6. Rijit cisimlerin düzlemsel kinetiği
6.1 Giriş

5. bölümde rijit cisimlerin düzlemsel kinematiğinin iliskilerini (denklemlerini) gördük. Bu bölümde bu iliskileri kullanarak, rijit cisimlerin iki boyutlu hareketinde, kuvvetlerin etkisini inceleyeceğiz.

6. Bölüm 3 kısımdan oluşuyor (A, B, ve C).

A. Kuvvetlerin ve momentlerin lineer ivmesi ile açısal ivmesi arasındaki bağıntılar,
B. İs enerji
C. İmpuls-momentum

6. Rijit cisimlerin düzlemsel kinetiği
6.1 Giriş

Rijit cismin kinetiği, cisme etki eden kuvvetler ile cismin şekli, kütlesi ve bu kuvvetlerin yarattığı hareket arasındaki bağıntıları inceler.

Parçacığın kinetiği konusunda cisime uygulanan kuvvetlerin tamamının kütle merkezinden geçtiği varsayımı ile işlem yapıyorduk.

Farklı olarak;

Rijit cismin kinetiğinde ise cisim, gerçek boyutları ile ele alınacak, Cisme uygulanan kuvvetlerin uygulanma noktası önemli olacaktır.

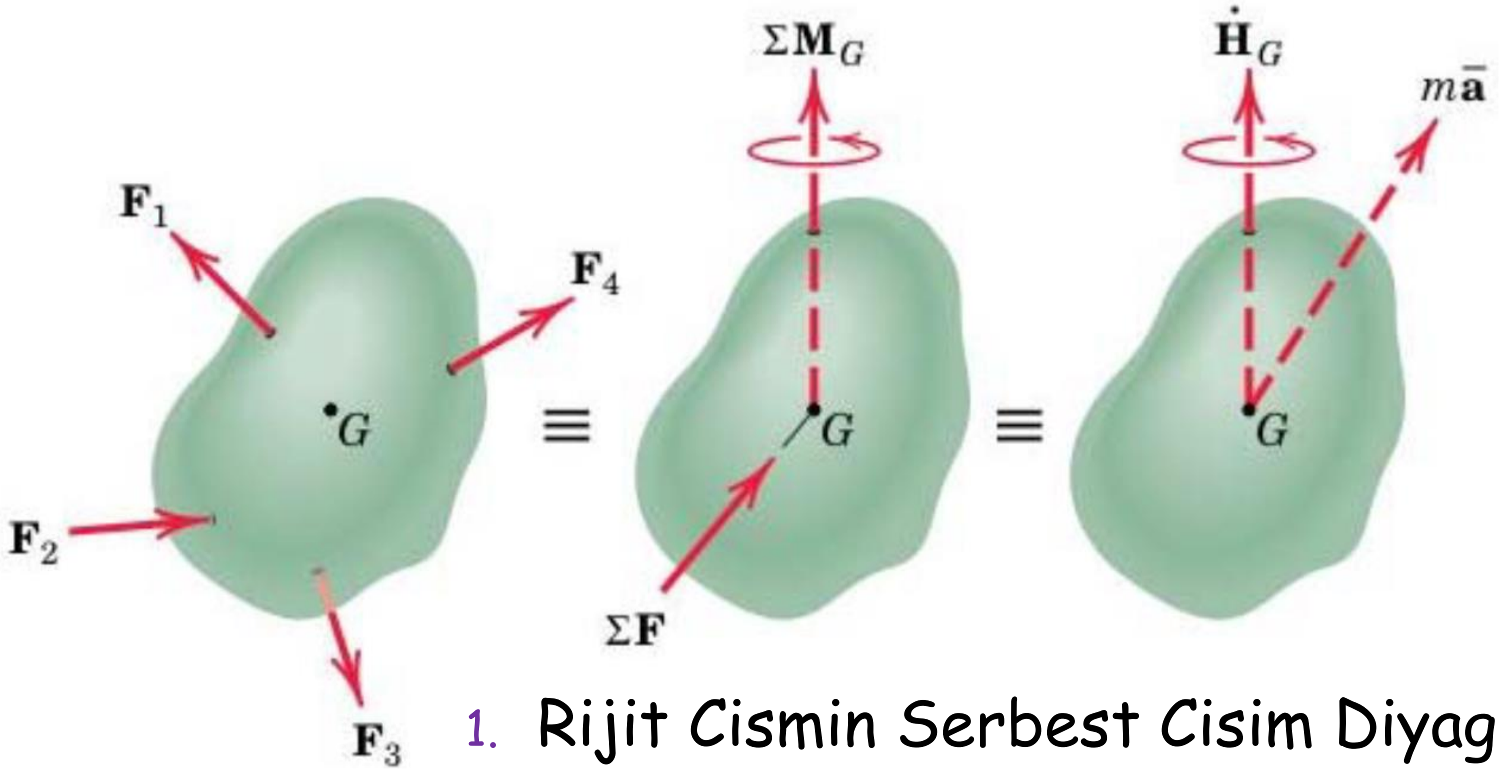
6. Rijit cisimlerin düzlemsel kinetiği
6.1 Giriş

Hatırlatma: Bir noktaya uygulanan kuvveti keyfi olarak başka bir noktaya kaydırdığımızda, kuvvetin yer değiştirmesi nedeniyle oluşacak momentin büyüklüğü ile eş ve ters yönde bir moment eklememiz gerekir.

Bu bilgiyi çözümlerimizde sıklıkla kullanmamız gerekecek,

Cisme uygulanan kuvvetleri, G kütle merkezine taşıyacağız.

6.2 Düzlemsel Hareketin Genel Denklemleri



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$$

1. Rijit Cismin Serbest Cisim Diyagramı (SCD)
2. Eşdeğer Kuvvet-Çifti diyagramı
3. Kinetik Diyagram

6. Kuvvet kütle ve ivme
Düzlemsel Hareketin Denklemleri

Şekilde x-y düzleminde hareket eden bir Rijit Cisim (RC) görüyoruz.

Kütle merkezine göre açısal momentum $H_o = \sum \rho_i \times m_i \dot{\rho}_i$

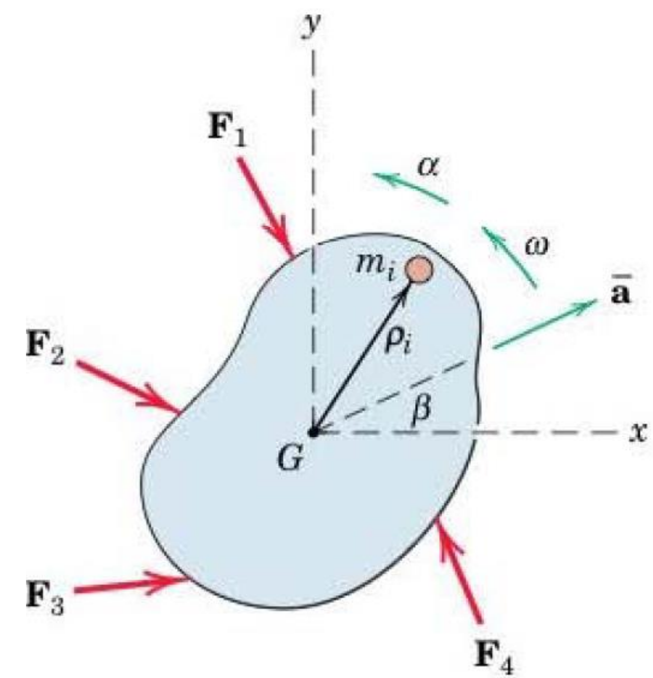
Herhangi bir noktanın G'ye göre hızı $\dot{\rho}_i = \omega \times \rho_i$.

Dolayısıyla kütle merkezindeki açısal momentum;

$$H_G = \sum \rho_i \times m_i(\omega \times \rho_i)$$

$$H_G = \sum m_i\,(\rho_i \cdot \rho_i)\omega - \sum m_i\,\underbrace{(\rho_i \cdot \omega)}_{0}\,\rho_i$$

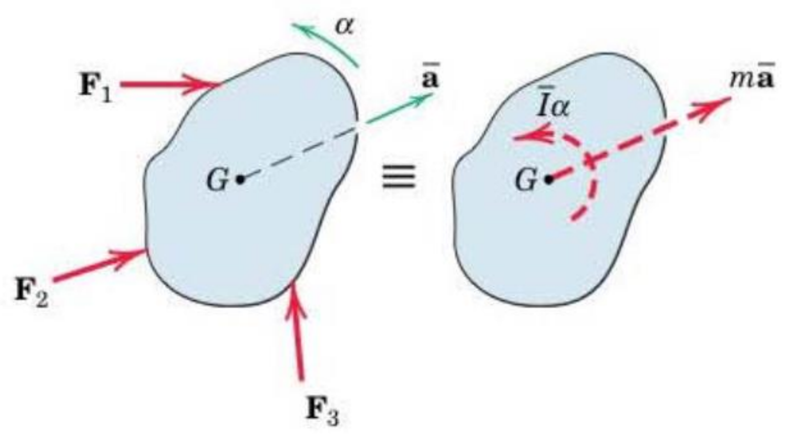
$$H_G = \underbrace{\sum m_i\,\rho_i^{\,2}}_{I_G}\,\omega$$



6. Kuvvet kütle ve ivme
Düzlemsel Hareketin Denklemleri

$$H_G = I_G\omega \Longrightarrow \sum M_G = \dot{H}_G = I_G\dot{\omega} = I_G\alpha$$

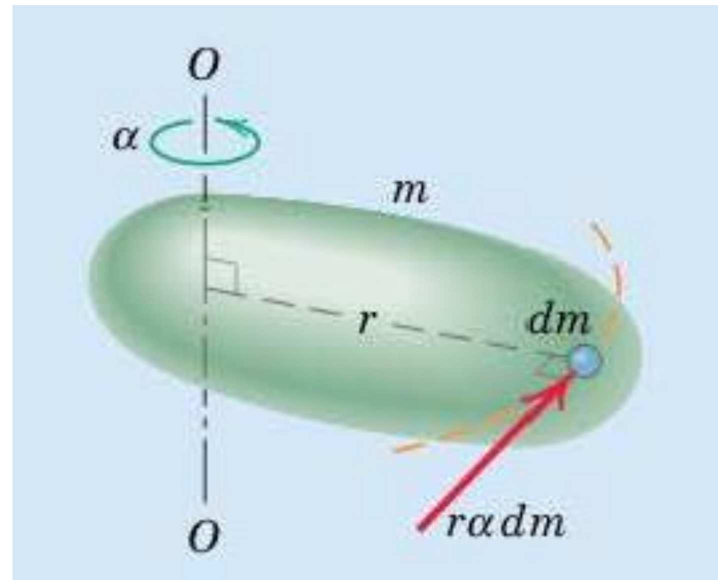
$$\boxed{\sum F = ma_G \; ve \sum M_G = I_G\alpha}$$



Kütle Atalet Momenti

OO' ekseninde α açısal ivmesi ile dönen cimi düşünelim.

Bu cismin dm kadar küçük bir parçasını ele alırsak, dm'e etkiyen kuvvet $r\alpha\mathrm{dm}$ şeklindedir. Bu kuvvetin OO' ekseni ile çakıştığı merkezde yaratacağı moment ise $\mathrm{r}^2\alpha\mathrm{dm}$ olur. İşte bu momenti tüm kütle için integre ettiğimizde cisme etkiyen atalet momentini elde ediyoruz.



$$\sum M_0 = \int \mathrm{r}^2\alpha\mathrm{dm} = \alpha \underbrace{\int \mathrm{r}^2\mathrm{dm}}_{Kütle\ Atalet\ momenti}$$

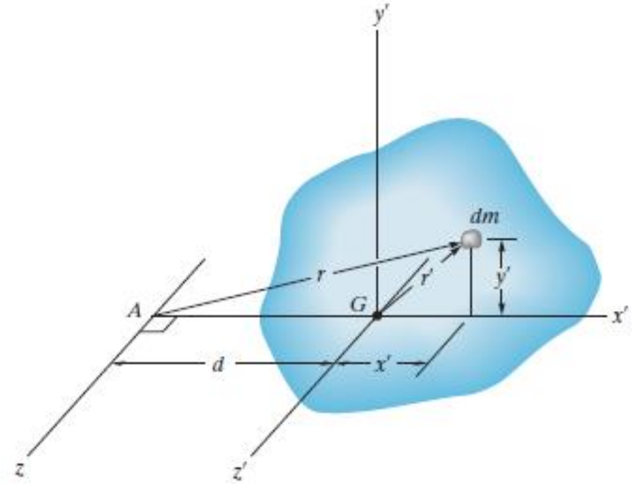
$$\sum M_0 = \alpha I = I\alpha$$

Kütle Atalet Momenti

Dönme Yarıçapı: (Radius of Gyration; Atalet yarıçapı; Jirasyon Yarıçapı)

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \text{ yada } I = k^2 m$$

Paralel Eksen Teoremi

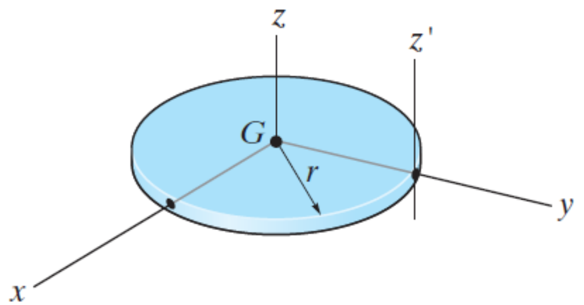


$$\mathrm{I} = \int_m r^2 dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2] dm = \int_m (x'^2 + y'^2 + 2dx' + d^2)\, dm$$

$$\mathrm{I} = \int_m r^2 dm = \int_m [x'^2 + y'^2] dm + \int_m d^2 dm + \int_m 2dx'\, dm$$

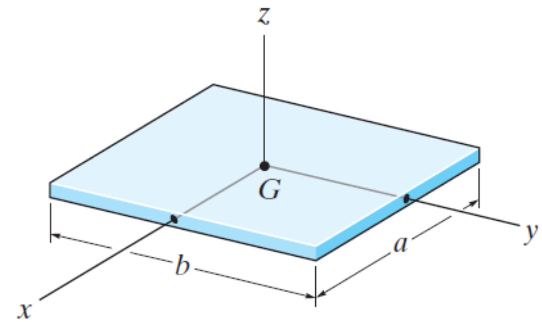
$$\mathrm{I} = \int_m r^2 dm = I_G + md^2$$

Problemlerde Sıklıkla Karşılaşacağımız Cisimlerin Kütle Atalet Momentleri



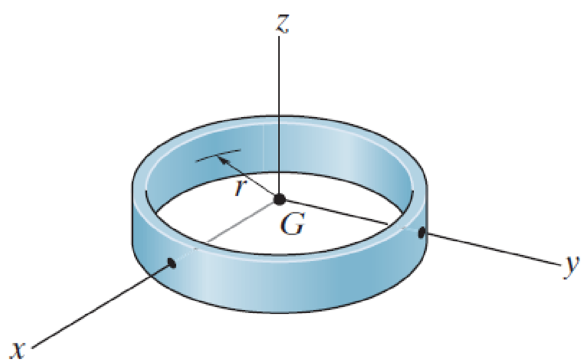
Thin Circular disk

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{z'z'} = \frac{3}{2}mr^2$$



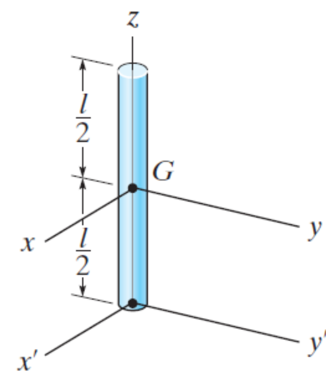
Thin plate

$$I_{xx} = \frac{1}{12}mb^2 \quad I_{yy} = \frac{1}{12}ma^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$



Thin ring

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{zz} = mr^2$$



Slender Rod

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2 \quad I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3}ml^2 \quad I_{z'z'} = 0$$

6. Kuvvet kütle ve ivme
Düzlemsel Hareketin Denklemleri

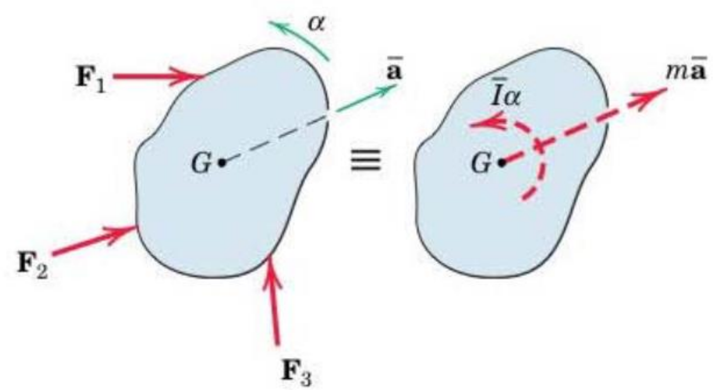
Eğrisel Koordinatlar;

$$\sum F = ma_G$$

$$\sum F_t = ma_t = m\rho_i\dot{\omega} = m\rho_i\alpha$$

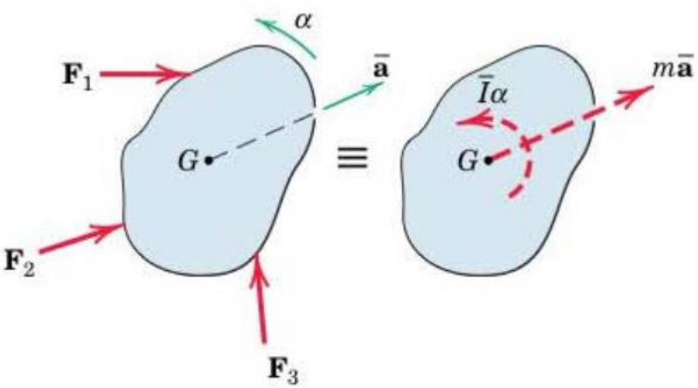
$$\sum F_n = ma_n = m\rho_i\omega^2$$

$$\sum M_G = I_G\alpha$$



6. Kuvvet kütle ve ivme
Düzlemsel Hareketin Denklemleri

Kartezyen Koordinatlar;



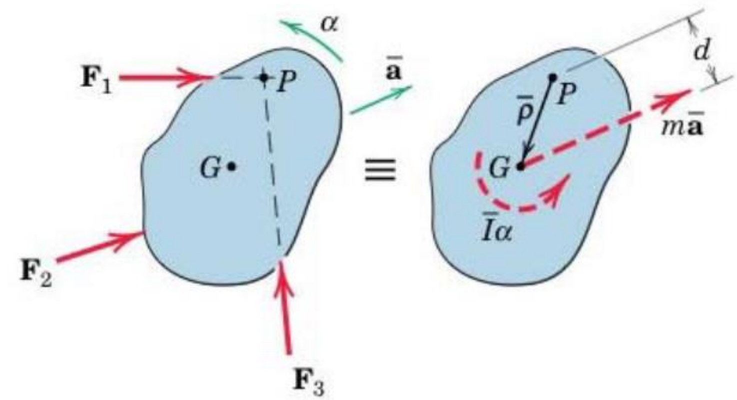
$$\sum F = ma_G \Rightarrow \sum F_x = ma_{Gx}; \sum F_y = ma_{Gy}; \sum F_z = ma_{Gz}$$

$$\sum M_G = I_G\alpha$$

6. Kuvvet kütle ve ivme Düzlemsel Hareketin Denklemleri

Alternatif Moment Denklem

$$\sum M_P = I_G\alpha + ma_G d$$



Eğer rijit cisim sabit bir O noktası etrafında dönüyorsa bu denklem

$$\sum M_o = I_o\alpha$$

Şeklini alır.

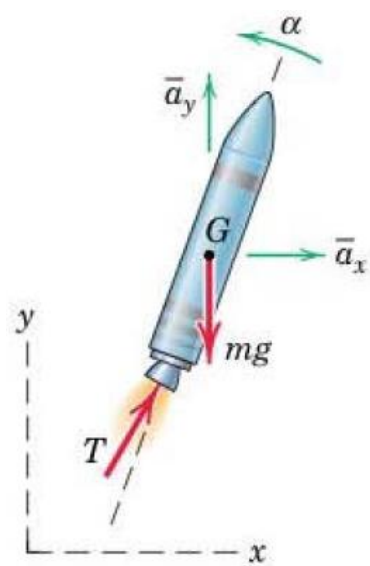
6. Kuvvet kütle ve ivme

Düzlemsel Hareketin Denklemleri

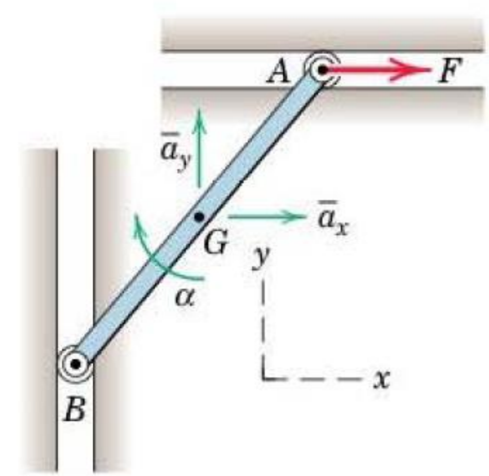
Bağımsız veya Bağımlı Rijit Cisim Hareketi

Bağımsızlık veya bağımlılık cismin hareketini engeleyen bir sınırlılığn olup olmamasına göre belirlenmektedir. Örneğin, roket bağımsız iken çubuk, hareketini sınırlayan yuvalar nedeniyle bağımlıdır.

$$\sum F = ma_G \; ve \sum M_G = I_G\alpha$$



Bağımsız

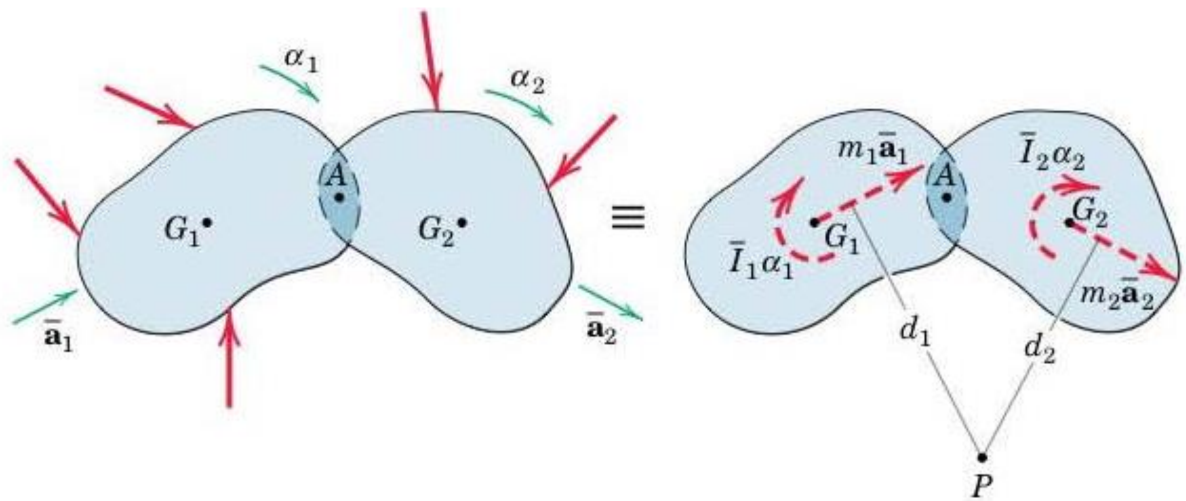


Bağımlı

6. Kuvvet kütle ve ivme

Düzlemsel Hareketin Denklemleri

Birbirine Bağlı Rijit Cisim Sistemleri



$$\sum F = ma_G \; ve \sum M_P = I_G\alpha + ma_G d$$

6. Kuvvet kütle ve ivme Öteleme

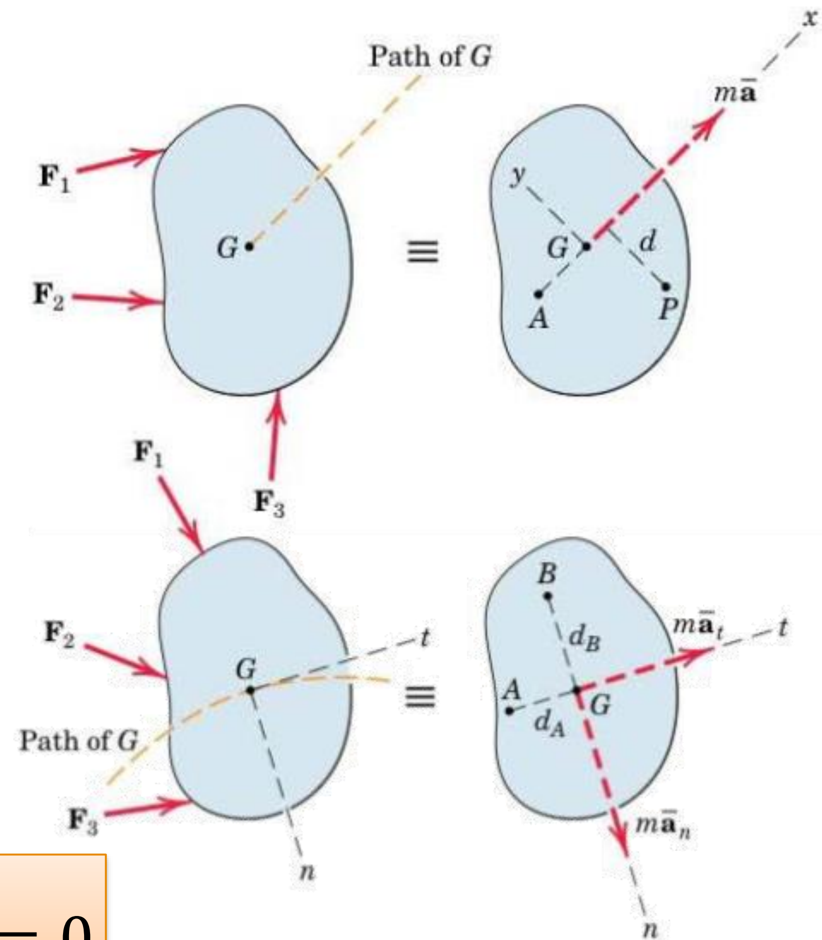
Öteleme yapan bir cismin her doğrusu daima paralel kalır. İkiye ayrılır.

- Doğrusal Öteleme
- Eğrisel Öteleme

Her iki durumda da ω ve α sıfıra eşittir.

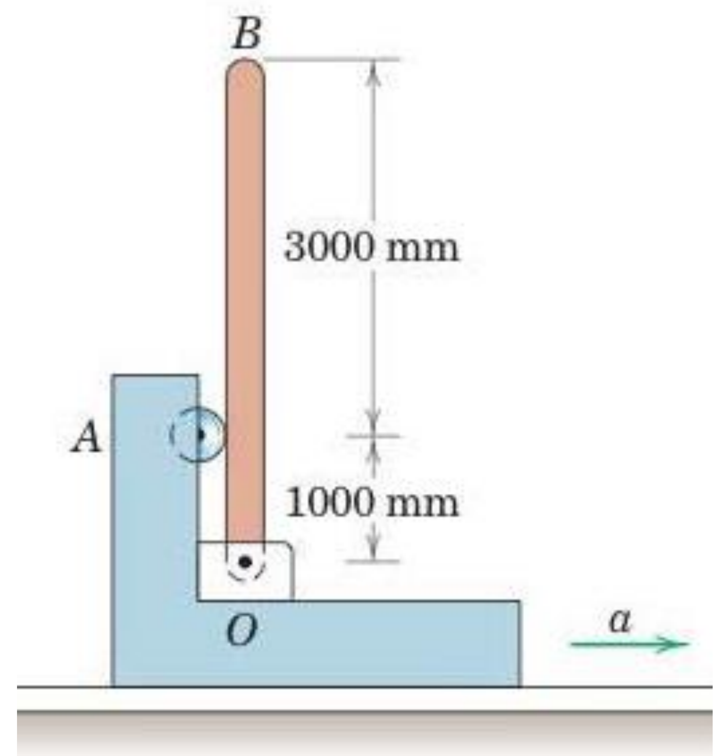
Bundan dolayı hareket denklemleri aşağıdaki şekilde ele alınır.

$$\sum F = ma_G \; ve \sum M_G = I_G \alpha = 0$$

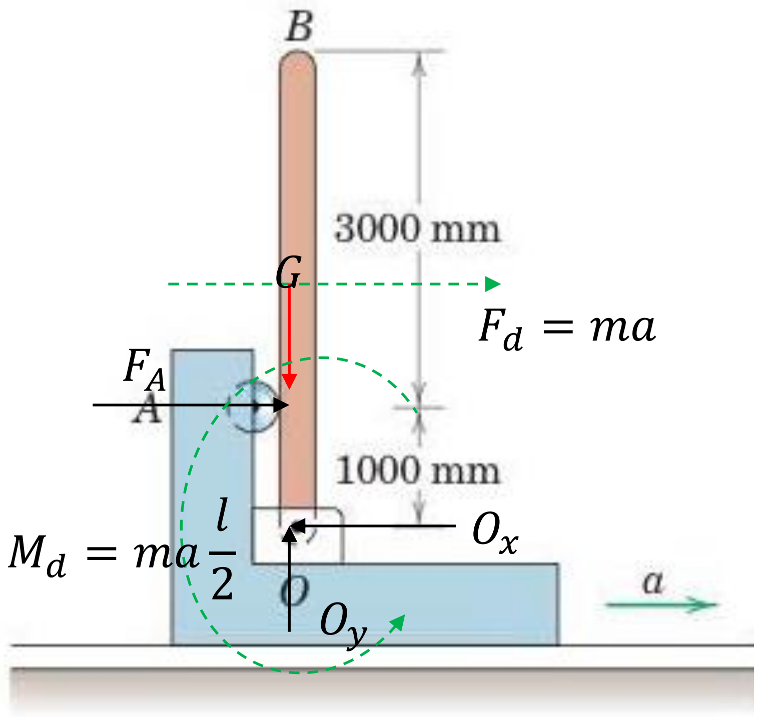


Örnekler

Örnek 1: Düzgün $30\ kg$ OB çubuğu O'daki mesnet ve A'daki tekerlek ile güvenli şekilde dik duracak şekilde ivmelenen çerçeve üzerine monte edilmiştir. Çerçevenin yatay ivmesi $a = 20\ m/s^2$ ise tekerleğe uygulanan FA kuvveti ile O'daki pime gelen kuvvetin $x-$ bileşenini hesaplayınız.



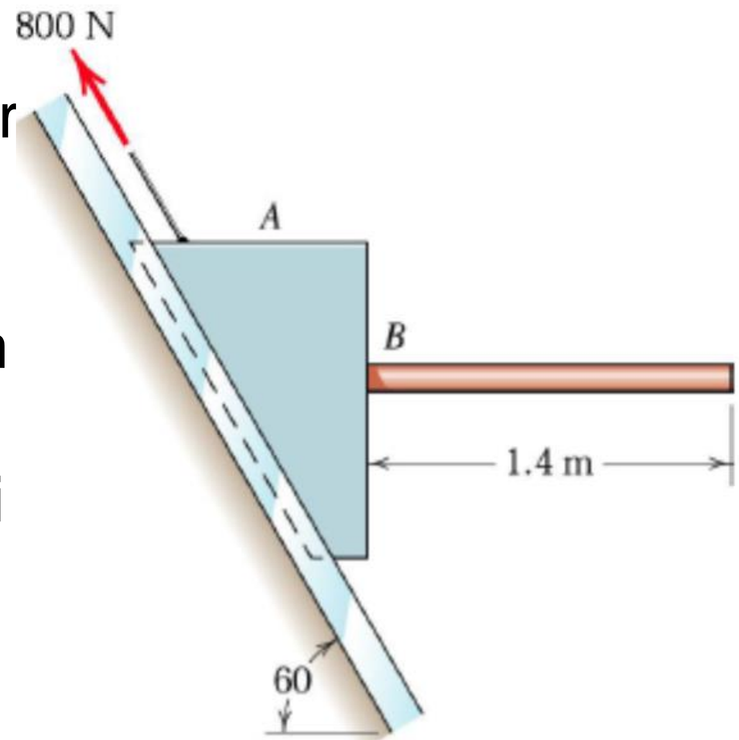
Örnekler



$$F_d = ma = 30\ kg\ * 20\frac{m}{s^2} = 600\ N$$
$$M_d = ma\frac{l}{2} = 600\ N * \frac{4}{2}\ m = 1200Nm$$
$$\sum M_0 = M_d - F_A * 1\ m = 0 \Longrightarrow F_A = 1200\ N$$
$$\sum F = ma \Longrightarrow F_A - O_x = ma \Longrightarrow O_x = 600\ N$$

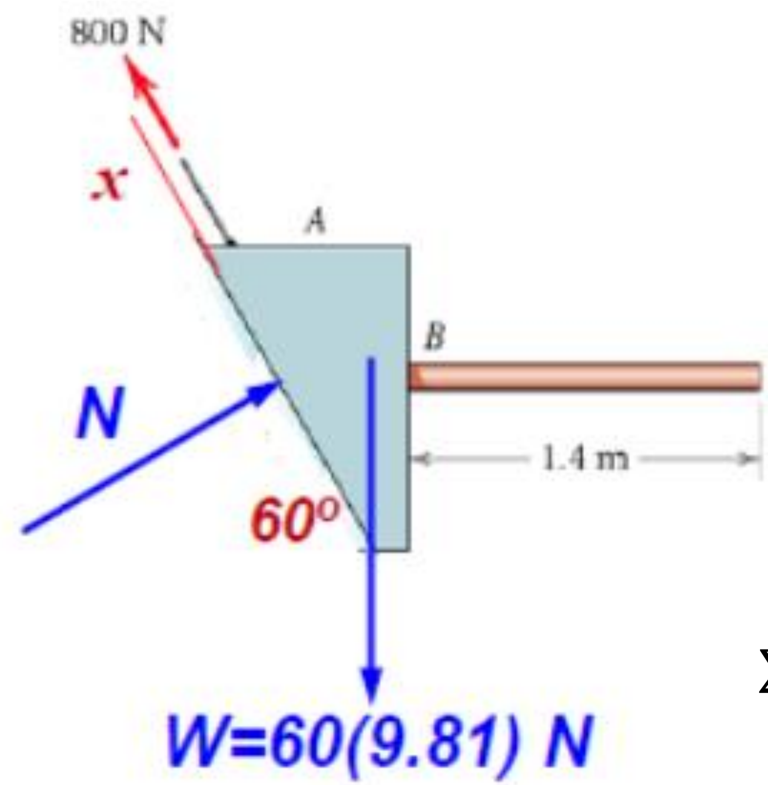
Örnekler

$\boldsymbol{Örnek\ 2}$: A bloğu ve ona bağlı çubuk toplam $60\ kg$ kütleye sahiptir ve $800\ N$'luk kuvvetin etkisi altında 60^o 'lik kılavuz boyunca hareket etmektedir. Düzgün yatay çubuğun kütlesi $20\ kg$ olup B noktasında bloğa kaynaklanmıştır. Kılavuzdaki sürtünme ihmal edilebilir. B noktasında kaynaktan çubuğa etkiyen M momentini hesaplayınız.

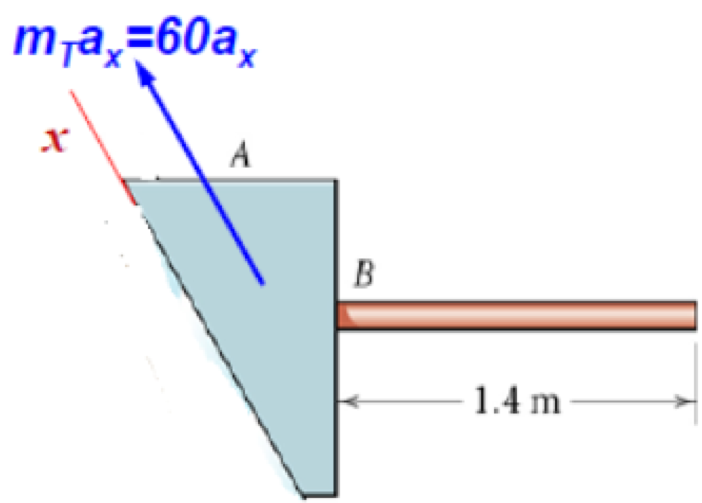


Örnekler

Serbest Cisim Diyagramı



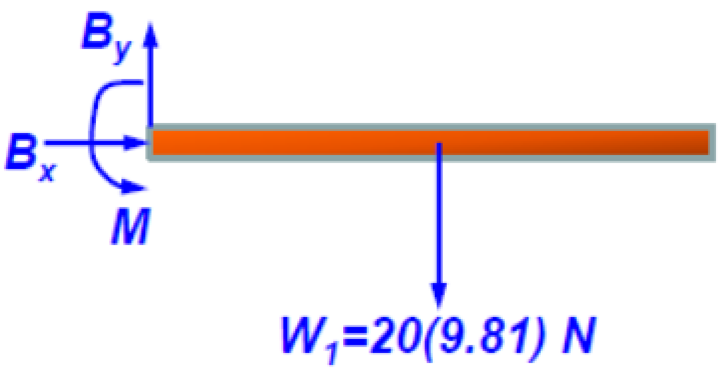
Kinetik Diyagram



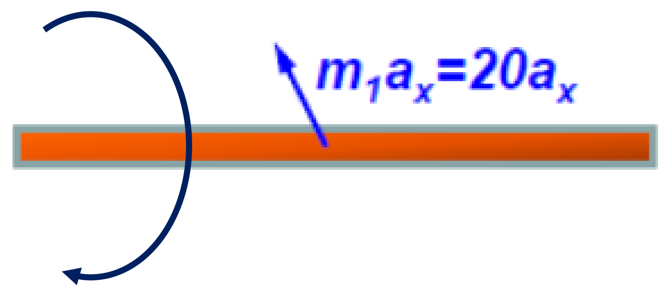
$$\sum F_x = 800\ N - 60 * 9.81 * sin60 = ma_x$$
$$a_x = 4.84\ m/s^2$$

Örnekler

Çubuğun SCD

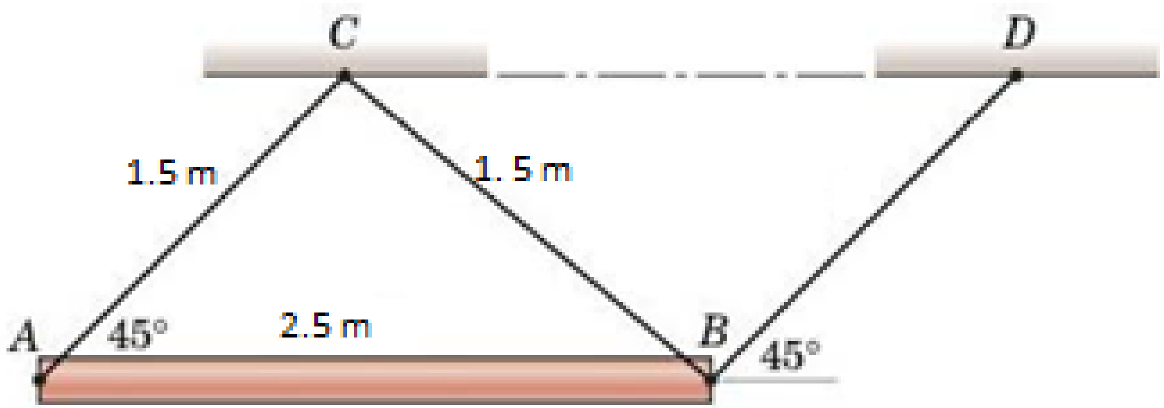


Çubuğun KD



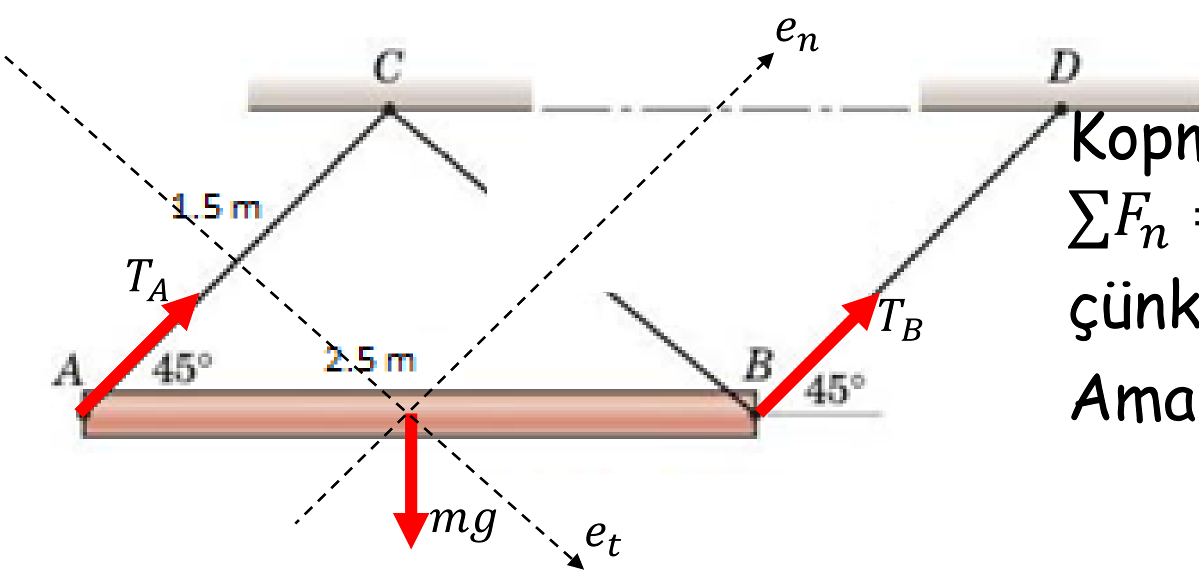
$$\sum M_B = 0 \Longrightarrow M - W * \frac{l}{2} - m_1 a_x * sin\theta * \frac{l}{2} = 0 \Longrightarrow M = 196\,Nm$$

Örnekler



Örnek 3: Şekilde görülen 100 kg kütleli kütük 3 kabloyla bağlıdır. CB kablosu aniden koparsa, kopmadan hemen sonra her bir kablodaki gerilme kuvvetini hesaplayınız.

Örnekler



Kopmadan hemen sonra

$\sum F_n = 0$

çünkü $v = 0; \omega = 0$

Ama $\sum F_t \neq 0$ çünkü $\alpha \neq 0$

$$\sum F_n = T_A + T_B - mgcos45 = 0$$

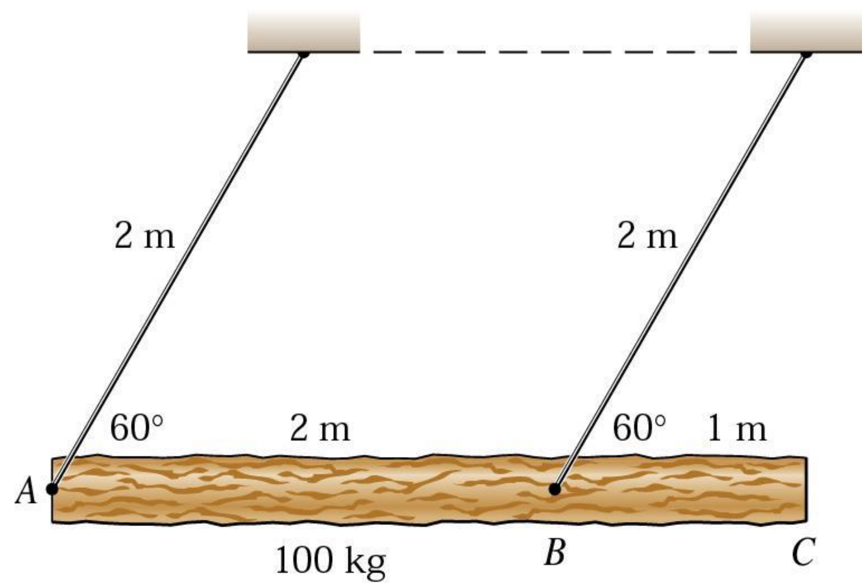
$$\sum F_t = ma_t \Longrightarrow mgsin45 = ma_t \Longrightarrow a_t = 6.94\frac{m}{s^2} \Longrightarrow \alpha = \frac{6.94}{1.5} = 4.62\, rad/s^2$$

$$\sum M_G = 0 \Longrightarrow -T_A sin45\frac{l}{2} + T_B sin45\frac{l}{2} = 0 \Longrightarrow T_A = T_B$$

$$\sum F_n = T_B + T_B - mgcos45 = 0 \Longrightarrow T_A = T_B = 347\ N$$

Örnekler

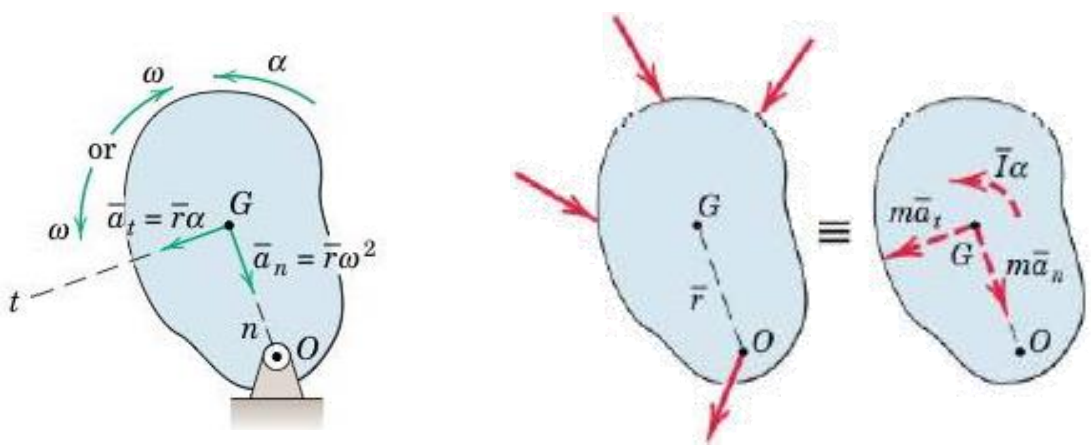
Yukarıdaki problemi, kütüğün bağlanma şekli, kütüğün uzunluğu, kabloların kütükle yaptığı açı değeri ve kablo uzunlukları değiştiğinde ele alarak yeniden çözünüz.



Sabit bir eksen etrafında dönme

Genel düzlemsel hareketin denklemleri burada da geçerlidir. Bunları yeniden yazarsak;

$$\sum F = ma_G \ ve \sum M_G = I_G \alpha$$



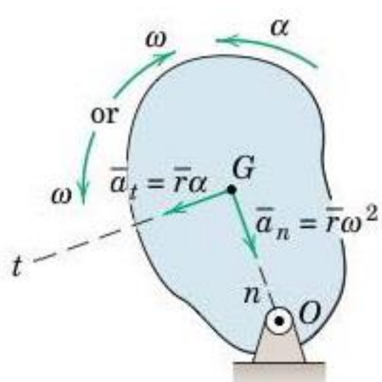
Sabit bir eksen etrafında dönme

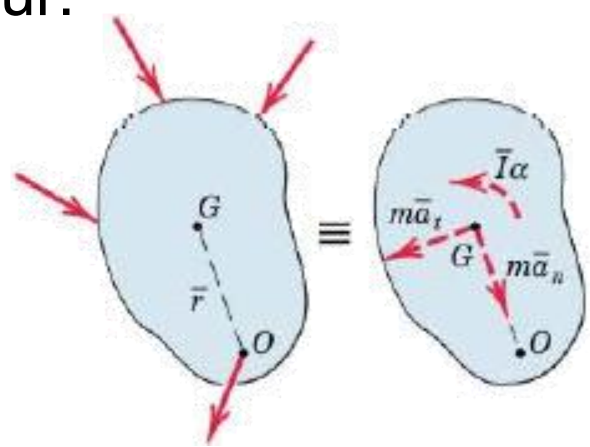
$$\sum F = ma_G \text{ ve } \sum M_G = I_G \alpha$$

İlk denklemin skaler bileşenleri

$\sum F_t = ma_t = mr\alpha$ ve $\sum F_n = ma_n = mr\omega^2$ dir.

Bu iki skaler bileşene ek moment eşitliği $\sum M_G = I_G \alpha$ yazılarak problemler çözülür.



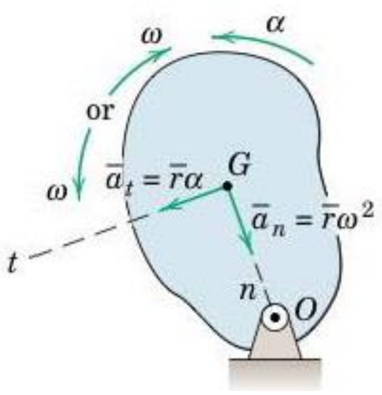


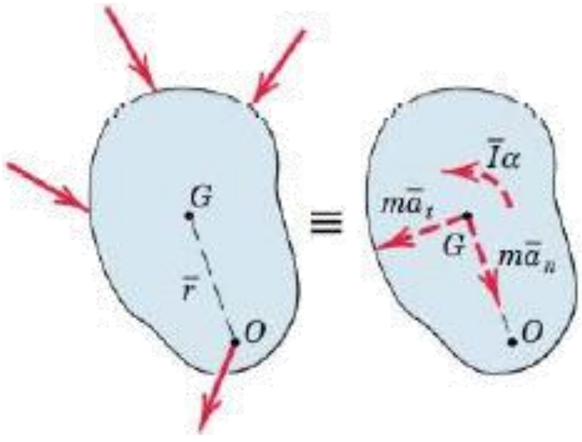
Sabit bir eksen etrafında dönme

Kartezyen Koordinatlarda ise;

$$\sum F = ma_G \Rightarrow \sum F_x = ma_{Gx}; \sum F_y = ma_{Gy}\ ; \sum M_G = I_G\alpha$$

Kullanılır.

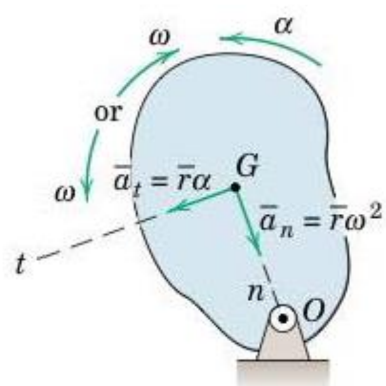


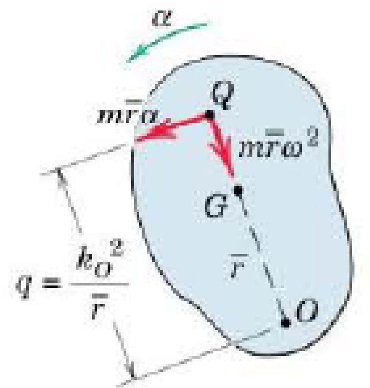


Sabit bir eksen etrafında dönme

Momenti **cismin merkezinden O noktasına** taşımak mümkündür. $\sum M_o = I_o \alpha$ şeklinde ifade edilebilir.

Paralel eksen teoremi kullanılarak I_0=$I_G + mr^2$ yazılabilmektedir.

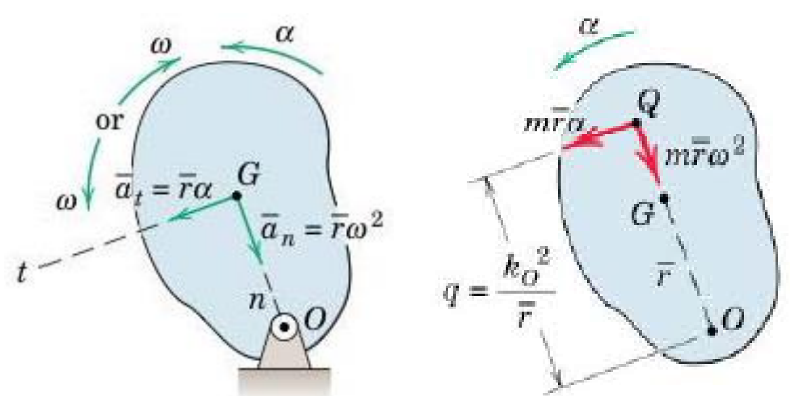




Sabit bir eksen etrafında dönme

Sabit bir eksen etrafında dönen sistemlerde, çarpma merkezi (center of percussion) denen ve cisme uygulanan tüm kuvvetlerin kesiştiği bir noktayı tanımlayan merkez belirlenerekte I_o bulunur.

Bu noktanın dönme merkezine uzaklığı $q = \frac{k_o^2}{r}$ şeklinde tanımlanır. I_0=$k_o^2 m$ şeklinde bulunur.

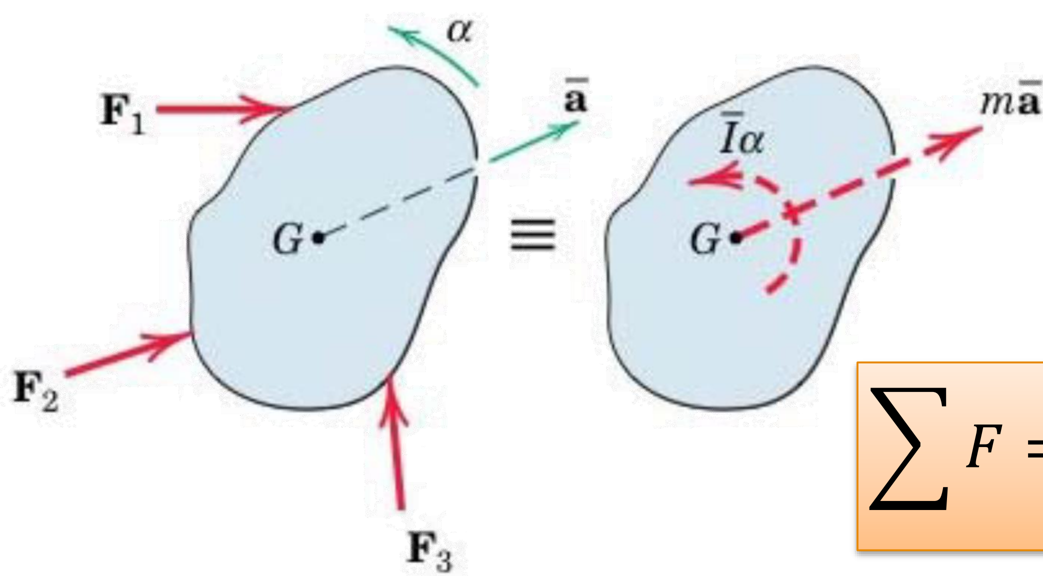


Genel Düzlemsel Hareket

Problemlerin çözümünde gerekli olabilecek herhangi bir P noktasına göre moment ise

$$\sum M_P = I_G \alpha + m a_G d$$

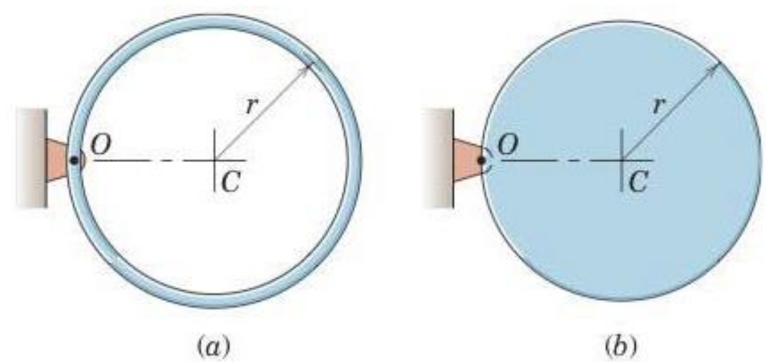
şeklinde bulunur.



$$\boxed{\sum F = m a_G \; ve \sum M_G = I_G \alpha}$$

Örnekler

Örnek 4: Yanda görülen eş kütleli iki farklı şekil, yatay pozisyondan serbest bırakılıyorlar. Cisimlerin açısal ivmelerini ve O noktasına etkiyecek reaksiyon kuvvetleri için genel bir fonksiyon bulunuz. Bulduğunuz fonksiyonları kullanarak cisimler şekilde görülen pozisyondan itibaren 90 derece döndüğünde reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.

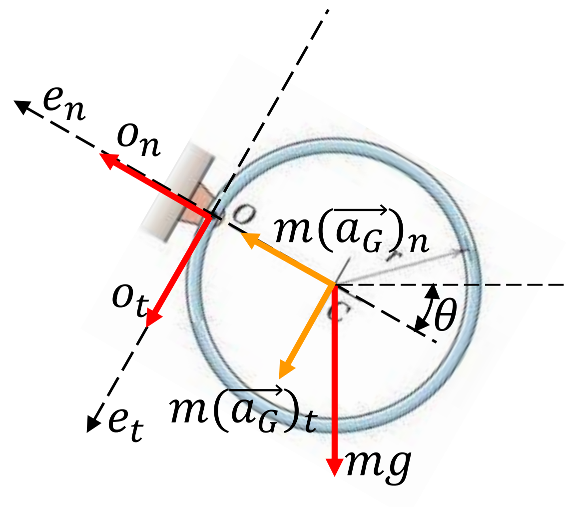


Örnekler

$$I_0 = I_G + mr^2 = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$$

$$\sum M_o = I_o \alpha$$

$$mgr\cos\theta = I_o\alpha = 2mr^2\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{g}{2r}\cos\theta$$



$$\omega d\omega = \alpha d\theta \Longrightarrow \left.\frac{\omega^2}{2}\right|_0^\omega = \frac{g}{2r}\int_0^\theta \cos\theta d\theta$$

$$\omega^2 = \frac{g}{r}\sin\theta$$

$$\sum F_t = ma_t = mr\alpha \Longrightarrow O_t + mg\cos\theta = mr\alpha$$

$$O_t + mg\cos\theta = mr\frac{g}{2r}\cos\theta \Longrightarrow \mathrm{O_t} = -\frac{1}{2}\mathrm{mg}\cos\theta$$

$$\sum F_n = ma_n = mr\omega^2 \Longrightarrow O_n - mg\sin\theta = mr\frac{g}{r}\sin\theta$$

$$O_n = 2mg\sin\theta$$

$$\theta = 90^0 \Longrightarrow \mathrm{O_t} = 0; O_n = 2mg$$

Örnekler

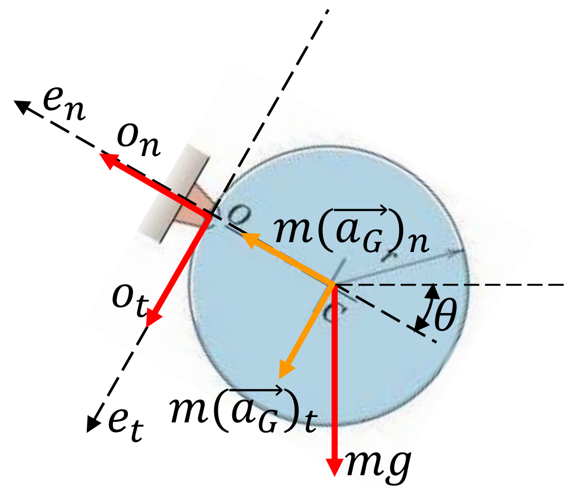
$$I_0 = I_G + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$\sum M_o = I_o\alpha$$

$$mgrcos\theta = I_o\alpha = \frac{3}{2}mr^2\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{r}cos\theta$$

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \Longrightarrow \left.\frac{\omega^2}{2}\right|_0^{\omega} = \frac{2}{3}\frac{g}{r}\int_0^{\theta} cos\theta d\theta$$

$$\omega^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{r}sin\theta$$



$$\sum F_t = ma_t = mr\alpha \Longrightarrow O_t + mgcos\theta = mr\alpha$$

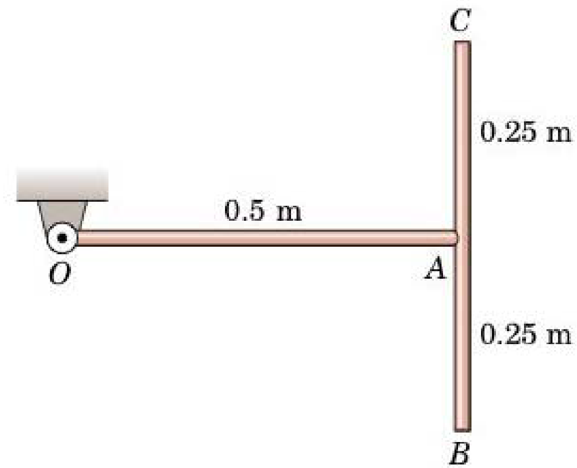
$$O_t + mgcos\theta = mr\frac{2}{3}\frac{g}{r}cos\theta \Longrightarrow \mathrm{O_t} = -\frac{1}{3}\mathrm{mgcos}\theta$$

$$\sum F_n = ma_n = mr\omega^2 \Longrightarrow O_n - mgsin\theta = mr\frac{4}{3}\frac{g}{r}sin\theta$$

$$O_n = \frac{7}{3}mgsin\theta; \theta = 90^0 \Longrightarrow \mathrm{O_t} = 0; O_n = \frac{7}{3}mg$$

Örnekler

Örnek 5: $8\ kg$ kütleli eş çubuklar şekildeki gibi kaynaklıdır. Görülen pozisyonda ω= $4\ rad/s$ ise O noktasındaki reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.



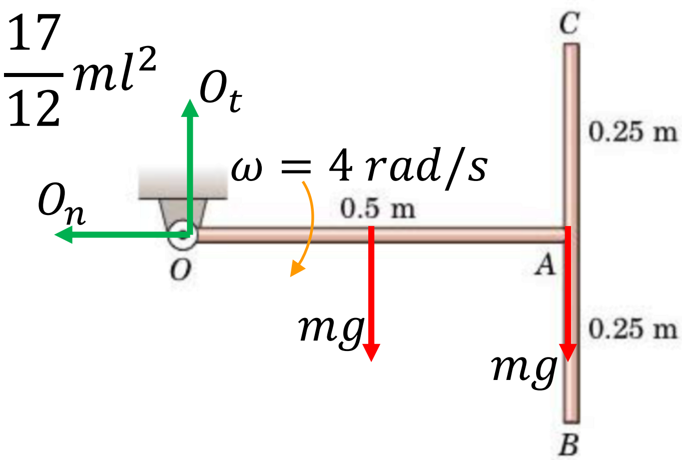
Örnekler

$$I_0 = (I_1)_o + (I_2)_o = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + ml^2 = \frac{17}{12}ml^2$$

$$\sum M_o = I_o\alpha$$

$$mgl + mg\frac{l}{2} = I_o\alpha = \frac{17}{12}ml^2\alpha$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{36}{34}\frac{g}{l} = 20.77\frac{rad}{s}$$

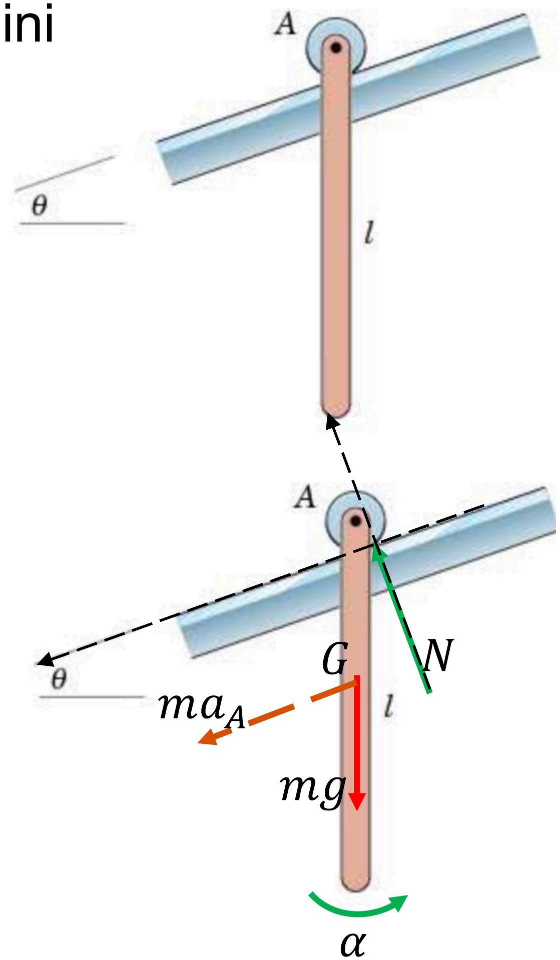


$$\sum F_t = ma_t = mr\alpha \Longrightarrow -O_t + 2mg = m\frac{l}{2}\alpha + ml\alpha \Longrightarrow \mathrm{O_t} = 32.34\ \mathrm{N}$$

$$\sum F_n = ma_n \Longrightarrow O_n = m\frac{l}{2}\omega^2 + ml\omega^2 \Longrightarrow O_n = 96\ N$$

Örnekler

Örnek 6: Şekilde görülen boyu l kütlesi m olan çubuk eğik düzlemde serbest bırakılıyor başlangıçtaki ivmesini bulunuz.



Çözüm

$$a_G = a_A + \left(a_{G/A}\right)_n + \left(a_{G/A}\right)_t$$

$$a_G = a_A + \left(a_{G/A}\right)_t = a_A - \frac{\alpha l}{2} cos\theta$$

$$\sum M_A = I_A \alpha$$

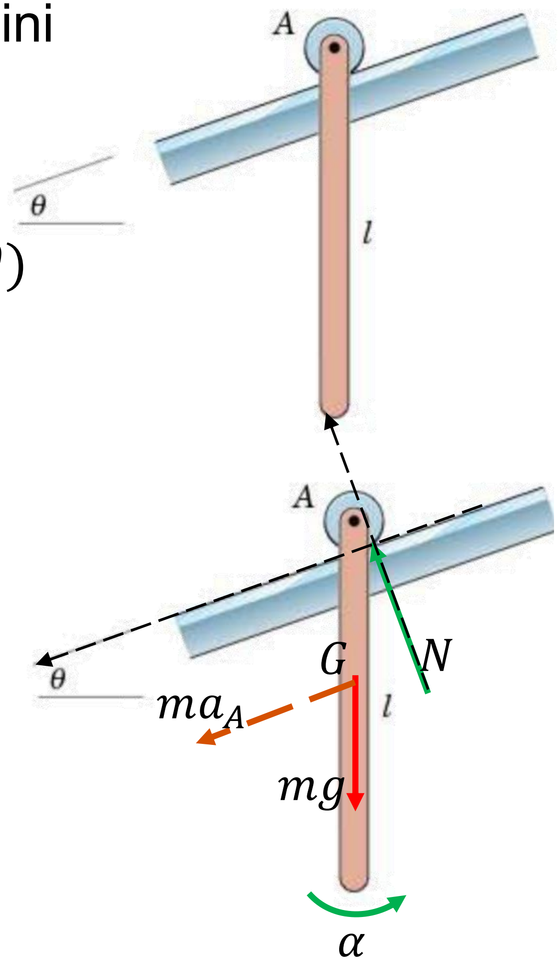
$$I_A = \frac{1}{3} m l^2$$

$$m a_A cos\theta \frac{l}{2} = \frac{1}{3} m l^2 \alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{2l} a_A cos\theta$$

Örnekler

Örnek 6: Şekilde görülen boyu l kütlesi m olan çubuk eğik düzlemde serbest bırakılıyor başlangıçtaki ivmesini bulunuz.



Çözüm

$$\sum F_G = mgsin\theta = ma_G = m(a_A - \frac{\alpha l}{2} cos\theta)$$

$$mgsin\theta = m(a_A - \frac{\frac{3}{2l} a_A cos\theta l cos\theta}{2})$$

$$gsin\theta = a_A \left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta\right)$$

$$a_A = \frac{gsin\theta}{\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta\right)}$$