MAK212-SAYISAL YÖNTEMLER

Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Ders Politikası

- Ders Kitabı ve Referans Kitaplar
  - Ders Kitabı
    - Mühendisler için Sayısal Yöntemler, S.C. Chapra and R.P. Canale, 4. baskıdan Çeviri
  - Referans Kitaplar
    - "Numerical Methods for Engineers" by S.C. Chapra and R.P. Canale, 4th ed., McGraw Hill.
    - "Applied Numerical Analysis" by C.F. Gerald and P.O Wheatley
    - "Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach" by S.D.Conte and C. de Boor
    - "Numerical Methods" by R.W. Hornbeck
    - "A First Course in Numerical Analysis" by A. Ralston and P. Rabonowitz
- Değerlendirme Sistemi
  - Ödevlerin ağırlığı %10, Kısa Sınavlar %10, Ara Sınav %20 olarak yıl içi ortalamayı etkiyecektir. Yıl sonu sınavı tüm dönemi kapsayan sorulardan oluşacak ve ağırlığı %30 olacaktır. Dönem Projesi 5’er kişilik gruplardan oluşan ekiple yapılacak ağırlığı %30

Giriş

- Makine Mühendisi Ne İş Yapar, Nasıl Yapar.
  - Makine mühendisliği alanında karşılaşılan karmaşık problemleri çözer.
  - Önce problemi anlar, basitleştirir, çözülebilir bir denklem sistemine indirger
  - Sonra, herhangi bir yöntemle problemi çözer.
    - Analitik olarak
    - Grafiksel olarak
    - Hesap makinası kullanarak veya
    - Bilgisayar kullanarak
  - Karmaşık problemlerin çözümünde bilgisayar kullanımı kaçınılmazdır.
    - Doğrusal olmayan problemler
    - Çok parametreli problemler
    - Diferansiyel Denklemler
- Neden Sayısal Yöntemler Dersi Var.
  - Karmaşık mühendislik problemlerini sayısal yöntemler kullanarak çözebilmememiz için.
    - Bilgisayar programlama
    - Yeni matematiksel araçları kullanmak
    - Sayısal analiz yöntemlerini öğrenmek ve kullanmak
    - Dijital hesaplamalara bağlı hataları analiz edebilmek

Bu dersi neden çok iyi öğrenmeliyiz.

- Problem Çözme Konusunda Güçlenmek
- Çok bilinmeyenli denklem sistemlerini çözebilmek
- Doğrusal olmayan denklemleri çözebilmek
- Karmaşık geometrileri hesaplayabilmek
- Parametre değişimi ile tekrarlı çözümler geliştirebilmek (Eğer öyle olursa ne olur, böyle olursa ne olur)
- Bilgisayar programlama ve bilgisayar mantığını kavramak için etkili bir yol
- Matematiğin mühendislikte kullanımını öğrenmek için etkili bir yol
- Paket programların arkasında yatan mantığı anlamak için etkili bir yol
- Paket programların çözemediği problemler için program geliştirmek.

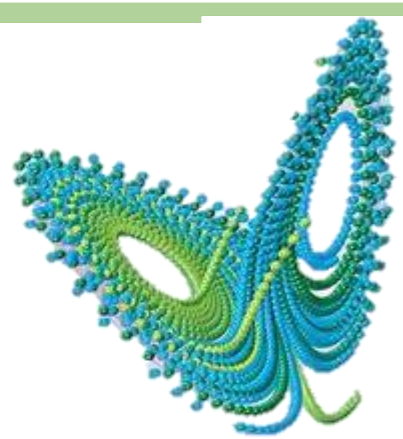
Dersin Haftalık Planı

- Kesim 1: Modelleme, Bilgisayarlar ve Hata analizi (1. Hafta)
  - Matematiksel Modelleme, Mühendislik Problemlerinin Çözümü, Bilgisayar ve Sayısal Yöntemler, Hata Kavramı, Yaklaşım ve Yuvarlatma Hataları, Kesme Hataları ve Taylor Serisi
- Kesim 2: Denklemlerin Köklerinin Bulunması
  - Kapalı Yöntemler ve Mühendislik Uygulamaları + İlk Ödev (2. Hafta)
  - Açık Yöntemler ve Mühendislik Uygulamaları + İkinci Ödev (3. Hafta)
- Kesim 3: Doğrusal Cebirsel Denklemler
  - Gauss Eleme Yöntemleri, Matris Tersi, Mühendislik Uygulamaları+ Kısa Sınav 1 (4. Hafta)
  - Gauss Siedel ve Özel Matrisler, Mühendislik Uygulamaları+ Üçüncü Ödev (5. Hafta)
- Kesim 4: Optimizasyon
  - Bir ve Çok boyutlu kısıtlamasız optimizasyon ve Mühendislik Uygulamaları (6. Hafta)

Dersin Haftalık Planı

- Kesim 5: Eğri Uydurma
  - En Küçük Kareler Regresyonu ve Mühendislik Uygulamaları (7. hafta)+ Ödev 4 + 1. Projelerin dağıtılması
  - İnterpolasyon ve Mühendislik Uygulamaları (8. Hafta) + Kısa Sınav 2
- Ara Sınav (9. Hafta)
- Kesim 6: Sayısal Türev ve İntegral
  - Newton Cotes Formülleri ve Mühendislik Uygulamaları (Ödev 5) (10. Hafta)
  - Eşitliklerin İntegrali ve Mühendislik Uygulamaları (11 Hafta)
  - Sayısal Diferansiyel ve Mühendislik Uygulamaları (Kısa Sınav 3) (12 Hafta)
- Kesim 7: Adi Diferansiyel Denklemler
  - Runge Kutta Yöntemleri ve Mühendislik Uygulamaları (2. Projelerin Dağıtılması) (13. Hafta)
  - Çok Adımlı Yöntemler, Katılık Sınır Değer ve Öz değer Problemleri ve Mühendislik Uygulamaları (14. Hafta)

Ders 1.1: TANIM ve AMAÇ



- Sayısal çözümlemenin amacı, matematiksel modellerle ifade edilmiş olan problemlerin çözümünde belli sayı ve sırada belirlenmiş işlemleri, bilgisayar yardımıyla yaparak belirli hassaslığa sahip sonuçlar elde etmek için kullanılabilecek
  - metodların geliştirilmesi
  - var olanların irdelenmesi ve
  - en uygun olanın belirlenmesidir.
- Bu problemlerin çözümü için gerekli olan sonlu sayıdaki işlemleri adım adım tanımlayan düzene veya hesap yoluna **algoritma** denir.
- **Sayısal Metotlar** ile yapılan **işlem**, verilen sayısal bilgileri (**input**) belli bir algoritma ile işleyerek sonunda sayısal bilgiler (**output**) elde etmek olarak özetlenebilir.

Ders 1.1: TANIM ve AMAÇ

- Kullanılacak algoritmanın seçimi bir çok faktöre bağlıdır. En önemli üç faktör
  - Problemin Niteliği
  - İşlemin Hızı
  - Çözümün Hassasiyeti
- Farklı tipte problemler için geliştirilmiş farklı araçlar mevcuttur. Problem tipine göre bu araçlardan en uygun olanı seçilir.
- İşlemin Hızı, seçilen yöntemin ne kadar sürede sonuçlandığı anlamına gelmektedir. Çok karmaşık problemlerde günlerce süren analizler olabilmektedir.
- Çözümün Hassasiyeti, yanlış (error) birikmesine bağlıdır. Yönteme karar verirken etkilenilecek en önemli faktördür.

Ders 1.1: TANIM ve AMAÇ

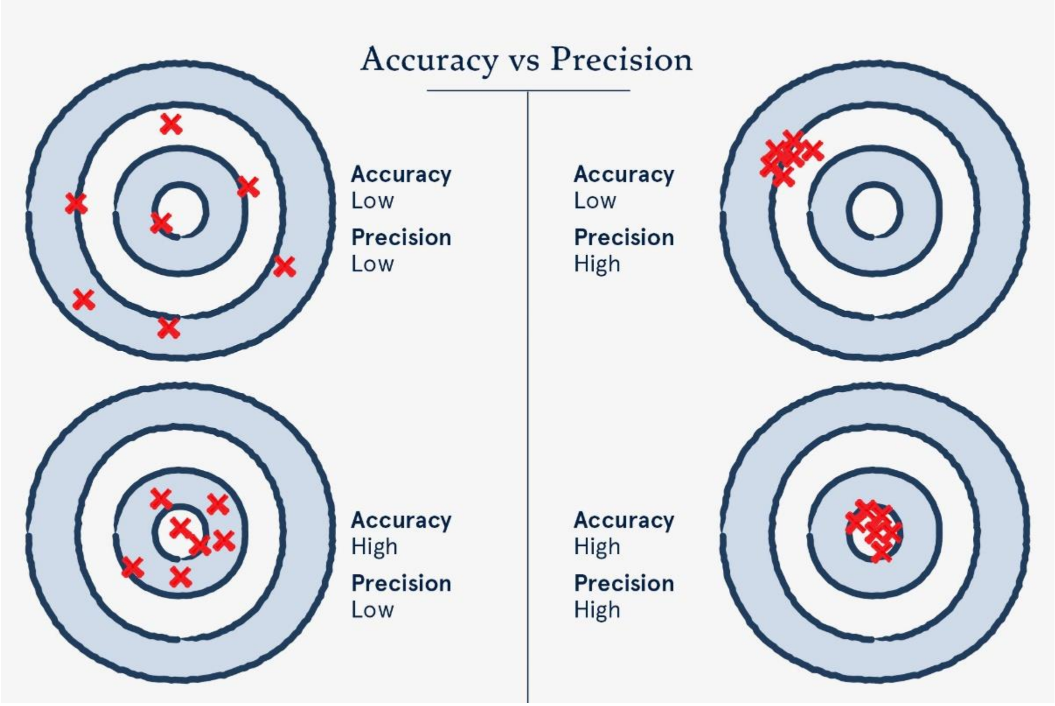
- Bir problemin çözümü için kullanılan bilgilerin çoğunluğu
  - Deney sonuçlarından
  - Ölçüm sonuçlarından
  - İstatistik veriler içeren tablolardan veya
  - Oluşturulan model ve fonksiyonun hesaplanmasından

  Elde edildikleri için az veya çok yanlış barındırmaktadırlar.
- Çözüm için kullanılacak olan algoritmanın, kendi doğasında var olan **kesme hatası (truncation error)** ortaya çıkmaktadır ve
- Bilgisayarda yapılan aritmetik işlemlerden doğan **yuvarlatma hatası (round-off error)** var olacaktır.

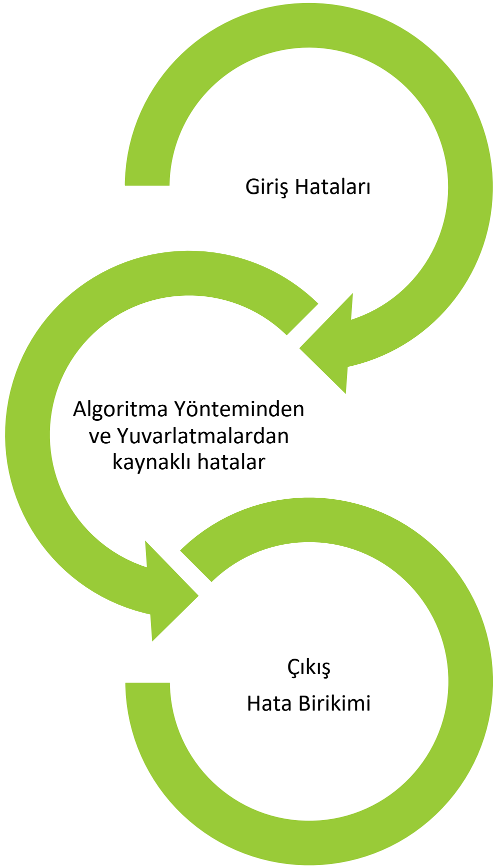
Dolayısıyla Giriş, algoritma ve bilgisayar kaynaklı yanlışlar sonuç üzerinde **hata birikimi** olarak ortaya çıkacaktır

Ders 1.1: TANIM ve AMAÇ

- Doğruluk (Accuracy): gerçek değer ile ölçülen değer arasındaki fark
- Kesinlik (Precision): tekrar eden ölçüm yada hesaplamaların dağılımı



Ders 1.2: HATA ve HATA BİRİKİMİ



2+2=?

Bilim İnsanı Cevabı

4

Mühendisin Cevabı

$4 \pm \varepsilon$

Sosyal Bilimci Cevabı

Toplumsal şartlara, tanıma göre değişir

π=?	$\sqrt{2}$ =?	1/3=?
3,14	1,41	0,33
3,142	1,414	0,333
3,14159	1,41421	0,33333
3,1415926536	1,4142135624	0,3333333333
3,141592653589790	1,414213562373100	0,333333333333333

Ders 1.2: HATA ve HATA BİRİKİMİ

- **Kesme Hatası (Truncation Error)** matematiksel büyüklükler veya işlemlerin tam değeri için bazen sonsuz sayıda terim kullanmak gerekir oysa pratikte sonlu sayıda terimle hesaplama yapılır. Örneğin sin(x).

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Hata sınırımız ölçüsünde sonlu sayıda m adet terim kullanarak hesaplama yaparız. Böylece kesme hatası denilen hata ortaya çıkar.

Ders 1.2: HATA ve HATA BİRİKİMİ

- **Yuvarlatma Hatası (Round-off Error)** bilgisayarda kullanılacak virgülden sonraki sayı kısıtlamasına bağlı olarak ortaya çıkan hatadır. Daha önce de belirttiğimiz gibi bazı sayıların kesin değeri yoktur.

Yakınsak Değer + Hata = Gerçek Değer

Hata = Gerçek Değer − Yakınsak Değer

Ders 1.2: HATA ve HATA BİRİKİMİ

Hata = Gerçek Değer − Yakınsak Değer

$$Mutlak\ Hata\ E_m = Gerçek\ Değer - Yakınsak\ Değer$$

$$Oransal\ Bağıl\ Hata = \%\varepsilon_m = \frac{E_m}{Gerçek\ Değer} \times 100$$

$$Yaklaşık\ Bağıl\ Hata = \%\varepsilon_y = \frac{Son\ Yak.Değ. - Bir\ Önceki\ Yak.Değ.}{Son\ Yak.Değ.} \times 100$$

İşlemler yaklaşık bağıl hata düzeyi önceden belirlenmiş hata tolerans bandının altına inene kadar tekrarlanır. Hata tolerans bandı, üzerine çalışılan probleme özgü mühendis tarafından belirlenir.

Ders 1.2: HATA ve HATA BİRİKİMİ

Örnek:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Değerini $x = \pi/4$ için hesaplayınız. Her adım için oransal bağıl hata ve yaklaşık bağıl hatayı bulunuz.

X			SİN(X)	
0,785398163			0,707106781	
n	Terim #	f(x)	$\|\%\varepsilon_m\|$	$\|\%\varepsilon_y\|$
0	1	0,785398163	11,07207345	-
1	2	0,704652651	0,34706639	11,45891
2	3	0,707143046	0,005128588	0,352177
3	4	0,70710647	4,40685E-05	0,005173
4	5	0,707106783	2,47533E-07	4,43E-05
5	6	0,707106781	9,79769E-10	2,49E-07
6	7	0,707106781	2,88897E-12	9,83E-10
7	8	0,707106781	0	2,89E-12
8	9	0,707106781	0	0
9	10	0,707106781	0	0

Ders 1.2: HATA ve HATA BİRİKİMİ

Örnek:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!}$$

Değerini $x = 0.5$ için hesaplayınız. Her adım için oransal bağıl hata ve yaklaşık bağıl hatayı bulunuz.

X			e^x	
0,5			1,648721271	
n	Terim #	f(x)	$\lvert\%\varepsilon_m\rvert$	$\lvert\%\varepsilon_y\rvert$
0	1	1	39,34693403	-
1	2	1,5	9,0204	33,3333
2	3	1,625	1,4388	7,6923
3	4	1,645833333	0,1752	1,2658
4	5	1,6484375	0,0172	0,1580
5	6	1,648697917	0,0014	0,0158
6	7	1,648719618	0,0001	0,0013
7	8	1,648721168	0,0000	0,0001
8	9	1,648721265	0,0000	0,0000
9	10	1,64872127	0,0000	0,0000

Kesme Hatalarını Tahmin Edebilir miyiz?

Kesme Hataları ve Taylor Serileri

- Hatırlatma: Kesme Hataları, tam matematiksel prosedür yerine yaklaşık değerlerin kullanılmasına bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. Örneğin

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

  Bu ifade, türevin gerçek değerine bir yakınsamadır ve sadece $v(t)$ bir çizgi ifade ediyorsa tam olarak doğrudur.

- Taylor serileri, kesme hatalarını ifade etmek konusunda iyi örneklerdir. Örneğin,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!}$$

Taylor Serileri

Taylor serileri, bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki değerini, fonksiyonun başka bir noktadaki değeri ve bu başka noktadaki türevleri bilindiğinde tahmin etmemizi mümkün kılar.

Taylor Teoremi: Eğer bir fonksiyonun ‘a’ için aldığı değer ve ilk (n+1) türev değerleri biliniyor ve ‘a’ ve ‘x’ aralığında sürekli ise, fonksiyonun x’deki değeri bulunabilir.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

Burada R_n’e kalıntı terimi denir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$R_n = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

t yapay (dummy variable) değişkendir.

Taylor Serileri

Yukarıdaki Taylor açılımındaki kalıntı terimi R_n ihmal edilir ise,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Halini alır ve bu ifade $f(x)$ fonksiyonuna Taylor polinom yaklaşımı olarak adlandırılır. Teorem herhangi bir düzgün fonksiyonun Taylor serisi yaklaşımı ile ifade edilebileceğini iddia etmektedir. R_n'in diğer bir formu integral orta değer teoremi kullanılarak türetilebilmektedir.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$f^{(n+1)}(\zeta)$, 'a' ve 'x' arasında $f^{(n+1)}(x)$ fonksiyonunun ortalama değeridir. Bu bilgiye göre Taylor serisi açılımını yeniden yazarsak

Taylor Serileri

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

halini alır ve burada R_n ifadesi $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}h^{n+1}$

$h =$ Adım büyüklüğü

- Genelde, n. dereceden TS açılımı n. dereceden polinom olarak açılabilir.
- Diğer türevlenebilir ve sürekli fonksiyonlar için genellikle yakınsama daha çok terim kullanıldığında ve h küçük seçildiğinde daha iyi olur.
- Sonlu sayıda terim tam değeri üretemez ancak pratik amaçlar için sonlu sayıda terim yeterli olacaktır.
- Gerçek değere yeterince yakın değer elde etmek için kaç tane terime gerek olduğu kalıntı terimi kullanılarak bulunabilir

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$\zeta, x_{i+1}\ ve\ x_i$ arasında bilinmeyen bir terimdir. ζ, bilinse bile$f^{(n+1)}(x)$ fonksiyonu bilinmezdir. Bu nedenle R_n hesaplanamaz, fakat h kontrol edilebildiği için R_n'in büyüklük derecesi tahmin edilebilir. $R_n = O(h^{n+1})$ $O(h^{n+1})$ ifadesi kesme hatasının h^{n+1} düzeyinde olduğunu göstermek için kullanılır.

Taylor Serileri

Eğer hata $O(h)$ ise adım büyüklüğünü yarıya indirmek hatayı yarıya indirir. Eğer hata $O(h^2)$ ise adım büyüklüğünü yarıya indirmek hatayı dörtde bir oranında azaltır.

- Kesme hatası TS'sinde terim sayısını artırarak azaltılabilir.
- Eğer h yeterince küçükse, hataya en yüksek katkı en düşük dereceli terimden geldiğinden, az sayıda terim ile yeterli güvenilirlikte tahmin elde edilebilir.

Taylor Serileri
Taylor Serisi Açılımında Kalıntı Terimi

- Varsayalım ki taylor serisi açılımını 0. derecede kestik yani

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

Bu durumda kalıntı terimi sonsuz terimli aşağıdaki ifade ile gösterilebilir.

$$R_0 = f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n$$

Ancak bu olası olmadığından yaklaşık olarak

$$R_0 \cong f'(x_i)h$$

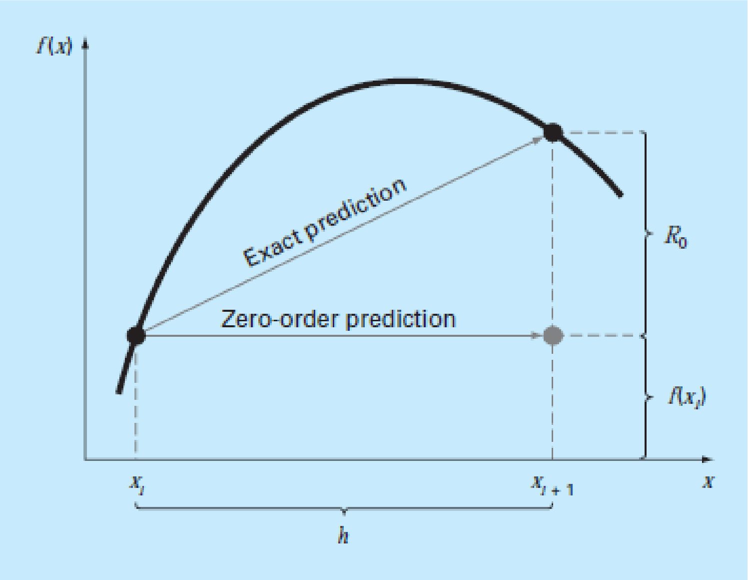
Yazılabilir. Bu durumda tam hata

$$R_0 \cong f'(\zeta)h \qquad x_i < \zeta < x_{i+1}$$

$$f'(\zeta) = \frac{R_0}{h} = \text{eğim}$$

ζ terimi bulunabilir. Fonksiyonun eğimi, $\left(x_i, f(x_i)\right)$ ve $\left(x_{i+1}, f(x_{i+1})\right)$ noktalarından geçen doğru ile aynıdır. Benzer şekilde

$$R_1 = \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$$



Taylor Serileri

Kesme Hatasını Tahmin Etmek için Taylor Serisinin Kullanımı

- Bu bölümün başında verilen türev örneğini ele alalım. Varsayalım ki biz hızı tahmin etmekle ilgiliyiz.

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{f''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2 + \cdots + \frac{f^n(t_i)}{n!}(t_{i+1} - t_i)^n + R_n$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + R_1$$

$$\underbrace{\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)}}_{\substack{v'(t_i)\text{ için birinci derece} \\ \text{yakınsama}}} - \underbrace{\frac{R_1}{(t_{i+1} - t_i)}}_{\text{kesme hatası}} = v'(t_i)$$

$$R_1 = \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 = \frac{v''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2$$

$$\frac{R_1}{(t_{i+1} - t_i)} = \frac{v''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i) \quad \text{ya da} \quad \frac{R_1}{(t_{i+1} - t_i)} = O(t_{i+1} - t_i)$$

- Diğer bir ifade ile, yapılan türev yakınsamasının hatası adım büyüklüğü ile orantılıdır. Sonuç olarak eğer adım büyüklüğü yarıya indirilirse, türev yakınsamasındaki hatanın yarıya inmesi beklenir.

Taylor Serileri

Hata Yayılımı

- Bu bölümde ölçülen değerlerin başka bir niceliği oluşturmak üzere bir fonksiyon içerisinde kullanılması ile oluşan hataları inceleyeceğiz. Ölçülen değerlerdeki belirsizlik, hesaplanan niceliktede bir belirsizlik oluşturur ve buna **hatanın yayılması** adı verilir.
- $\bar{x}$, x'in yaklaşık değeri olsun. Fonksiyonun gerçek değeri ile yaklaşık değeri arasındaki fark

$$\Delta f(\bar{x}) = |f(x) - f(\bar{x})|$$

şeklinde hesaplanır. x bilinmediğinde bu formülle belirsizlik ifadesini bulmak olanaklı değildir. Ancak taylor serisi yaklaşı ile $f(x)$ kestirilebilir.

- Eğer $\bar{x}$, x'e yakın bir değerse

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + \cdots + \frac{f^n(\bar{x})}{n!}(x - \bar{x})^n + R_n$$

İkinci derece ve daha yüksek terimleri ihmal edersek

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Elde edilir.

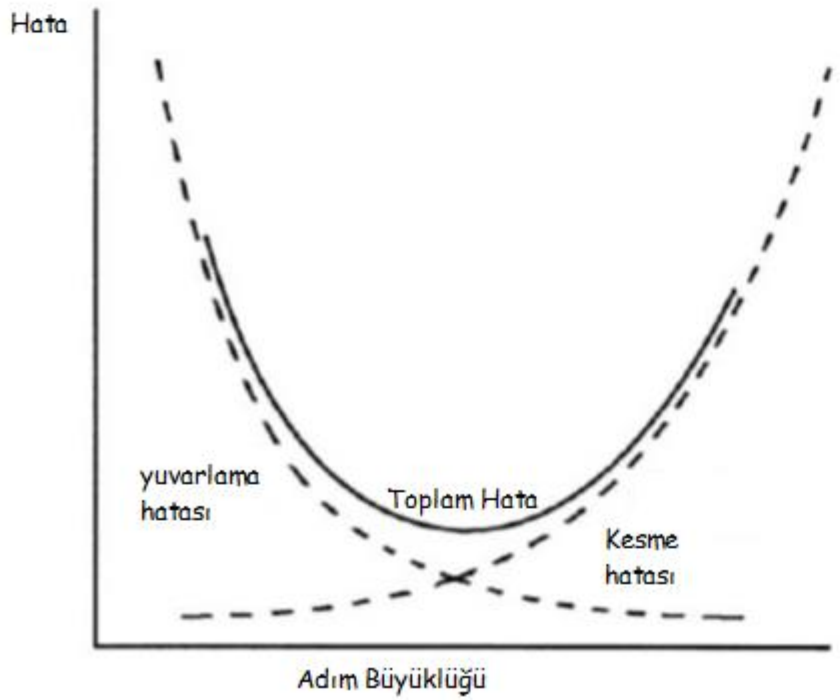
$$\underbrace{f(x) - f(\bar{x})}_{\Delta f(\bar{x})} \cong f'(\bar{x})\underbrace{(x - \bar{x})}_{\Delta x}$$

$$\Delta f(\bar{x}) \cong |f'(\bar{x})|\Delta x$$

Taylor Serileri

Toplam Sayısal Hata

- Toplam sayısal hata, kesme ve yuvarlama hatalarının toplamıdır.
- Yuvarlama hataları, virgülden sonraki anlamlı sayı basamakları artırılarak azaltılabilir.
- Kesme hataları, adım büyüklüğü küçültülerek azaltılabilir.
- Ancak, adım büyüklüğünün küçültülmesi, yakın değerlerin birbirinden çıkarılması ve/veya hesaplama sayısının artmasına neden olacağından, yuvarlama hatalarını artırabilir.



Örnek Problemler 1.

- Aşağıdaki sonsuz sayıda terim içeren seri e^x'in yakınsak değerini bulmak için kullanılmaktadır.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!}$$

a.) Bu Maclaurin serisi açılımının aşağıdaki taylor serisinin $x_i = 0$ ve $h = x$ değerleri için özel bir durum gösterdiğini kanıtlayınız.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

b.) $f(x) = e^{-x}$'i $x_i = 0.2$ için $x_{i+1} = 1$ değeri için hesaplayınız. Taylor serisinin 0., 1., 2., ve 3. dereceden terimlerini kullanarak oransal bağıl hata değerlerini karşılaştırınız.

Örnek Problemler 1. Çözüm

a.) $f(x) = e^{x_i}$, $x_i = 0$ ve $h = x$; bu durumda $x_{i+1} = x_i + h$ olduğuna göre $x_{i+1} = 0 + x = x$

$$f(x) = e^{x_i} = e^0 = 1$$
$$f'(x_i) = f''(x_i) = \cdots = e^{x_i} = e^0 = 1$$

böylece

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

b.) $f(x) = e^{-x}, f'(x_i) = -e^{-x},\ f''(x_i) = e^{-x}, f'''(x_i) = -e^{-x}$

#	$h = \mathbf{1 - 0.2 = 0.8}$	**Hesaplamalar**
0	$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$	$e^{-1} \cong e^{-0.2} = 0.818731$
1	$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h$	$e^{-1} \cong e^{-0.2} - e^{-0.2}0.8 = 0.818731 - 0.818731 * 0.8 = 0.163746$
2	$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$	$e^{-1} \cong e^{-0.2} - e^{-0.2}0.8 + \frac{e^{-0.2}}{2!}0.8^2 = 0.818731 - 0.818731 * 0.8 + \frac{0.818731}{2} * 0.8^2 = 0.425740$
3	$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3$	$e^{-1} \cong e^{-0.2} - e^{-0.2}0.8 + \frac{e^{-0.2}}{2!}0.8^2 - \frac{e^{-0.2}}{3!}0.8^3 = 0.818731 - 0.818731 * 0.8 + \frac{0.818731}{2} * 0.8^2 - \frac{0.818731}{6} * 0.8^3$ $= 0.355875$

Örnek Problemler 1. Çözüm Devam

#	$\boldsymbol{Gerçek\ Değer}$	**Yakınsak Değer**	**Oransal Bağıl Hata**$\%\boldsymbol{\varepsilon_m} = \left\lvert\frac{\boldsymbol{Gerçek\ Değer - Yakınsak\ Değer}}{\boldsymbol{Gerçek\ Değer}}\right\rvert * \mathbf{100}$
0	$e^{-1} = 0.367879$	$e^{-1} \cong 0.818731$	$\%\boldsymbol{\varepsilon_m} = \left\lvert\frac{0.367879 - 0.818731}{0.367879}\right\rvert * \mathbf{100} = 122.53\%$
1	$e^{-1} = 0.367879$	$e^{-1} \cong 0.163746$	$\%\boldsymbol{\varepsilon_m} = \left\lvert\frac{0.367879 - 0.163746}{0.367879}\right\rvert * \mathbf{100} = 55.49\%$
2	$e^{-1} = 0.367879$	$e^{-1} \cong 0.425740$	$\%\boldsymbol{\varepsilon_m} = \left\lvert\frac{0.367879 - 0.425740}{0.367879}\right\rvert * \mathbf{100} = 15.73\%$
3	$e^{-1} = 0.367879$	$e^{-1} \cong 0.355875$	$\%\boldsymbol{\varepsilon_m} = \left\lvert\frac{0.367879 - 0.355875}{0.367879}\right\rvert * \mathbf{100} = 3.26\%$

Örnek Problemler 2.

Stefan-Boltzman kanunu bir yüzeyden yansıyan radyasyon enerjisi H'ı bulmak için kullanılmaktadır. Şu şekilde formüle edilmiştir.

$$H = Ae\sigma T^4$$

Burada H watt cinsinden yüzeyden yansıyan radyasyon enerjisini ifade etmektedir. A, m^2 cinsinden yüzey alanını göstermektedir. e yüzeyin yayma özelliğini karakterize eden boyutsuz yayma oranı sabitidir. σ Stefan-Boltzman sabiti adı verilen evrensel bir sabit olup değeri $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\mathrm{W}m^{-2}K^{-4}$ olarak belirlenmiştir. T ise kelvin cinsinden mutlak sıcaklığı göstermektedir. $A = 0.15$, $e = 0.90$ ve $T = 650 \pm 20K$ verildiğine göre H'ın bulunmasındaki hatayı hesaplayınız. Aynı hesaplamayı $T = 650 \pm 40K$ için de yapınız. Sonuçlarınızdaki tam hatayı karşılaştırınız.

Örnek Problemler 2. Çözüm

$$H(T) = H(\bar{T}) + H'(\bar{T})(T - \bar{T})$$
$$\Delta H(\bar{T}) \cong |H'(\bar{T})|\Delta T$$
$$H(T) = Ae\sigma T^4 \Longrightarrow H'(T) = 4Ae\sigma T^3$$
$$\Delta H(\bar{T}) \cong |4Ae\sigma\bar{T}^3|\Delta T = |4 \cdot 0.15 \cdot 0.90 \cdot 5.67 \times 10^{-8} \cdot 650^3| \cdot 20$$
$$\Delta H(\bar{T}) \cong 168.17\ W$$
$$\Delta H(\bar{T}) \cong |4Ae\sigma\bar{T}^3|\Delta T = |4 \cdot 0.15 \cdot 0.90 \cdot 5.67 \times 10^{-8} \cdot 650^3| \cdot 40$$
$$\Delta H(\bar{T}) \cong 336.34\ W$$

Örnek Problem 3

Bir grup mühendislik öğrencisi, dinamik dersi kapsamında cisme etkiyen net kuvveti belirlemek istiyorlar; kütlesi $m = 2 \pm 0.01\ kg$ olarak ölçülen deney seti arabasını itiyorlar ve ivme sensöründen $a = 20 \pm 0.1\ m/s^2$ olarak ivme değerini okuyorlar. Deney düzeneğindeki sürtünmeler azaltılmış olduğu için sürtünmeler ihmal edilebilmektedir. $F = ma$ olduğuna göre kuvvetin nominal değerini ve hatasını belirleyiniz.

Hatırlatma:

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta\tilde{x}_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta\tilde{x}_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta\tilde{x}_n$$

Örnek Problem 3 Çözümü

Çözüm 1. Verilen Fonksiyon F=ma; kütle $m = 2 \pm 0.01\ kg \Longrightarrow m_{nom} = 2, \Delta m = 0.01$ ve ivme $a = 20 \pm 0.1\ m/s^2 \Longrightarrow a_{nom} = 20, \Delta a = 0.1$

Verilen formüle uyarlarsak;

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial m}\right| \Delta m + \left|\frac{\partial F}{\partial a}\right| \Delta a = a\Delta m + m\Delta a = 20 \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.1 = 0.4$$

$$F_{nom} = 2 \cdot 20 = 40 \Longrightarrow F = F_{nom} + \Delta F = 40 \pm 0.4$$

$$Burada, \quad \frac{\partial F}{\partial m} = a\ ve\ \frac{\partial F}{\partial a} = m\ olduğuna\ dikkat\ edin;$$

Örnek Problem 4

Soru 1: Bir grup mühendislik öğrencisi, mukavemet dersi kapsamında, burulma test cihazında dairesel kesitli bir numuneye tork uygulayarak, numune üzerinde oluşan kayma gerilmesini hesap etmek istemektedir. Dairesel kesitli yarıçapı r olan bir numunede kayma gerilmesi (τ) şu şekilde ifade edilir:

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J}$$

Burada, T: Burulma momentidir. Test düzeneği istenen tork girişini belirli bir hata ile yerine getirmektedir. Cihaz'ın numuneye uyguladığı tork T=$100 \pm 1\ N \cdot m$ şeklindedir. Deney numunesinin yarıçapı $20 \pm 0.1\ mm$ dir. Yukarıdaki formülde J polar atalet momentini göstermekte ve içi dolu millerde polar atalet momenti aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir.

$$J = \frac{1}{2}\pi r^4$$

Öğrenciler, J'nin pi sayısını yuvarlatma hatalarından kaçınmak için, işlemlerin en sonunda gerektiğinde dönüştürmek üzere pi olarak kullanmayı tercih etmişlerdir. Öğrenciler kayma gerilmesini ve kayma gerilmesindeki hatayı kaç olarak bulurlar.

Çözüm

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta\tilde{x}_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta\tilde{x}_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta\tilde{x}_n$$

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J} \text{ ve } J = \frac{1}{2}\pi r^4 \Longrightarrow \tau = \frac{2 \cdot T}{\pi r^3}$$

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial T}\right| = \frac{2}{\pi r^3}; ve \ \left|\frac{\partial \tau}{\partial r}\right| = \left|-\frac{6 \cdot T\pi r^2}{(\pi r^3)^2}\right| = \frac{6T}{\pi r^4}$$

$$T = 100 \pm 1\, N \cdot m\ T_{nom} = 100; \Delta T = 1;$$

$$r = 20 \pm 0.1\, mm = (20 \pm 0.1) \times 10^{-3}\, m; \mathrm{r_{nom}} = 0.02; \Delta r = 10^{-4}$$

Çözümün Devamı

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial T}\right| = \frac{2}{\pi r^3} = \frac{2.5 \times 10^5}{\pi}$$

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial r}\right| = \frac{6T}{\pi r^4} = \frac{3.75 \times 10^9}{\pi}$$

$$\Delta\tau = \left|\frac{\partial \tau}{\partial T}\right| \Delta T + \left|\frac{\partial \tau}{\partial r}\right| \Delta r = \frac{2.5 \times 10^5}{\pi} \cdot 1 + \frac{3.75 \times 10^9}{\pi} \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta\tau = \frac{6.25 \times 10^5}{\pi}$$

$$\tau = \frac{2 \cdot T}{\pi r^3} = \frac{2.5 \times 10^7}{\pi}$$

Özet ve Ev Ödevi

- Ders politikası konuşuldu
- Dersin içeriği hakkında bilgi verildi
- Dersin bir mühendis açısından önemi tartışıldı
- Dersin tanımı ve amacı konuşuldu
- Temel kavram ve tanımlar açıklandı
- Hata kavramı tanıtıldı
- Taylor Serileri ve Taylor serileri kullanılarak hata analizi yapılması tartışıldı.
- Ev Ödevi: Yapılan Örnekleri Excelde veya bildiğiniz herhangi bir programda yeniden yapınız.
- Gelecek hafta, matrisler ve lineer denklem takımlarının çözümünde kullanılan direkt (dolaysız) ve indirekt (dolaylı) yöntemler tartışılacaktır. (Bölüm 2 ve 3). Hazırlıklı geliniz….