos\theta_{12} = s_{43}{}^2\left(\underbrace{cos^2\theta_{13} + sin^2\theta_{13}}_{1}\right)$

Bu ifadeyi düzenlersek

$r_1{}^2 + r_2{}^2 + 2r_1r_2cos\theta_{12} = s_{43}{}^2$

$s_{43} = \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 + 2r_1r_2cos\theta_{12}}$

Kalan değişkenler için (2a) ve (2b) denklemlerini kullanacağız. Öncelikle (2a) denkleminden

$$r_2cos\theta_{12} + r_3cos\theta_{13} = b_1 + r_5cos\theta_{15} \quad (2a)$$
$$cos\theta_{15} = \frac{r_2cos\theta_{12} + r_3cos\theta_{13} - b_1}{r_5}$$
$$\theta_{15} = \cos^{-1}\left(\frac{r_2cos\theta_{12} + r_3cos\theta_{13} - b_1}{r_5}\right)$$

Bulunur. Ardından (2b) denkleminde θ_{15} yerine yazılarak s_{16} çözülür.

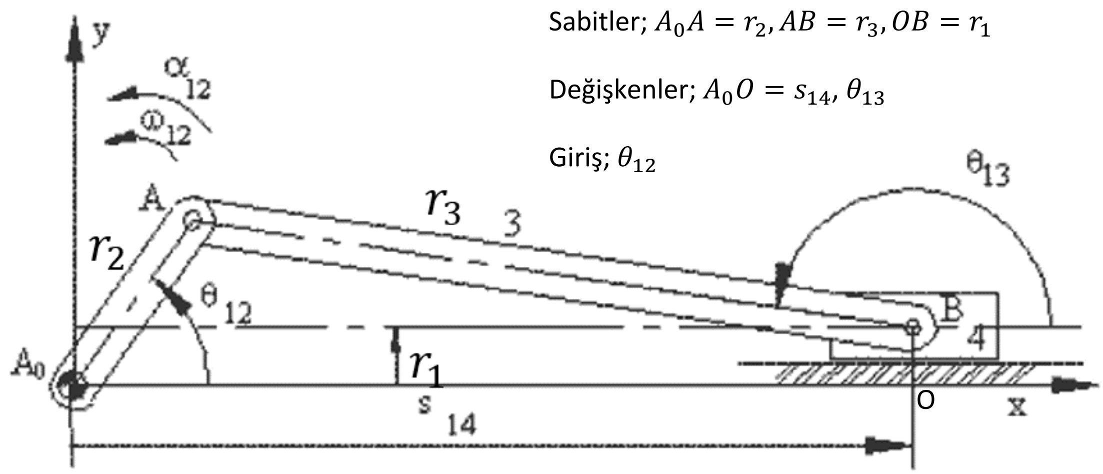
$s_{16} = r_5sin\theta_{15} - r_2sin\theta_{12} - r_3sin\theta_{13}$

Örnek: Krank-Biyel Mekanizması: Mekanizmanın konum analizini yapınız.

Sabitler; $A_0A = r_2, AB = r_3, OB = r_1$

Değişkenler; $A_0O = s_{14}$, θ_{13}

Giriş; θ_{12}



$\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$

$r_2e^{i\theta_{12}} = s_{14} + r_1i + r_3e^{i\theta_{13}} \quad (Vektör\ Kapalılık\ Denklemi - 1)$

$r_2\cos\theta_{12} = s_{14} + r_3\cos\theta_{13} \implies r_3\cos\theta_{13} = r_2\cos\theta_{12} - s_{14}$ (2)

$r_2\sin\theta_{12} = r_1 + r_3\sin\theta_{13} \implies r_3\sin\theta_{13} = r_2\sin\theta_{12} - r_1$ (3)

(2) ve (3) denklemlerinin karelerini alıp taraf tarafa toplayalım.

$$(r_3)^2\cos^2\theta_{13} = (r_2)^2\cos^2\theta_{12} - 2s_{14}r_2\cos\theta_{12} + (s_{14})^2$$

$$(r_3)^2\sin^2\theta_{13} = (r_2)^2\sin^2\theta_{12} - 2r_1r_2\sin\theta_{12} + (r_1)^2$$

$$(r_3)^2 = (r_2)^2 - 2s_{14}r_2\cos\theta_{12} - 2r_1r_2\sin\theta_{12} + (r_1)^2 + (s_{14})^2$$

$$(s_{14})^2 - \underbrace{2r_2\cos\theta_{12}}_{b}s_{14} + \underbrace{(r_1)^2 + (r_2)^2 - (r_3)^2 - 2r_1r_2\sin\theta_{12}}_{c} = 0$$

$$(s_{14})^2 - bs_{14} + c = 0$$

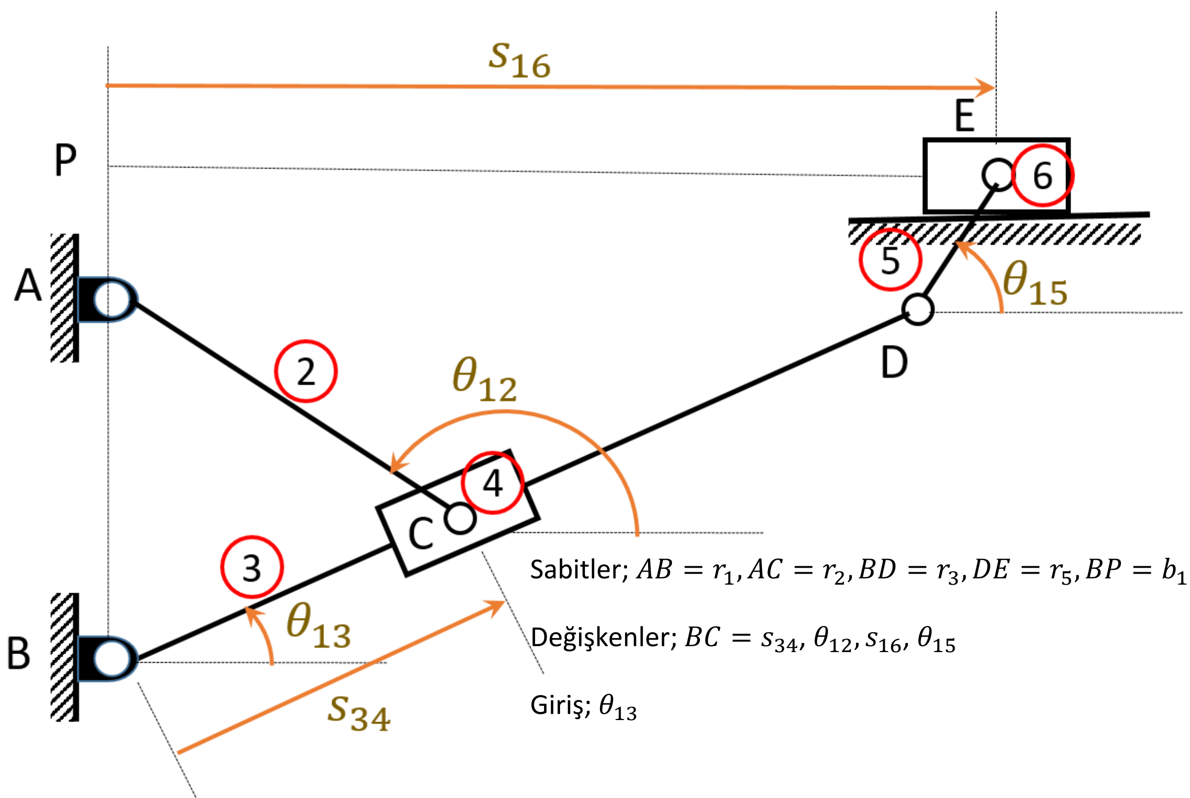
$$s_{14(1,2)} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$(\cos\theta_{13})_1 = \frac{r_2\cos\theta_{12} - s_{14(1)}}{r_3}, \qquad (\cos\theta_{13})_2 = \frac{r_2\cos\theta_{12} - s_{14(2)}}{r_3}$$

$$\sin\theta_{13} = \frac{r_2\sin\theta_{12} - r_1}{r_3}$$

$$(\theta_{13})_{(1,2)} = (atan2[(\cos\theta_{13})_1, \sin\theta_{13}]; atan2[(\cos\theta_{13})_2, \sin\theta_{13}])$$

Örnek: Çok devreli mekanizma örneği: Mekanizmanın Konum analizini yapınız.



Sabitler; $AB = r_1, AC = r_2, BD = r_3, DE = r_5, BP = b_1$

Değişkenler; $BC = s_{34}$, $\theta_{12}, s_{16}, \theta_{15}$

Giriş; θ_{13}

Konum Analizi;

$\vec{P} = [s_{34}, \theta_{12}, s_{16}, \theta_{15}]$=?

$ABCA \Longrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$

$BPEDB \Longrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PE}$

$s_{34}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{13}} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{12}} = ir_1 \qquad (1)$

$r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{13}} + r_5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{15}} = ib_1 + s_{16} \qquad (2)$

(1) ve (2)'yi gerçel ve sanal kısımlarına ayıralım

$s_{34}\cos\theta_{13} + r_2\cos\theta_{12} = 0 \qquad (3)$

$s_{34}\sin\theta_{13} + r_2\sin\theta_{12} = r_1 \qquad (4)$

$r_3\cos\theta_{13} + r_5\cos\theta_{15} = s_{16} \qquad (5)$

$r_3\sin\theta_{13} + r_5\sin\theta_{15} = b_1 \qquad (6)$

(3) ve (4) birlikte çözülerek s_{34} ve θ_{12} elde edilir. θ_{15} (6) denkleminden direkt elde edilir. Bulunan değerler (5)'de yerine yazılarak s_{16} değerleri elde edilir. Önce (3) ve (4)'ü ele alalım.

$$r_2\cos\theta_{12} = -s_{34}\cos\theta_{13} \Longrightarrow \cos\theta_{12} = \frac{-s_{34}\cos\theta_{13}}{r_2} \qquad (7)$$

$$r_2\sin\theta_{12} = r_1 - s_{34}\sin\theta_{13} \Longrightarrow \sin\theta_{12} = \frac{r_1 - s_{34}\sin\theta_{13}}{r_2} \qquad (8)$$

Bilinmeyenlerden θ_{12}'yi yok etmek üzere, bu değişkeni yalnız bırakıp (7) ve (8) denklemlerinin karelerini taraf tarafa toplayalım.

$${r_2}^2\cos^2\theta_{12} = {s_{34}}^2\cos^2\theta_{13} \qquad (7a)$$

$${r_2}^2\sin^2\theta_{12} = {r_1}^2 + {s_{34}}^2\sin^2\theta_{13} - 2r_1s_{34}\sin\theta_{13} \qquad (8a)$$

(7) ve (8) taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse (9) elde edilir.

$${s_{34}}^2 - 2r_1\sin\theta_{13}\,s_{34} + {r_1}^2 + {r_2}^2 = 0 \qquad (9)$$

Dikkat edilirse, (9) ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemdir bu denklemin çözümünden iki farklı s_{34} değeri bulunur. $Çözüm = \left\{(s_{34})_{1,2}\right\}$ elde edilir. Ardından (7) ve (8) denkleminde bulunan her iki çözümde ayrı ayrı değerlendirilerek $(\theta_{12})_{1,2}$ değerleri elde edilir. Şöyle ki;

$$(\theta_{12})_{1,2} = \left.\begin{bmatrix} atan2\left(\dfrac{-(s_{34})_1\cos\theta_{13}}{r_2}, \dfrac{r_1-(s_{34})_1\sin\theta_{13}}{r_2}\right) \\ atan2\left(\dfrac{-(s_{34})_2\cos\theta_{13}}{r_2}, \dfrac{r_1-(s_{34})_2\sin\theta_{13}}{r_2}\right)\end{bmatrix}\right\} \quad (10)$$

Not: Diğer bir yol önce θ_{12}'yi bulmak ardından s_{34}'ü bulmak şeklinde olabilir.

(3) denkleminden

$$s_{34} = -\frac{r_2\cos\theta_{12}}{\cos\theta_{13}} \quad (11)$$

olarak bulunur. Bu ifade (4)'de yerine yazılarak

$-\frac{r_2 \cos\theta_{12}}{\cos\theta_{13}}\sin\theta_{13} + r_2\sin\theta_{12} = r_1$ *elde edilir. Gerekli düzenlemelerle*

$$\underbrace{-r_2\sin\theta_{13}}_{A}\cos\theta_{12} + \underbrace{r_2\cos\theta_{13}}_{B}\sin\theta_{12} = \underbrace{r_1\cos\theta_{13}}_{C}$$

Böylece sadece bilinmeyen θ_{12}'yi içeren $A\cos\theta_{12} + B\sin\theta_{12} = C$ doğrusal olmayan denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü daha önce tartışılmıştır. Çözümün bu şekilde nasıl elde edileceği oradan görülebilir. Ancak çözümün varlığı için (11) denkleminde $\cos\theta_{13} \neq 0$ koşulu sağlanmalıdır.

Konum analizine diğer bilinmeyenler s_{16}, θ_{15}'i bulmak üzere devam edelim. (6) denkleminden

$$\theta_{15} = \sin^{-1}\left(\frac{b_1 - r_3\sin\theta_{13}}{r_5}\right) \qquad (12)$$

Elde edilir. (12)'nin tek bir fonksiyon olduğunu ancak $(\theta_{15})_1$ ve $(\theta_{15})_2 = \pi - (\theta_{15})_1$olmak üzere iki farklı değer döndürdüğünü hatırlayalım. Ardından (5) denkleminden $(s_{16})_{1,2}$ elde edilir. Şöyle ki

$$(s_{16})_{1,2} = \left.\begin{bmatrix} r_3\cos\theta_{13} + r_5\cos(\theta_{15})_1 \\ r_3\cos\theta_{13} + r_5\cos(\theta_{15})_2 \end{bmatrix}\right\} \qquad (13)$$

Özet: (9), (10), (12) ve (13) denklemlerinden verilen sırada 4 farklı çözüm belirlenebilir.

$\vec{P} = [(s_{34})_1, (\theta_{12})_1, (s_{16})_1, (\theta_{15})_1]$

$\vec{P} = [(s_{34})_1, (\theta_{12})_1, (s_{16})_2, (\theta_{15})_2]$

$\vec{P} = [(s_{34})_2, (\theta_{12})_2, (s_{16})_1, (\theta_{15})_1]$

$\vec{P} = [(s_{34})_2, (\theta_{12})_2, (s_{16})_2, (\theta_{15})_2]$

Şimdi aynı mekanizmayı s_{16} giriş olarak verildiğinde çözmemiz istensin;

- *Vektör kapalılık devrelerinin seçimi konum analizini zorlaştırabilir.*

Vektör kapalılık denklemlerindeki mafsal değişkenlerini inceleyelim.

$ABCA\ devresindeki\ mafsal\ değişkenleri \Longrightarrow s_{34}, \theta_{12}, \theta_{13}$

$ACDEPA\ devresindeki\ mafsal\ değişkenleri \Longrightarrow s_{34}, \theta_{12}, \theta_{13}, \underbrace{s_{16}}_{Giriş}, \theta_{15}$

$BPEDB\ devresindeki\ mafsal\ değişkenleri \Longrightarrow \theta_{13}, \underbrace{s_{16}}_{Giriş}, \theta_{15}$

Eğer ABCA ve ACDEPA devrelerini seçerek çözüme başlarsak; bu ders kapsamında öğrendiğimiz yöntemlerle çözüme ulaşamayız, sayısal çözümlemeye gerek duyarız. Çünkü ACDEPA devresinde girişten farklı dört mafsal değişkeni vardır. Bu 4 bilinmeyen değişkenin bulunması için devreden elde edilen sadece 2 adet denklem yetmez. Bu durumda farklı L devre kümeleri aramalıyız.

Eğer BPEDB ve ACDEPA devreleri seçilirse, Önce BPEDB devresinden θ_{13}*, ve* θ_{15} *çözülür. Ardından ACDEPA devresinden* s_{34}, θ_{12} *bulunur.*

Çok devreli mekanizmalarda uygun L devreleri kümesi seçilmelidir. Uygunluk kavramı seçilen devre takımının hem konum değişkenleri, hem de hız ve ivme değişkenleri için çözüm üreten nitelikte olması anlamında kullanılmaktadır.