6. Rijit cisimlerin düzlemsel kinetiği
6.6 İş Enerji İlişkileri

5. bölümde rijit cisimlerin düzlemsel kinematiğinin iliskilerini (denklemlerini) gördük. Bu bölümde bu iliskileri kullanarak, rijit cisimlerin iki boyutlu hareketinde, kuvvetlerin etkisini inceleyeceğiz.

6. Bölüm 3 kısımdan oluşuyor (A, B, ve C).

A. Kuvvetlerin ve momentlerin lineer ivmesi ile açısal ivmesi arasındaki bağıntılar,
B. İs enerji
C. İmpuls-momentum

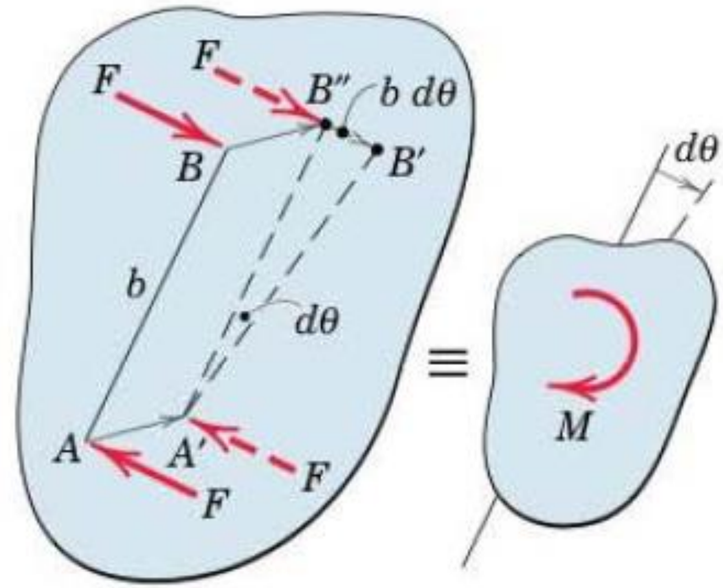
Kuvvet ve Momentlerin Yaptığı İş

Bir kuvvet tarafından yapılan iş

$$U = \int F \cdot dr = \int F cos\alpha ds$$

Formülüyle bulunmaktaydı.

Rijid cisimlerle çalıştığımız zaman sadece kuvvetin yaptığı iş değil momentin yaptığı işi de dikkate almamız gerekecek; Yandaki şekle göre

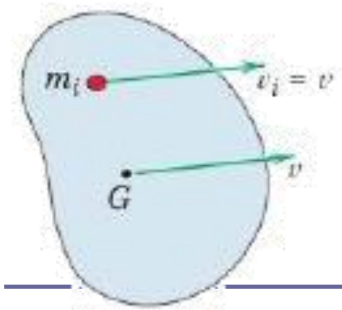


$$dU = F(bd\theta) = Md\theta$$

M momenti tarafından kendisine paralel düzlemde yapılan iş;

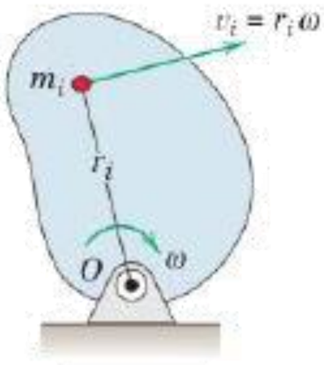
$$U = \int M d\theta$$

Kinetik Enerji



(a) Translation

Öteleme; $T = \frac{1}{2}mv^2$



(b) Fixed-Axis Rotation

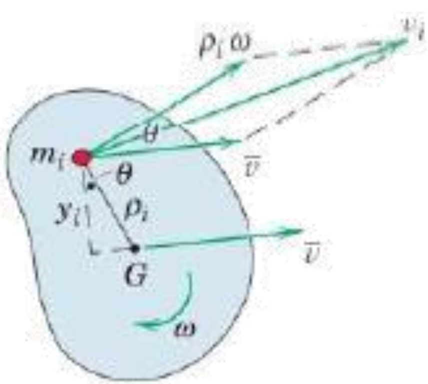
Sabit bir Eksen Etrafında Dönme; $T = \frac{1}{2}I_o\omega^2$

Genel Düzlemsel Hareket; $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

Yada

An için hızın sıfır olduğu C noktasına göre;

$$T = \frac{1}{2}I_C\omega^2$$



(c) General Plane Motion

Potansiyel Enerjiler ve İş Enerji Denklemleri

Potansiyel Enerji ve İş-Enerji İlişkileri;

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

Yada

$$T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2$$

Burada U' terimi elastik (yay kuvvetleri) ve yer çekimine bağlı kuvvetler dışındaki tüm kuvvetler tarafından yapılan işi temsil ediyor. Üçüncü bölümde daha özel bir formda

İş Enerji İlişkilerini şöyle yazdık.

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta \mathrm{V}_{\mathrm{g}} + \Delta V_e$$

Burada da aynen kullanacağız.

İş-Enerji Denklemleri
Güç

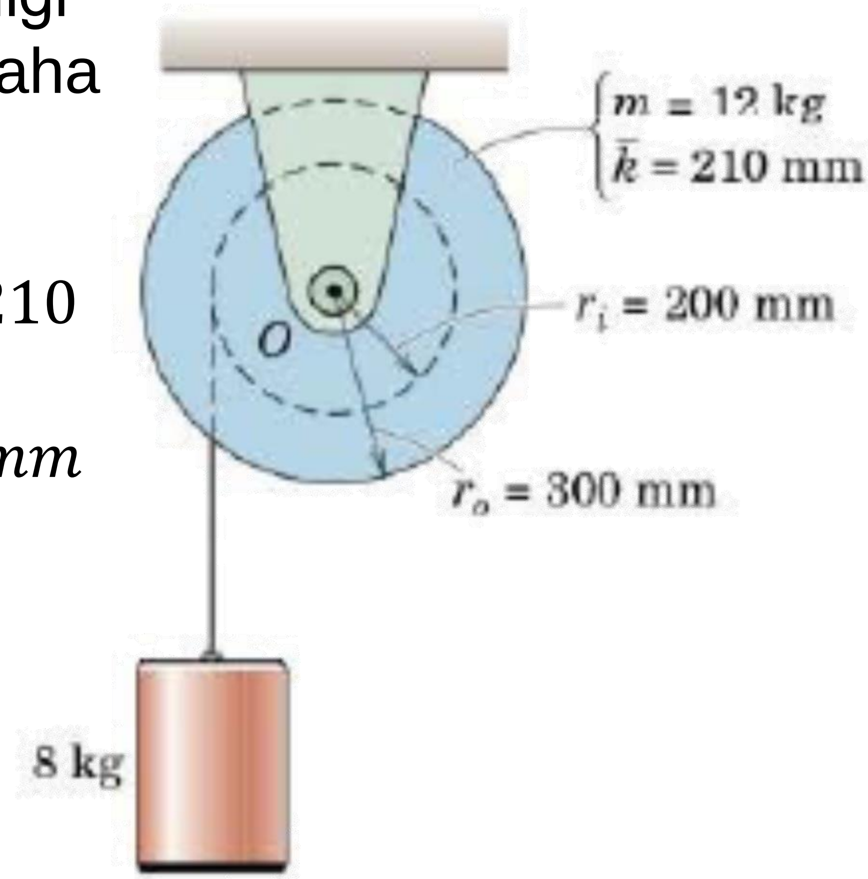
Güç;

F kuvveti etkisi altında düzlemsel hareket eden rijit cisim hareketini ele aldığımızda, F kuvvetinin oluşturduğu güç, o anda yapılan işin zamana göre değişim oranıdır.

$$dU = F \cdot dr \Longrightarrow P = \frac{dU}{dt} = F \cdot v$$

Örnekler

8 kg'lık silindirin hızı gösterildiği anda $v = 0.3\ m/s$ dir. $1.5\ m$ daha düştükten sonra hız ne olur? Tamburlu makaranın ağırlığı $12\ kg$ ve atalet yarıçapı $k = 210$ mm olarak hesaplanmıştır. Tamburun yarıçapı $r_i = 200\ mm$ makaranın yarıçapı $r_0 =$ $300\ mm$ dir. O'daki sürtünme momenti sabit ve $3\ Nm$ dir.



6/117. problem

Örnekler

$$m_s = 8\,kg;\ v = 0.3\frac{m}{s}; @1.5\,m, v_2 = ?$$

$$\mathrm{m_m} = 12\,kg\,; k = 210 \therefore I = k^2 m_m$$

$$I = 0.21^2 \cdot 12 = 0.5292\,kgm^2$$

$$\omega = \frac{v}{r_i} = \frac{0.3}{0.2} = 1.5\,rad/s$$

$$F_s \cdot r_i = M_s \Longrightarrow F_s = \frac{3}{0.2} = 15\,N$$

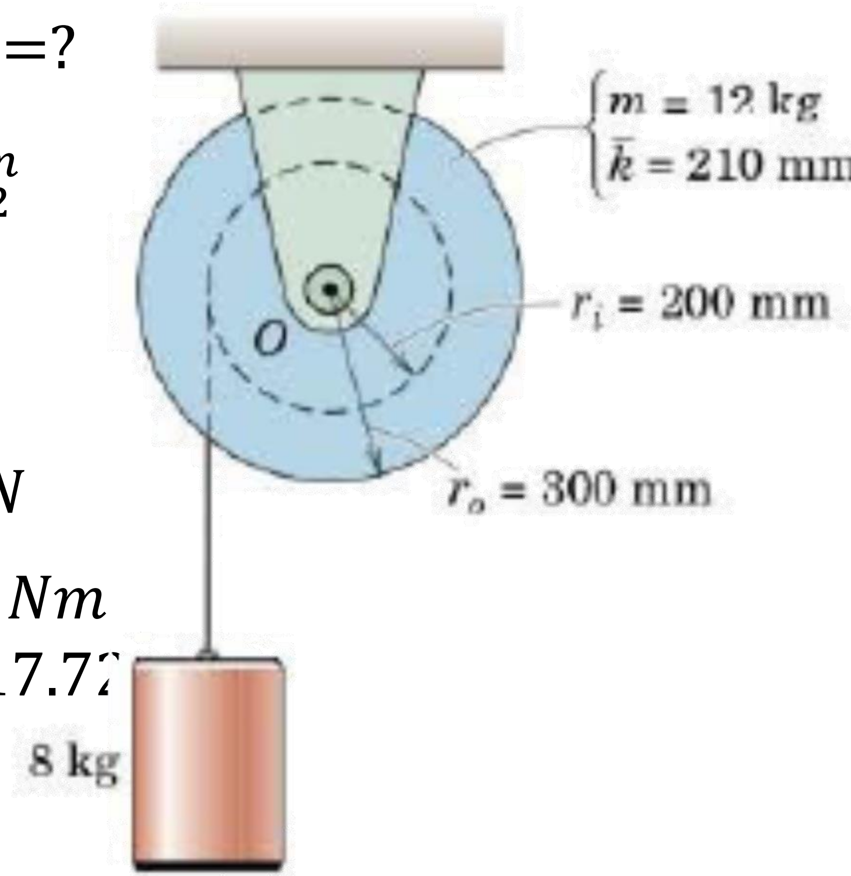
$$U = F_s \cdot yol = 15\,N\ * 1.5 = 22.5\,Nm$$

$$\Delta V = mgh = 8 * 9.81 * 1.5 = -117.72$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_s v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}8 * 0.3^2 + \frac{1}{2}0.5292 * 1.5^2$$

$$= 0.9554\ \mathrm{J}$$



6/117. problem

Örnekler

$$U = -22.5\ Nm; \Delta V = -117.72; T_1 = 0.9554\ \mathrm{J}$$

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta \mathrm{V_g} + \Delta V_e$$

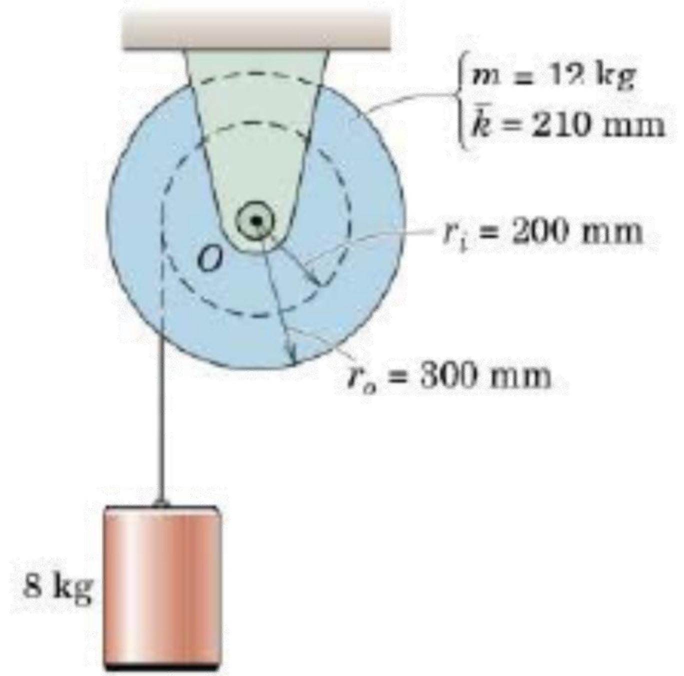
$$T_2 = U - \Delta \mathrm{V_g} + T_1 =$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_s v_2^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v_2}{r_i}\right)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(m_s + \frac{I}{r_i^2}\right) v_2^2 = 10.615 v_2^2$$

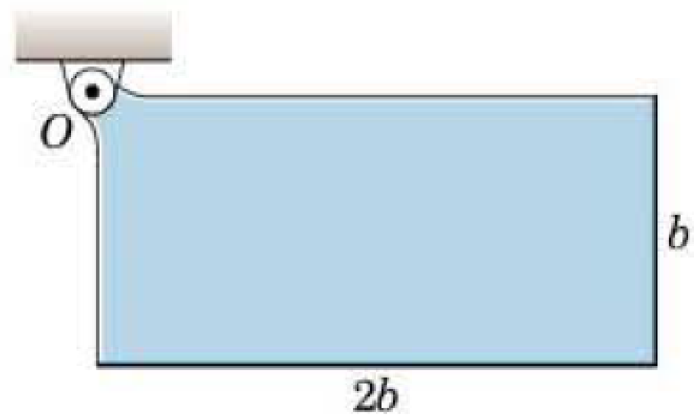
$$10.615 v_2^2 = 96.175$$

$$v_2 = 3.01 \frac{m}{s}$$



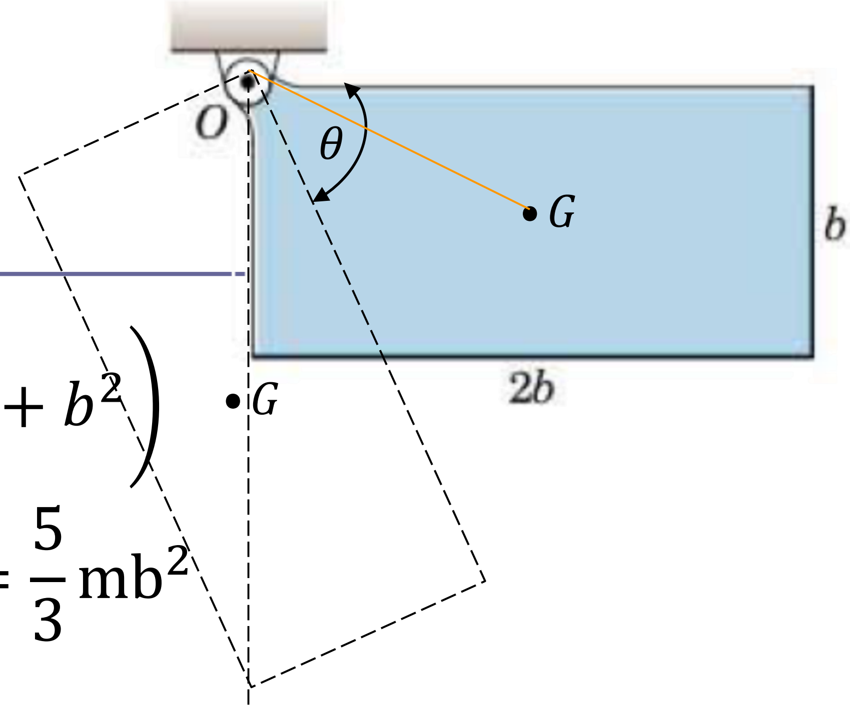
Örnekler

Özdeş dikdörtgensel levha görülen pozisyonda durgunluktan serbest bırakılıyor, hareketin sonrasında oluşacak maksimum açısal hızı bulunuz. Mafsaldaki sürtünmeyi ihmal ediniz.



6/123. problem

Örnekler



$$I = \frac{1}{12} m(b^2 + 4b^2) + m\left(\frac{b^2}{4} + b^2\right)$$

$$I = \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{4}\right) mb^2 = \frac{20}{12}\mathrm{mb}^2 = \frac{5}{3}\mathrm{mb}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{b^2}{4} + b^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} b$$

$$\Delta T = \Delta V_g$$

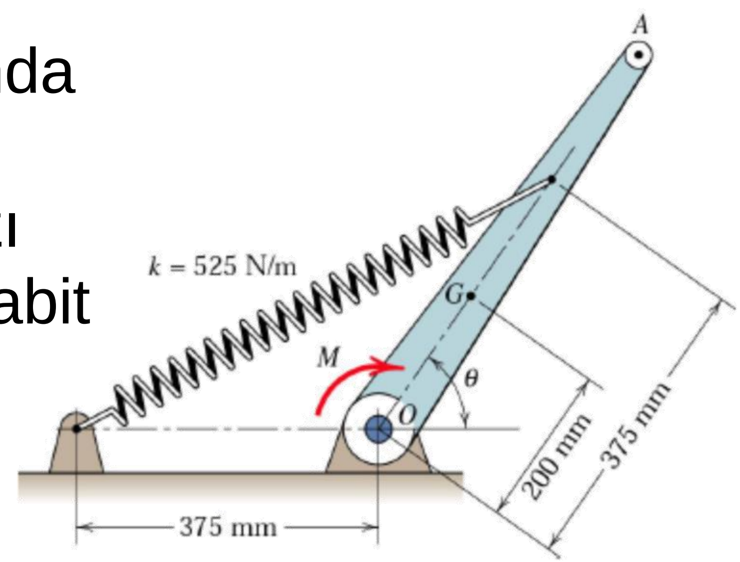
$$\frac{1}{2} I\omega^2 = mgb\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{5}{3}\mathrm{mb}^2\omega^2 = mgb\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\omega = 0.86\sqrt{\frac{g}{b}}$$

Örnekler

O merkezi etrafında dönen OA kolu 5.5 kg dır ve O ekseni etrafında jirasyon yarıçapı 250 mm dir. Durgun durumda dik pozisyondadır. Kola bağlı yayın yay katsayısı $k = 525\ N/m$ dir ve yay durgun durumda nominal boydadır. Kol $\theta = 0^0$ dereceye ulaştığında açısal hızı $\omega = 4\ rad/s$ ise kola uygulanan sabit momenti hesaplayınız.



6/128. problem

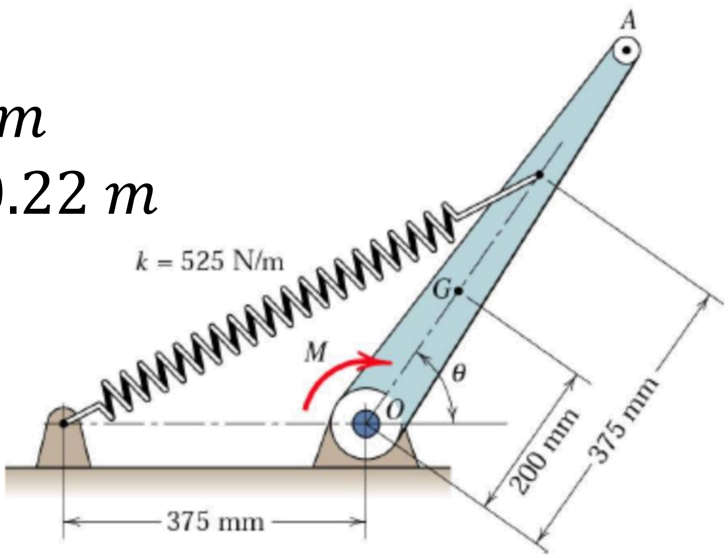
Örnekler

$$m_k = 5.5\,kg; k_o = 0.25\,m$$
$$k = 525\,N/m$$
$$@\theta = 0^0 \omega = 4\,rad/s$$

M=?

Yayın nominal boyu;

$$l_1 = \sqrt{0.375^2 + 0.375^2} = 0.53\,m$$
$$\Delta l = l_2 - l_1 = 2 * 0.375 - 0.53 = 0.22\,m$$
$$\Delta h = -0.2\,m$$
$$I = m_k k_0^2 = 0.344\,kgm^2$$



6/128. problem

Örnekler

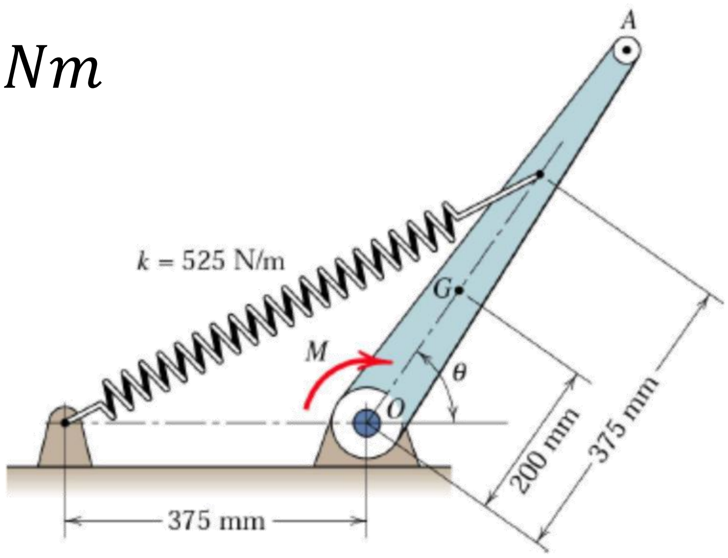
Momentin yaptığı iş $dU = Md\theta$

$$U = M\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\theta = M\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = -M\frac{\pi}{2}$$

$$M\frac{\pi}{2} = \mathrm{mg}\Delta h + \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

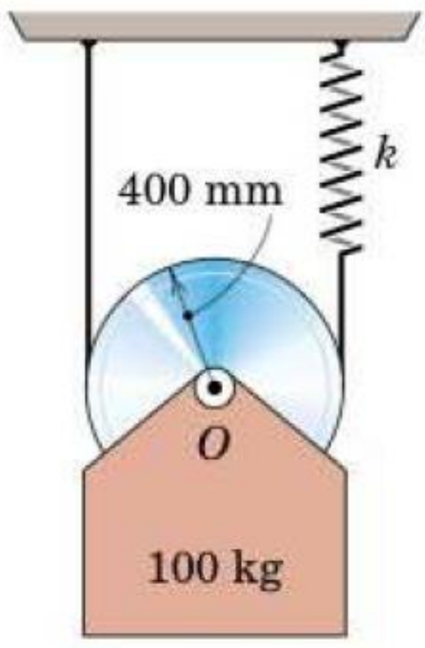
$$-M\frac{\pi}{2} = -5.5 * 9.81 * 0.2 + 0.5 * 0.344 * 4^2 + 0.5 * 525 * 0.22^2$$

$$M = -2.97\ Nm$$



Örnekler

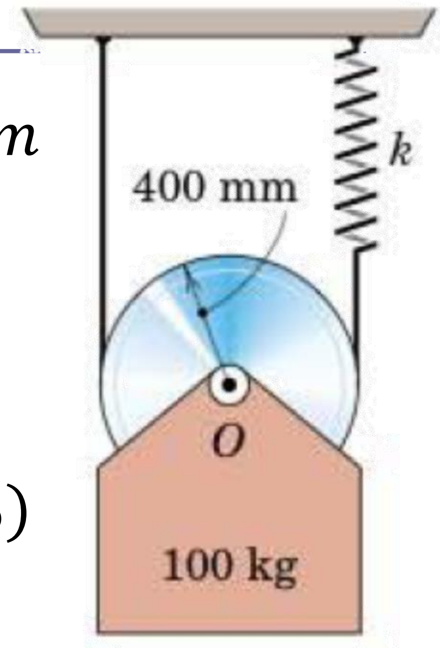
$400\ mm$ yarı çapında ve $50\ kg$ ağırlığındaki makaranın jirasyon yarıçapı $k = 300$ mm dir. Makara ve taşıdığı yük yay katsayısı $k = 1.5\ kN/m$ olan iple asılıdır. Sistem durgunluktan serbest bıraklıdığında ipin gerginliği $100\ mm$ dir. Sistem $50\ mm$ düştükten sonra O noktasının hızını hesap ediniz.



6/140. problem

Örnekler

6/140. problem



$$r = 400\ mm; m_m = 50\ kg; k_0 = 0.3\ m$$

$$k = 1.5\frac{kN}{m}; l_1 = 0.1\ m; l_2 = 0.2\ m$$

$$h_2 = 0.050\ m\ v_0 = ?$$

$$I_0 = mk_0^2 = 4.5\ kgm^2$$

$$\Delta V_g = m_T g \Delta h = 150 * 9.81 * (-0.05)$$

$$\Delta V_g = -73.575\ J$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(l_2^2 - l_1^2) = 750(0.2^2 - 0.1^2) = 22.5\ J$$

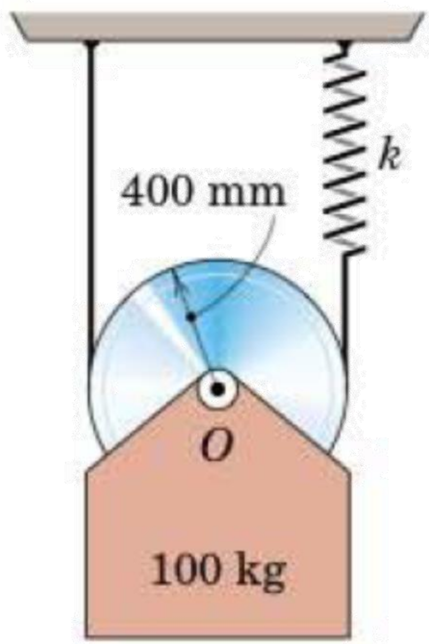
$$\Delta T = \frac{1}{2}m_T v_0^2 + \frac{1}{2}I_0\left(\frac{v_0}{0.4}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(150 + \frac{4.5}{0.4^2}\right)v_0^2$$

$$\Delta T = 89.0625 v_0^2$$

Örnekler

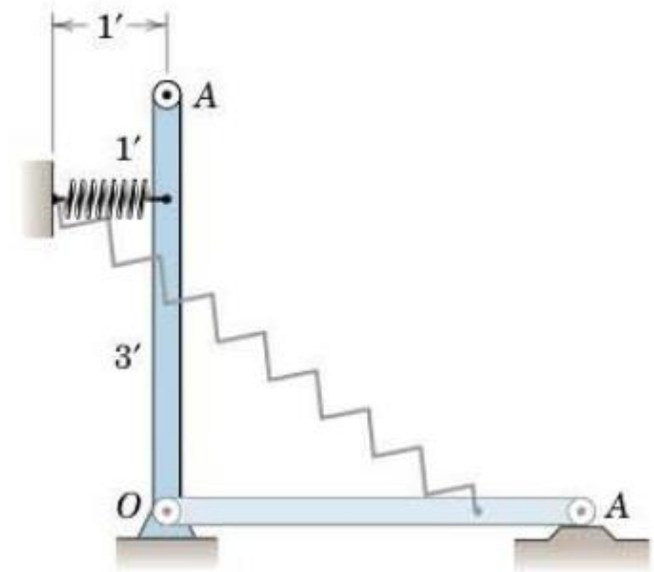
6/140. problem

$$0 = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$
$$0 = 89.0625 v_0^2 - 73.575\, J + 22.5\, J$$
$$v_0 = 0.757\ m/s$$



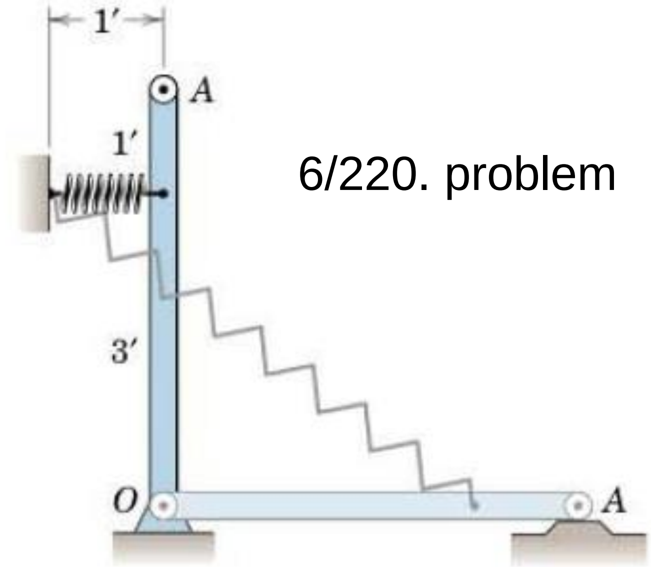
Örnekler

Ağırlığı 60 lb olan düzgün çubuk, şekilde görülen dike yakın pozisyondan durgunluktan serbest bırakılıyor. Yay sabiti $k = 10\ lb/ft$ olan yay görülen pozisyonda gergin değildir. Çubuğun A ucu yere değdiğinde eriştiği hızı bulunuz.



6/220. problem

Örnekler



6/220. problem

$$W = 60\ lb\ ;$$

$$k = 10\frac{lb}{ft}; l_1 = 1';$$

$$l_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5'; \Delta l = 4'$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 80\ lb \cdot ft$$

$$\Delta V_g = W\Delta h = -60 * 2'$$

$$\Delta V_g = -120\ lb \cdot ft$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}I_o\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{W}{g}l^2\omega^2$$

$$\Delta T = \frac{10}{g}l^2\left(\frac{v_A}{l}\right)^2$$

$$\Delta T = \frac{10}{g}{v_A}^2$$

$$\Delta V_e + \Delta V_g + \Delta T = 0$$

$$\frac{10}{g}{v_A}^2 = 120 - 80 = 40\ lb \cdot ft$$

Burada $g = 32.2\ ft/s^2$

$${v_A}^2 = 4g \Longrightarrow v_A = 11.35\ ft/s$$

İş Enerji İvme-Virtüel İş

İş-Enerji bağıntısını sabit ivmeli hareket için de kullanabiliriz.

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta \mathrm{V_g} + \Delta V_e$$

denklemini sistemin çok küçük bir elemanı için

$$dU'_{1-2} = dT + dV_g + dV_e$$

şeklinde yazabiliriz.

Birbirine bağlı hareket eden cisimlerin kinetik enerjisi her bir cismin kinetik enerji toplamına eşittir. Her bir cismi i ile temsil edersek

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

İş Enerji –İvme Virtuel İş

Sistemin çok küçük bir elemanı için

$$dT = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} I_i \omega_i^2\right)$$

$$dT = \sum_i m_i v_i dv_i + \sum_i I_i \omega_i d\omega_i$$

Hatırlatma $vdv = ads$ ve $\omega \mathrm{d}\omega = \alpha \mathrm{d}\theta$

$$dT = \sum_i m_i a_i ds_i + \sum_i I_i \alpha_i d\theta_i$$

İş Enerji –İvme Virtuel İş

dV = Toplam potansiyel enerji değişimini yani dV_g ve dV_e'nin toplamını gösternektedir.

$$\Delta V = \Delta \mathrm{V_g} + \Delta V_e$$

Sistemin çok küçük bir elemanı için

$$dV = dV_g + dV_e$$

$$dV = d\left(\sum_i m_i g h_i + \sum_j \frac{1}{2} k_j x_j^2\right)$$

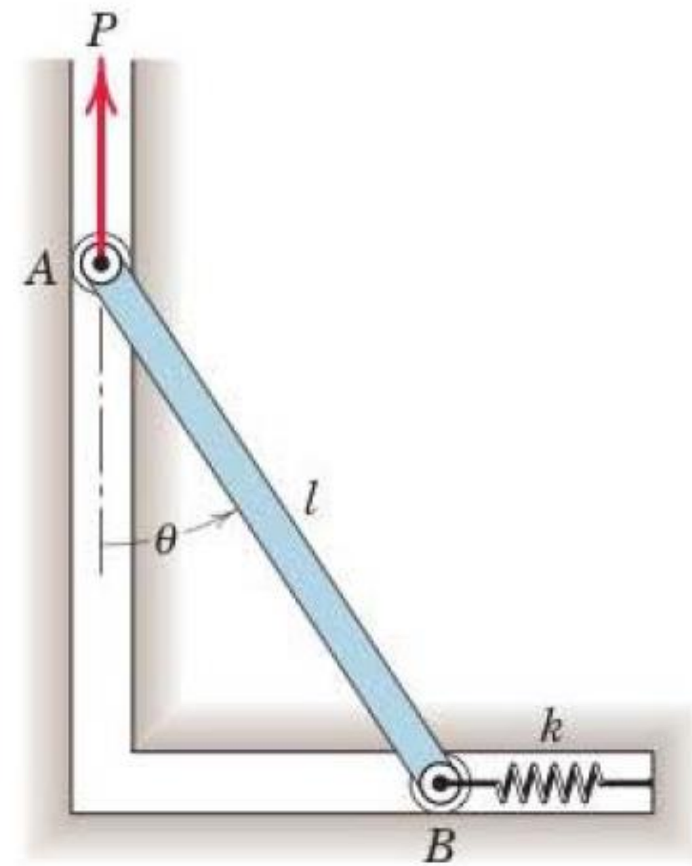
$$dV = \sum_i m_i g dh_i + \sum_j k_j x_j dx_j$$

İş Enerji –İvme Virtuel İş

$$dU' = \sum_i m_i a_i ds_i + \sum_i I_i \alpha_i d\theta_i + \sum_i m_i g dh_i + \sum_j k_j x_j dx_j$$

Örnekler

Düzgün m kütleli uzun çubuk şekilde gösterilen pozisyonda dengede iken P kuvveti uygulanmaya başlanıyor. P kuvveti uygulanır uygulanmaz oluşan açısal ivmeyi hesaplayınız.



6/156. problem

Örnekler

$$dy = d(l\cos\theta) = -l\sin\theta d\theta$$

$$T = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

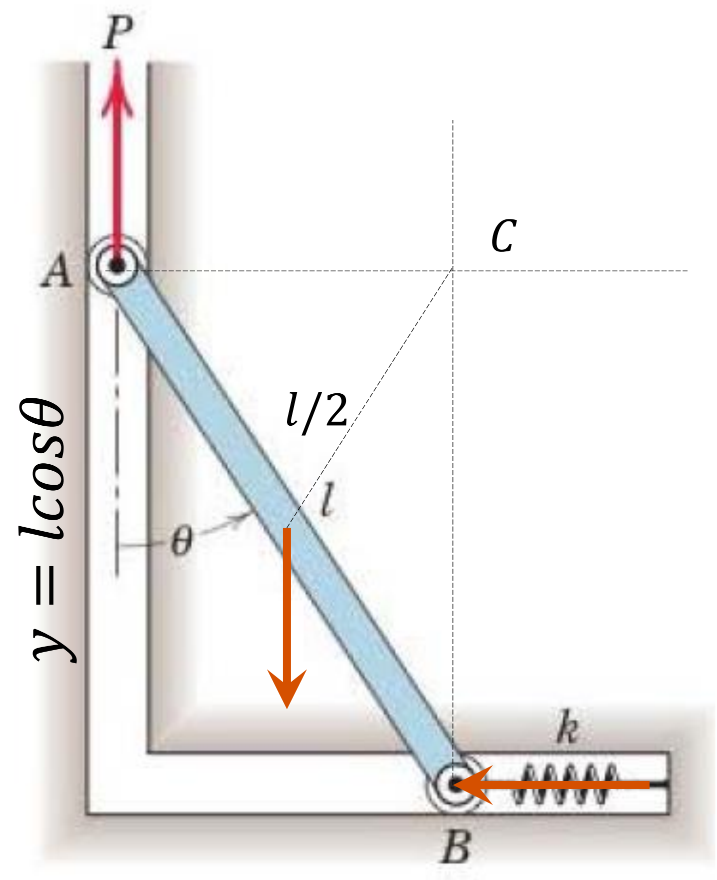
$$I_C = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

$$dT = I_C \omega d\omega = I_c \alpha d\theta$$

$$Pdy = dT$$

$$-Pl\sin\theta d\theta = I_C \alpha d\theta$$

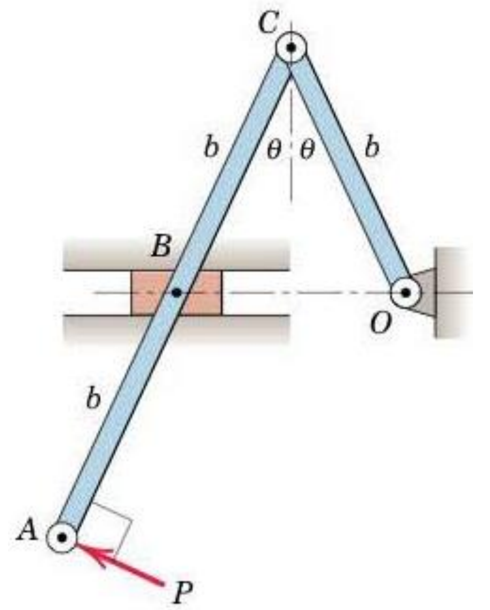
$$\alpha = \frac{-Pl\sin\theta}{I_C} = -\frac{3P\sin\theta}{ml}$$



6/156. problem

Örnek

Şekilde görülen mekanizma P kuvvetinin etkisi ile durgunluktan harekete başlamaktadır. Başlangıçta sistemin açısal ivmesini bulunuz. Uzun çubuk $2b$ boyunda $2m$ kütlesinde, kısa çubuk b boyunda ve m kütlesindedir.



6/164. problem

Örnekler

P kuvvetinin etkisini uzun çubuğun merkezine taşıyalım.

Sistemde P kuvvetinin yaptığı iş;

Çubukların lineer ve açısal yer değiştirmesine bağlıdır.

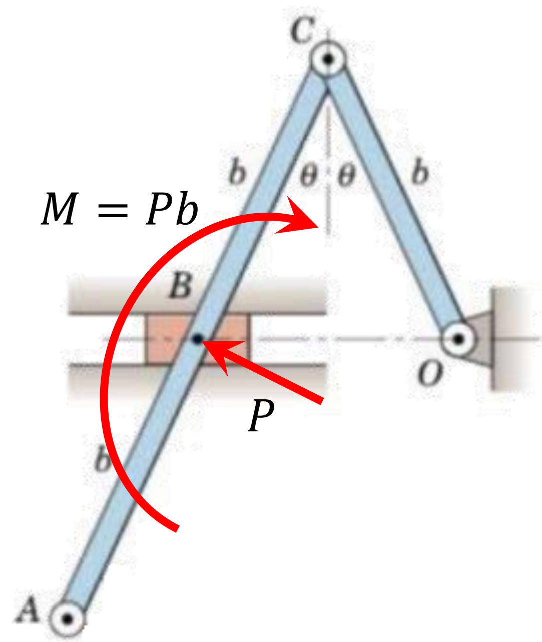
$$dU = P cos\theta d(2b sin\theta) + Pbd\theta$$

$$dU = Pb(2\cos^2\theta + 1)d\theta$$

Sistemin kinetik enerjisi, çubukların kinetik enerjilerinin toplamıdır.

$$T = \left(\frac{1}{2}2mv^2 + \frac{1}{2}I_B\omega\right)_1 + \left(\frac{1}{2}I_o\omega\right)_2$$

SCD



6/164. problem

Örnekler

$$T = \left(\frac{1}{2}2mv^2 + \frac{1}{2}I_B\omega^2\right)_1 + \left(\frac{1}{2}I_o\omega^2\right)_2$$

$$dT = 2mvdv + I_B\omega d\omega + I_0\omega d\omega$$

$$dT = 2madx + I_B\alpha d\theta + I_0\alpha d\theta$$

$$x = 2bsin\theta \Longrightarrow dx = 2bcos\theta d\theta$$

$$x = 2bsin\theta \Longrightarrow \; v = 2b$$

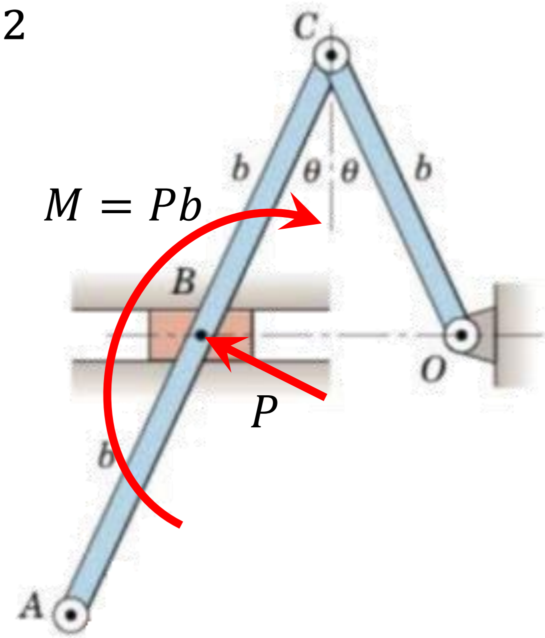
$$\Longrightarrow a = 2b(\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta)$$

Başlangıçta $\dot{\theta} = 0$ olduğu için

$$\Longrightarrow a = 2b\ddot{\theta}cos\theta$$

$$I_B = \frac{1}{12}2m(2b)^2; I_0 = \frac{1}{3}mb^2$$

SCD



6/164. problem

Örnekler

$$dT = 2madx + I_B\alpha d\theta + I_0\alpha d\theta$$

$$dT$$
$$= 2m * 2b\ddot{\theta}cos\theta * 2bcos\theta d\theta + \frac{1}{12}2m(2b)^2\ddot{\theta}d\theta + \frac{1}{3}mb^2\ddot{\theta}d\theta$$

$$dT = mb^2\ddot{\theta}(8\cos^2\theta + 1)d\theta$$

$$dU = Pb(2\cos^2\theta + 1)d\theta$$

$$dU = dT \Longrightarrow \alpha = \ddot{\theta} = \frac{Pb(2\cos^2\theta + 1)d\theta}{mb^2(8\cos^2\theta + 1)d\theta}$$

$$\alpha = \frac{P(2\cos^2\theta + 1)}{mb(8\cos^2\theta + 1)}$$