



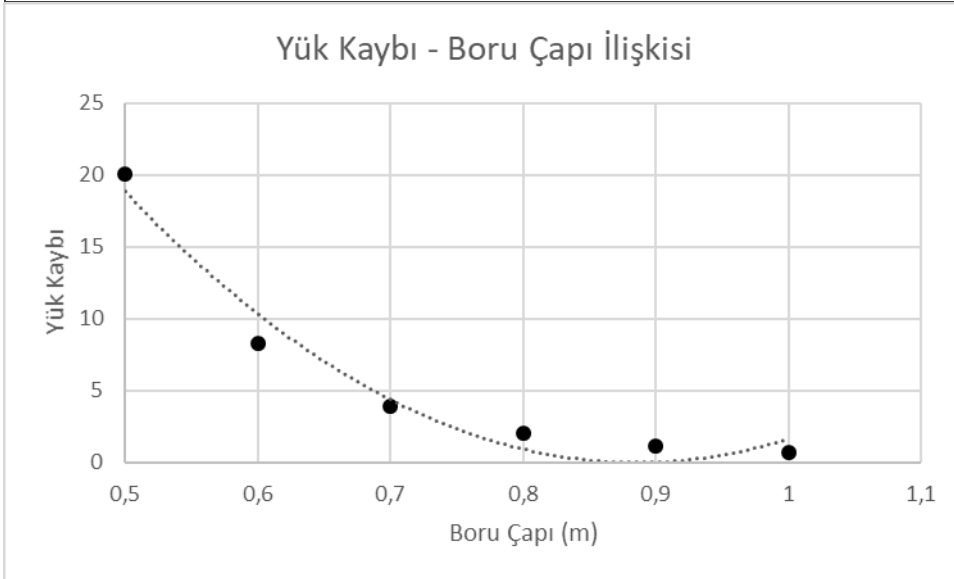
## CEVAP ANAHTARI

(1,2 ve 3 sorular için) Bir mühendis, bir kampüsün içmesuyu isale hattı ihalesini almıştır. Boru çapı ile borudaki yük kaybı arasında ters ilişki olduğunu bilmektedir, yani boru çapını artırdığında borudaki yük kaybı azalacaktır. Ancak boru çapını artırdığında da borunun birim maliyeti ve kazı maliyeti artmaktadır. Bu iki kısıtı optimum olarak sağlayacak boru çapını belirlemek üzere bir deney yapmaya karar vermiştir. Deney sonucunda, sırasıyla bir takım sayısal analiz yöntemini kullanarak nihai karara sağlıklı bir şekilde ulaşmıştır.

**Soru 1 (40 puan).** Mühendis, optimum boru çapı bulma hedefiyle önce verilerine en iyi uyan fonksiyonu belirlemelidir. Bu nedenle deneysel verilere farklı farklı **eğriler geçirerek**, korelasyonlarına bakmıştır. Bu seçim sürecinde, verisine ikinci dereceden polinom geçirmeyi de denemiştir. Mühendisin **ikinci dereceden polinom geçirmek** için kullandığı formülasyon aşağıda verilmektedir. Ek olarak matrisi oluşturacak veriler ve mühendisin çizdiği eğri de aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

i	D (Boru Çapı)	hf (Yük Kaybı)	D <sup>2</sup>	D <sup>3</sup>	D <sup>4</sup>	D*hf	D <sup>2</sup> *hf
1	0,50	20,10	0,25	0,13	0,06	10,05	5,03
2	0,60	8,27	0,36	0,22	0,13	4,96	2,98
3	0,70	3,90	0,49	0,34	0,24	2,73	1,91
4	0,80	2,04	0,64	0,51	0,41	1,63	1,30
5	0,90	1,15	0,81	0,73	0,66	1,03	0,93
6	1,00	0,69	1,00	1,00	1,00	0,69	0,69
<b>Toplamlar</b>	<b>4,50</b>	<b>36,15</b>	<b>3,55</b>	<b>2,93</b>	<b>2,50</b>	<b>21,10</b>	<b>12,84</b>



a) Verilere göre matris takımını oluşturunuz (5 puan).



$$\begin{bmatrix} 6 & 4.5 & 3.55 \\ 4.5 & 3.55 & 2.93 \\ 3.55 & 2.93 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.15 \\ 21.10 \\ 12.84 \end{bmatrix}$$

- b) Birleşik matrisi oluşturarak gauss eleme yöntemi ile  $a_0, a_1$  ve  $a_2$  katsayılarını bulunuz (20 puan). (Başka yöntemlerle yapılan çözümler geçersizdir)

$$\begin{bmatrix} 6 & 4.5 & 3.55 \\ 0 & 0.175 & 0.2675 \\ 3.55 & 2.93 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.15 \\ -6.0125 \\ 12.84 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 4.5 & 3.55 \\ 0 & 0.175 & 0.2675 \\ 0 & 0.2675 & 0.3996 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.15 \\ -6.0125 \\ -8.5487 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 4.5 & 3.55 \\ 0 & 0.175 & 0.2675 \\ 0 & 0 & -0.0093 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.15 \\ -6.0125 \\ 0.6418 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \frac{0.6418}{-0.0093} = -68.9386; a_1 = \frac{-6.0125 - 0.2675 * (-68.9386)}{0.175} = 71.0205$$
$$a_0 = \frac{36.15 - 4.5 * (71.0205) - 3.55 * (-68.9386)}{6} = -6.4517$$

- c) Bulduğunuz katsayılarla ikinci derece polinom fonksiyonunu oluşturunuz (5 puan).

$$h_f = -68.9386 D^2 + 71.0205D - 6.4517$$

- d) Korelasyon katsayısı 0.67 olduğu bulunmuştur, bu bulguyu değerlendirin (5 puan).

Bu değer bu eğrinin verilen veri ile iyi uyumlu olmadığını göstermektedir. En az uyumun 0.9 olması gerekir.

- e) Bulduğunuz fonksiyon ile çapı  $D=0.6$  m olan boru için yük kaybını hesaplayınız. Tablodaki değerle arasındaki farkı hesaplayınız. Bu değer için hatayı yüzde olarak ifade ediniz (5 puan).

$$h_f = -68.9386 D^2 + 71.0205D - 6.4517$$

$$h_f(0.6) = 11.3427$$

$$Fark = 11.3427 - 8.27 = 3.0727; \% Hata = Fark/11.3427 * 100 = 27\%$$

## Soru 2 (25 puan).

Mühendis ikinci dereceden polinomun yeterince iyi uymadığını düşünerek, arayışlarını sürdürmüş ve borudaki yük kaybı için en uygun fonksiyonun aşağıdaki fonksiyon olduğunu bulmuştur.

$$h_f = \frac{10.67LQ^{1.852}}{C^{1.852}D^{4.8704}}$$

- Bu fonksiyonda L boru uzunluğudur ve ölçüm hassasiyeti :  $\pm 1.5$  mm/m olan B\* marka lazer metre ile ölçülmektedir. **Boru uzunluğu  $L = 25 \pm 0.0015$  m** olarak ölçülmüştür.
- Teknik şartname gereği iş kapsamında basınca dayanıklı PVC boru kullanılacaktır. PVC boru için **C yüzey pürüzlüğü katsayısı 150** olarak belirlenmiştir ve **değişken değildir**. Üreticisi firma katalog değerine göre boru çapı toleransları  $\pm 0.1$  mm dir. Bu nedenle **boru çapı  $D = 0.5 \pm 0.0001$  m** olarak hesaba katılacaktır.



- Debinin ölçümünde kullanılan G\* marka ultrasonik debi ölçerin ölçüm hassasiyeti üretici firma tarafından %1 olarak verilmektedir, Dolayısıyla  $Q = 6 \pm 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$  dir.

Yukarıda verilen değerlere göre yük kaybının **nominal değerini ve hata oranını** bulunuz.

Hatırlatma:

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta \tilde{x}_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta \tilde{x}_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta \tilde{x}_n$$

Çözüm:

$$h_f = \frac{10.67LQ^{1.852}}{C^{1.852}D^{4.8704}} = 21.44$$

$$\frac{\partial h_f}{\partial L} = \frac{10.67Q^{1.852}}{C^{1.852}D^{4.8704}} = 0.8576$$

$$\frac{\partial h_f}{\partial Q} = \frac{19.55LQ^{0.852}}{C^{1.852}D^{4.8704}} = 6.546$$

$$\frac{\partial h_f}{\partial D} = \frac{-51.97LQ^{1.852}}{C^{1.852}D^{5.8704}} = -208.8$$

$$\Delta h_f = |0.8576| * 0.0015 + |6.546| * 0.01 + |-208.8| * 0.0001 = 0.08763$$

### Soru 3 (45 puan):

Mühendis, bulduğu fonksiyona göre hem düşük yük kaybı sağlayacak, hem de düşük maliyet üretecek optimum çözüm için maliyet fonksiyonunu aşağıdaki gibi bulmuştur.

$$M = \frac{0.34}{D^{4.8704}} + 0.5e^{5D}$$

- a.) Bu maliyet fonksiyona göre **en uygun (optimum) boru çapını veren denklemi** bulunuz. **Denklemin Basit Sabit Noktalı İterasyon** ile çözebilmek üzere aşağıdaki forma getirilebileceğini gösteriniz (20 puan).

$$\frac{dM}{dD} = \frac{-1.6559}{D^{5.8704}} + 2.5e^{5D} = 0$$

$$\frac{1.6559}{2.5e^{5D}} = D^{5.8704} \Rightarrow D^{5.8704} = \frac{0.6624}{e^{5D}} \Rightarrow D = \left( \frac{0.6624}{e^{5D}} \right)^{\frac{1}{5.8704}}$$

$$D_{i+1} = \left( \frac{0.6624}{e^{5D_i}} \right)^{1/5.8704}$$

- b.) Yukarıdaki denklemi **Basit Sabit Noktalı İterasyon**  $D_i = 0.3 \text{ m}$  ilk değerinden **başlayarak** çözünüz, üçüncü iterasyonun sonunda ulaştığınız değeri virgülden sonra bir hane olacak şekilde yuvarlayarak çap değerine ulaşınız. (20 puan).



0,3	0,722035					
0,722035	0,504019					
0,504019	0,606864					

c.) Bulduğunuz boru çapı ile birim maliyeti hesaplayınız (5puan).

$$M(0.6) = \frac{0.34}{D^{4.8704}} + 0.5e^{5D} = 14.1351$$

**Soru 4: (15 puan)**  $f(x) = 7 \sin(x) e^{-x} - 1$  fonksiyonunun kökünü Newton-Raphson yöntemi ile  $x=0.25$  ilk değerinden başlayarak iteratif olarak bulunuz.

Hatırlatma:  $f'(x) = 7e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$  ve Hesap makinalarınız rad modunda olmalıdır.

Newton-Raphson yöntemi  $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

x	fx	Dfx	
0,25	0,348749	3,933379	
0,161336	-0,04308	4,922759	
0,170087	-0,00045	4,820378	

**Soru 5: (15 puan)** Gauss Siedel yöntemi için yakınsama şartı, katsayı matrisin her bir sırasındaki diagonal elemanın değerinin, diğer elemanların değerinden büyük olması koşulunu içermektedir.

- a.) (5 puan) Buna göre aşağıda verilen denklem sistemi Gauss-Siedel ile çözülebilir mi?  
b.) (10 puan) Eğer çözülebilir ise aşağıdaki çözümlerden hangisi bu denklem takımının çözümdür. (Not: Birinci iterasyonu elde ediniz ve sonuncu iterasyondaki değerleri kullanarak çözümünüzü doğrulayınız. Ara değerleri bulmayınız.)

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**Çözüm Kümeleri:**

$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$
0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00
-0,67	0,83	2,33		0,67	0,17	-0,33		-0,67	1,08	2,83
-0,89	-0,81	-0,72		0,89	-0,19	-1,27		-0,89	1,19	3,28
-0,96	0,98	2,93		0,96	-0,92	-2,81		-0,96	1,23	3,43
-0,99	0,99	2,98		0,99	-2,09	-5,18		-0,99	1,24	3,48
-1,00	1,00	2,99		1,00	-3,88	-8,75		-1,00	1,25	3,49
-1,00	1,00	3,00		1,00	0,00	-1,00		-1,00	1,25	3,50

**Not:** Soruda maddi hata tespit edildiğinden iptal edilmiş ve sorunun 15 puanlık değerinin 10 puanı 4. Soruya 5 puanı da 1. Sorunun a şıkkına eklenmiştir.