Dinamik (MAK219)

2018-2019

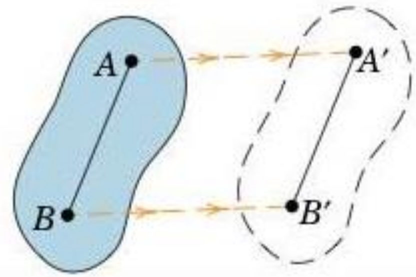
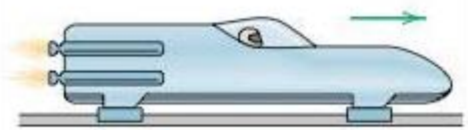
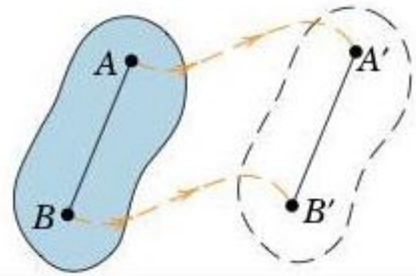
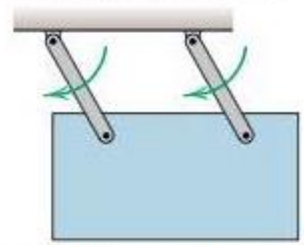
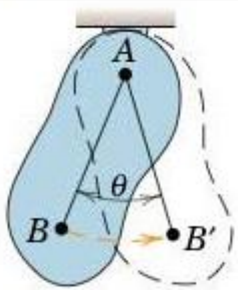
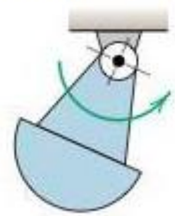
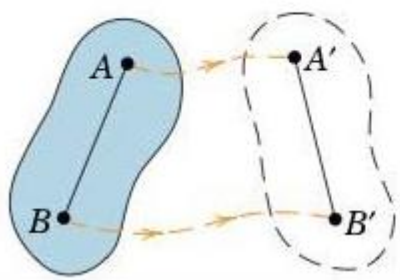
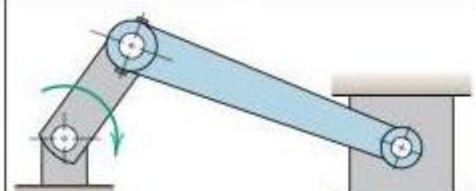
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü
Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Bölüm 5
Rigit Cisimlerin Düzlemsel Kinematiği

- Bundan önceki konularda önce parçacığın kinematiğini ardından da kinetiğini çalıştık.
- Şimdiki konumuz rigid cisimlerin kinematiğidir.
- **Rijit cisim:** üzerindeki iki nokta arasındaki mesafe zamanla değişmeyen cisim olarak tanımlanmaktadır.

Bölüm 5
Rigit Cisimlerin Düzlemsel Kinematiği

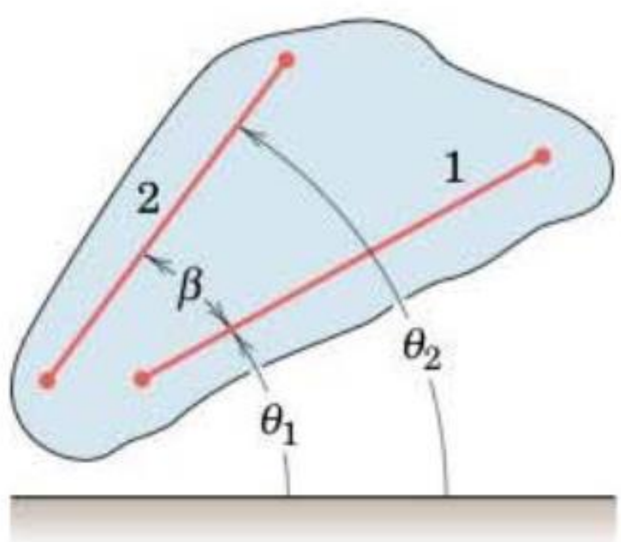
- Daha önce **parçacığın kinematik bağıntılarını** elde etmiştik. Aynı bağıntıları rijit cisimlerin düzlemsel kinematiğinde de kullanacağız, ama burada rijit cisimlerin **dönme hareketi** de göz önüne alınacaktır.
- **Bir rijit cisim düzlemsel hareket** ettiğinde onu oluşturan tüm **parçalar paralel düzlemlerde** hareket eder.

<table>
<tr><th colspan="2">Rijit-Cisim Düzlemsel Hareket Tipleri</th><th>Örnek</th></tr>
<tr><td>a.)
Doğrusal
Öteleme</td><td></td><td>
Roket Test Kızağı</td></tr>
<tr><td>b.)
Eğrisel
Öteleme</td><td></td><td>
İki-çubukta sallanan levha</td></tr>
<tr><td>c.)
Sabit bir
eksen
etrafında
dönme</td><td></td><td>
Bileşik Sarkaç</td></tr>
<tr><td>d.)
Genel
Düzlemsel
Hareket</td><td></td><td>
Krank-biyel mekanizması</td></tr>
</table>

Bir Rijit Cisim için Hareket Tipleri

- **Öteleme:** Rijit cismin hareketinde, her t anında rijit cismin **maddesel noktalarının hızları birbirine eşit ise** hareket ötelemedir. Hız **v = v(t)** şeklindedir. Noktaların yörüngeleri birbirlerine paraleldir.
- **Dönme:** rijit cisim bir OO’ ekseni üzerinde dönerken bu eksen üzerinde **tüm noktaların hızları sıfır** ise rijit cisim OO’ ekseni etrafinda dönme hareketi yapıyor denir. OO’ ekseni, **Dönme Ekseni** ismini alır.
- **Genel Düzlemsel Hareket: Dönme ve öteleme** hareketi ile aynı anda yapılıyorsa rijit cismin hareketine **Genel Düzlemsel Hareket** denir.

Dönme (Genel)



- Rijit cisimlerin **dönme hareketi** yaptıkları açısal hareket ile tanımlanır.

$$\theta_2 = \theta_1 + \beta$$
$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$$
$$\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$$

- Böylece, dönme hareketi sırasında, rijit cisim üzerindeki tüm noktaların açısal konumları, açısal hızları ve açısal ivmeleri aynı olur.

Dönme (Genel)

- Rijit cisimlerin açısal hızları ω ve açısal ivmeleri α ile gösterilir.

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = \omega$$
$$\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1 = \alpha$$

- rijit cisimlerin, açısal konumları, açısal hızları ve açısal ivmeleri ile ilgili tanımlar yandaki gibidir.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \;\; or \; \omega = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

$$\omega \mathrm{d}\omega = \alpha d\theta \text{ or} \dot{\theta} \mathrm{d}\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta$$

Dönme (Genel)

- Rijit cisimlerin dönme hareketi sırasındaki **kinematik ilişkileri**, **sabit açısal ivme** durumunda yukarıdaki denklerden türetilen yandaki ifadelerle bulunabilir.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

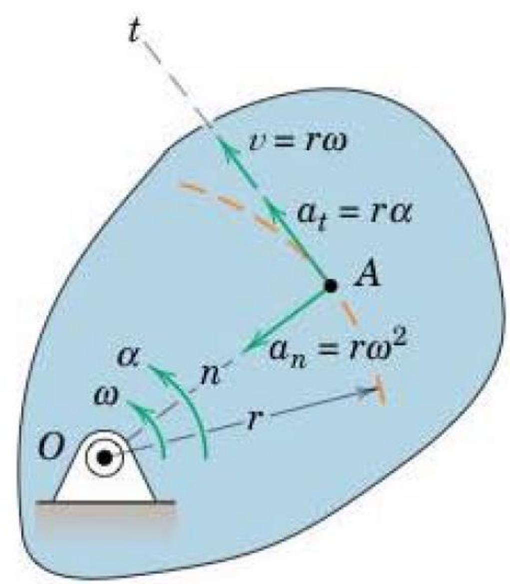
Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

Rijit cisimlerin sabit bir eksen etrafında dönme hareketi sırasında oluşan **doğrusal hız**, her hangi bir A noktasından dönme merkezine çizilecek **normale diktir**. **Teğetsel ivme** *hızla aynı doğrultuda* **normal ivme** ise *dönme merkezine* doğrudur. Sözü edilen kinematik ilişkilerin büyüklükleri yandaki gibi bulunabilir.

$$v = r\omega$$

$$a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\omega$$

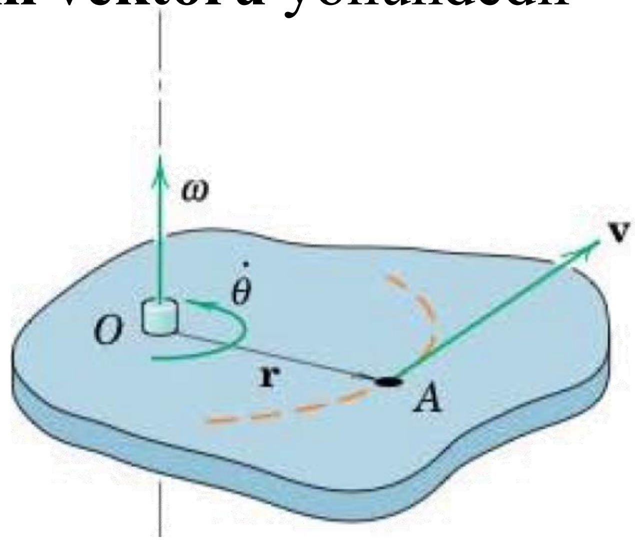
$$a_t = r\alpha$$

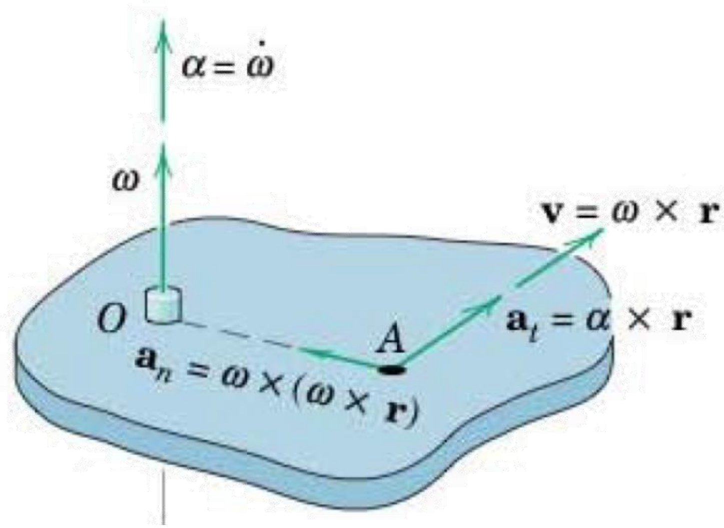


Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

Rijit cisimlerin sabit bir eksen etrafında dönme hareketi sırasında oluşan **doğrusal hız**, **teğetsel ivme** *ve* **normal ivme** vektörel olarak aşağıda, şekilde gösterildiği gibi bulunur. Şekilde açısal hız ve açısal ivme **k birim vektörü** yönündedir

$$v = \omega \times r$$
$$a_n = \omega \times \omega \times r$$
$$a_t = \alpha \times r$$





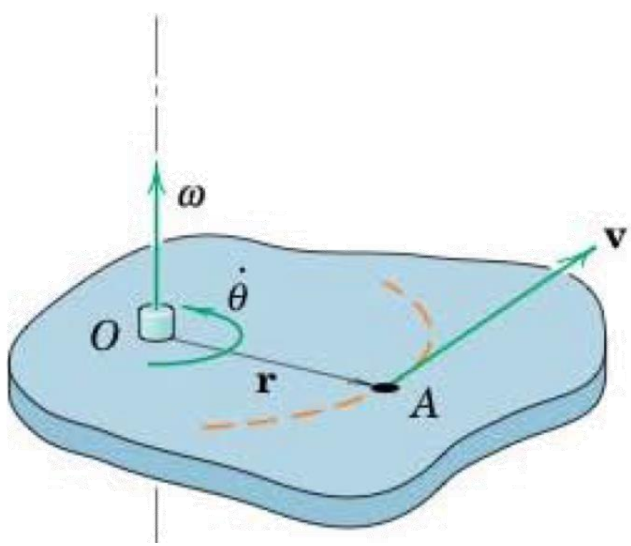
Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

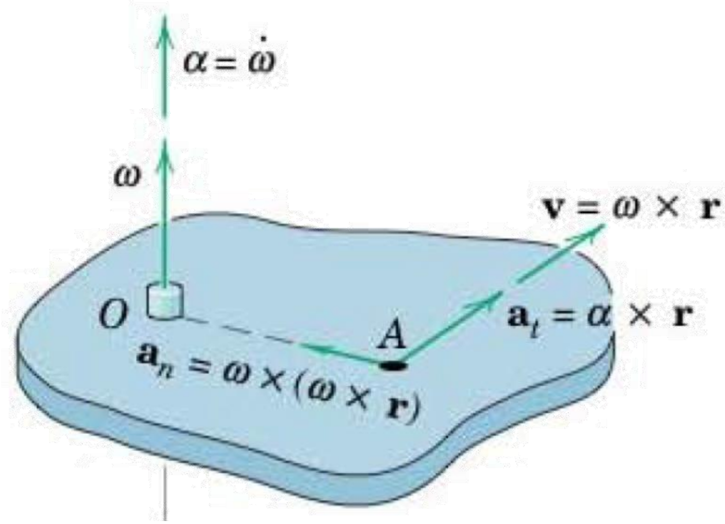
Not 1: Çapraz çarpımda çarpım sırası önemlidir. Çarpım sırası değişirse yön değişir.

$$v = \omega \times r$$
$$a_n = \omega \times \omega \times r$$
$$a_t = \alpha \times r$$

$$v = \dot{r} = \omega \times r$$

$$r \times \omega = -v$$



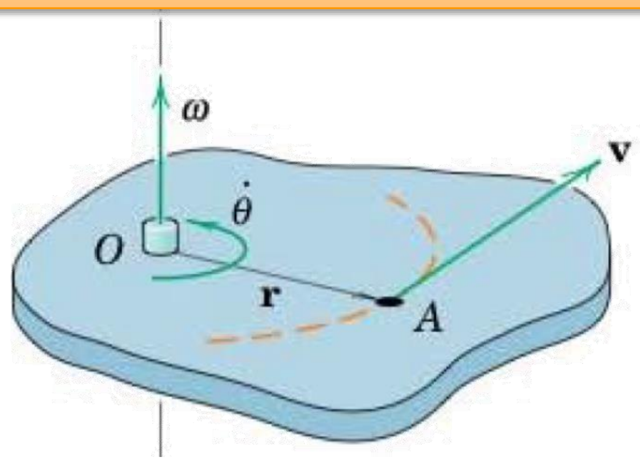


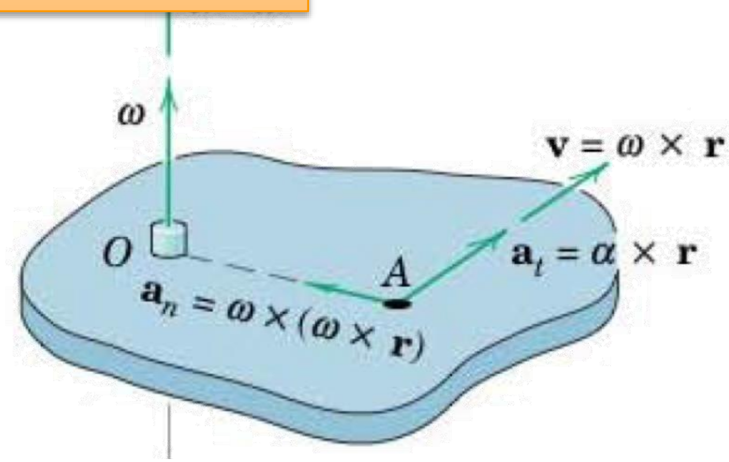
Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme

Not 2: İvme hızın türevinden türetildiğinde, aşağıdaki gibi normal ve teğetsel ivmeye ulaşılır.

$$v = \omega \times r$$
$$a_n = \omega \times \omega \times r$$
$$a_t = \alpha \times r$$

$$\begin{aligned} a = \dot{v} &= \omega \times \dot{r} + \dot{\omega} \times r \\ &= \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r \\ &= \omega \times v + \alpha \times r \end{aligned}$$





Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 1: Bir dişlinin açısal hızı $\omega = 12 - 3t^2$ ilişkisiyle kontrol edilmektedir. Burada açısal hız ω rad/s , saat yönü pozitif kabul edilmektedir ve zaman t saniyedir. Net açısal yer değiştirmeyi $(\Delta\theta), t = 0$ ve $t = 3$ s için bulunuz. Ayrıca 3 saniye boyunca dişlinin kaç devir döndüğünü (dönüş yönü farketmeksizin) hesaplayınız.

Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 1 Çözüm:

$$\Delta\theta = \int_0^3 (12 - 3t^2)dt = 12t - t^3 \Big|_0^3 = 9\, rad$$

$$12 - 3t^2 = 0 \Longrightarrow t = 2\, s. sonunda\ yön\ değiştirir.$$

$$\theta_1 = \int_0^2 (12 - 3t^2)dt = 12t - t^3 \Big|_0^2 = 16\, rad$$

$$\theta_2 = \int_2^3 (12 - 3t^2)dt = 12t - t^3 \Big|_2^3 = 9 - 16 = -7\, rad$$

Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 1 Çözüm:

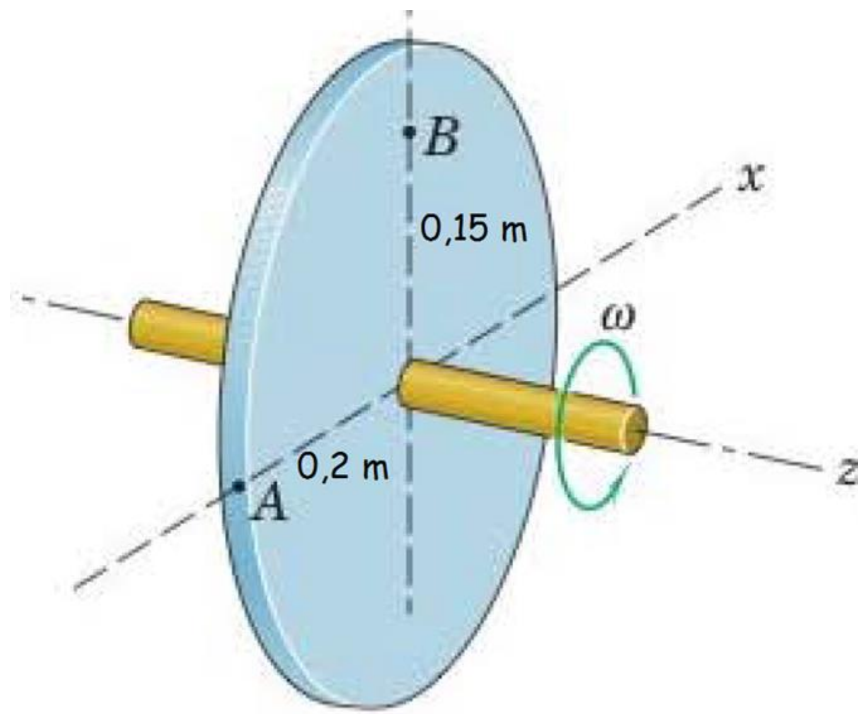
$\theta_1 = 16\,rad, \theta_2 = -7\,rad \Longrightarrow \sum\theta = |\theta_1| + |\theta_2| = 23\,rad$

Bir devir $2\pi\,rad$. olduğuna göre; 3 saniye süresince,

$$N = \frac{23\,rad}{2\pi\,rad} = 3.6606\,devir$$

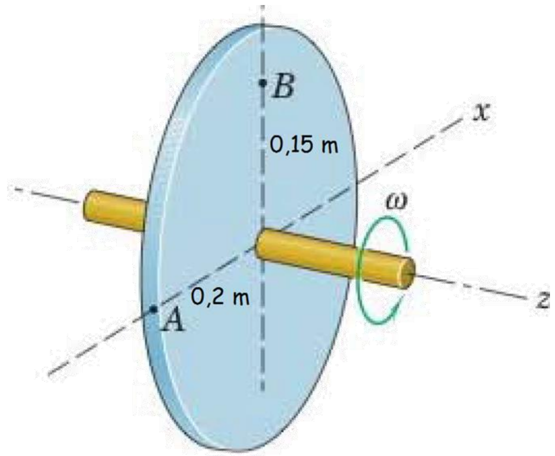
Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 2: Bir an için A noktasının hızı $V_A = 3\ m/s$ ve bu hız saniyede 7.2 m/s'lik bir oranla azalmaktadır. Bu sırada B noktasının açısal ve doğrusal ivmesini bulunuz.



Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 2 Çözüm:



$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{3}{0.2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 15\mathrm{k}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$\alpha = \frac{a}{r} = -\frac{7.2}{0.2} = -36k\, m/s^2$$

B noktasının doğrusal ivmesi

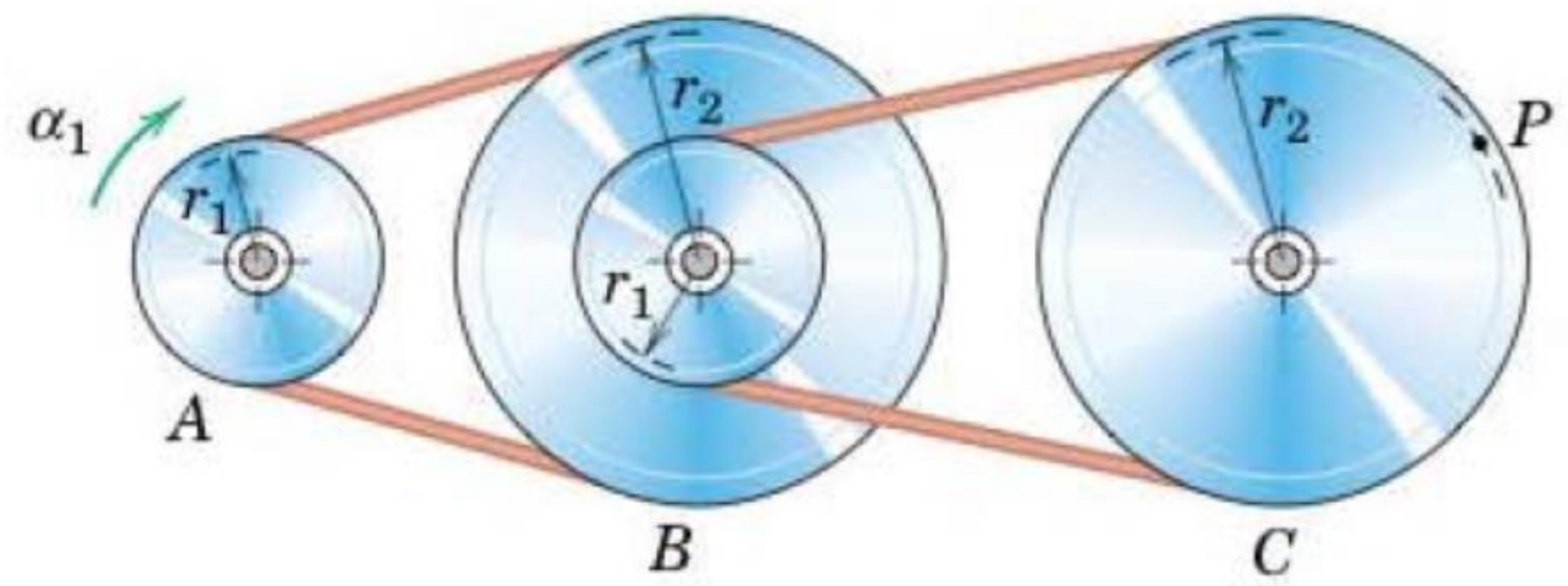
$$a_n = \omega \times \omega \times r = 15k \times 15k \times 0.15j = -33{,}75j$$

$$a_t = \alpha \times r = -36k \times 0.15j = 5.4i$$

$$a_B = 5.4i - 33.75j$$

Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 3: Şekilde verilen büyüklüklere göre C kasnağının açısal hızını ve P noktasının ivmelerini zamana bağlı fonksiyonlar olarak belirleyiniz.



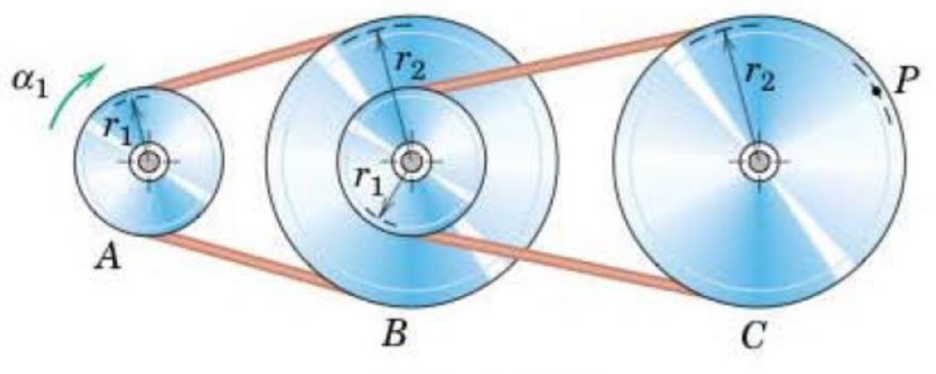
Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 3 Çözüm:

$$\int_0^{\omega_1} d\omega = \alpha_1 \int_0^{t} dt \Longrightarrow \omega_1 = \alpha_1 t$$

$$\omega_1 r_1 = \omega_B r_2 \Longrightarrow \omega_B = \omega_1 \frac{r_1}{r_2};$$

$$\omega_B r_1 = \omega_C r_2 \Longrightarrow \omega_C = \omega_B \frac{r_1}{r_2} = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \alpha_1 t$$



Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 3 Çözüm Devam:

$$\omega_C = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \alpha_1 t$$

$$\alpha_1 r_1 = \alpha_B r_2 \Longrightarrow \alpha_B = \alpha_1 \frac{r_1}{r_2};$$

$$\alpha_B r_1 = \alpha_C r_2 \Longrightarrow \alpha_C = \alpha_B \frac{r_1}{r_2} = \alpha_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

P noktasının doğrusal ivmesi

$$a_n = \omega \times \omega \times r = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \alpha_1 t \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \alpha_1 t \times r_2 = \frac{(r_1)^4}{(r_2)^3} \alpha_1^2 t^2$$

$$a_t = \alpha \times r = \alpha_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \times r_2 = \alpha_1 \frac{(r_1)^2}{r_2}$$

Dönme Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 3 Çözüm Devam:

P noktasının doğrusal ivmesi

$$a_n = \frac{(r_1)^4}{(r_2)^3}\alpha_1^2 t^2\,;\, a_t = \alpha_1 \frac{(r_1)^2}{r_2}$$

$$a = \alpha_1 \frac{(r_1)^2}{r_2}\sqrt{1 + \alpha_1^4\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 t^2}$$

Mutlak Hareket

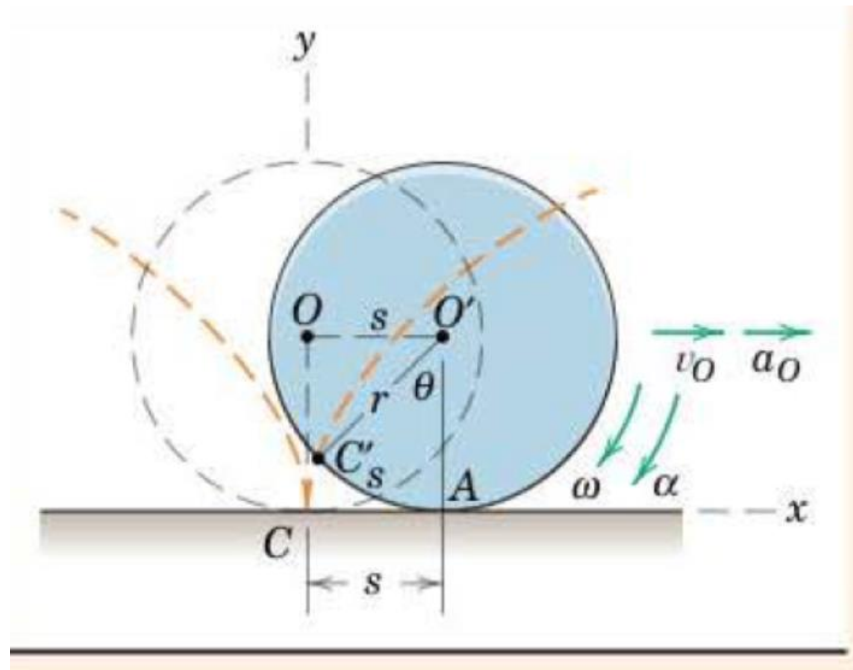
Rijit cisimlerin düzlemsel kinematik analizini bu bölümde inceleyeceğiz.

İlgili rijit cismin konumunun geometrik bağıntılarını kullanıp burada zamana göre türevlerini alıp hız ve ivmeyi elde edeceğiz.

Mutlak Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 4 :

R yarıçaplı bir teker düz bir zemin üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Tekerin açısal hız ve ivmesini bulunuz. Ayrıca tekerin temas yüzeyinde bir noktanın kinematik ilişkilerini çıkarınız.

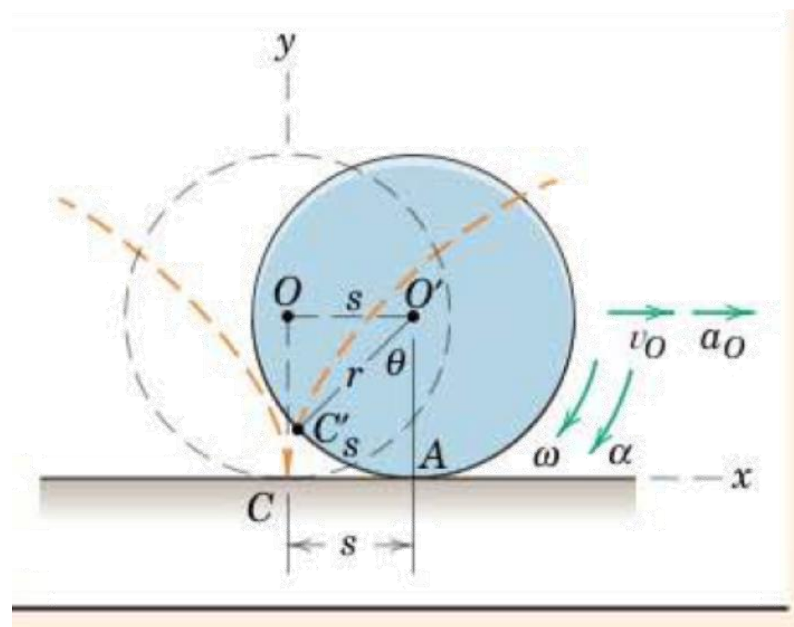


Mutlak Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 4 Çözüm:

Teker kesik çizgi ile gösterilen pozisyondan, mavi renkli gösterilen pozisyona kaymadan dönerek ilerlerken O merkezi O'. C' C noktasında iken dönmeye başlayan tekerin merkezinin aldığı yol s olduğunda $C'A$ yayının uzunluğuda s olmalıdır. O halde aşağıdaki ilişkiler yazılabilir.

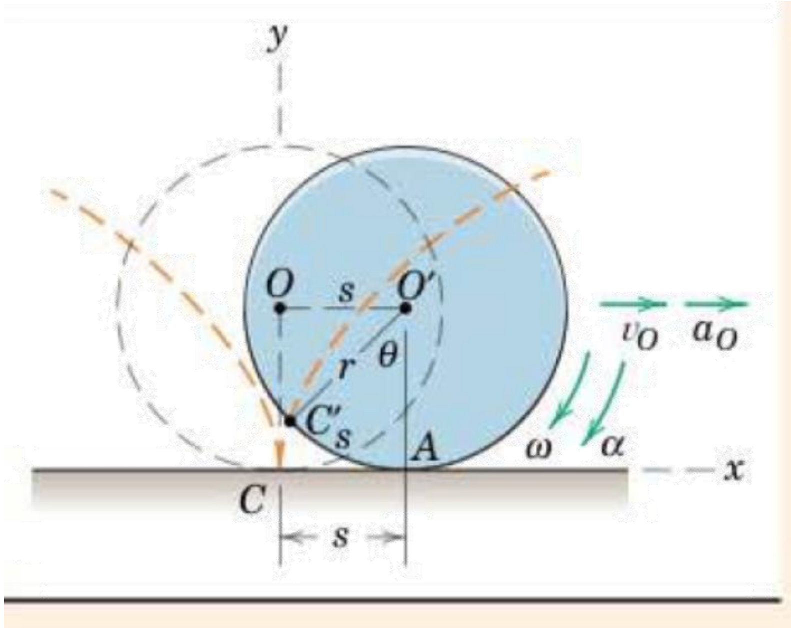
$$s = r\theta;$$
$$v_0 = r\dot{\theta} = r\omega;$$
$$a_0 = r\ddot{\theta} = r\alpha;$$



Mutlak Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 4 Çözüm:

C' noktasının konum hız ve ivmesi.



$$x = s - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta); \qquad y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta);$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1 - \cos\theta) = v_0(1 - \cos\theta); \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta = v_0\sin\theta$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + r\dot{\theta}^2\sin\theta; \qquad \ddot{y} = r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\ddot{x} = a_0(1 - \cos\theta) + r\omega^2\sin\theta; \qquad \ddot{y} = a_0\sin\theta + r\omega^2\cos\theta$$

Mutlak Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

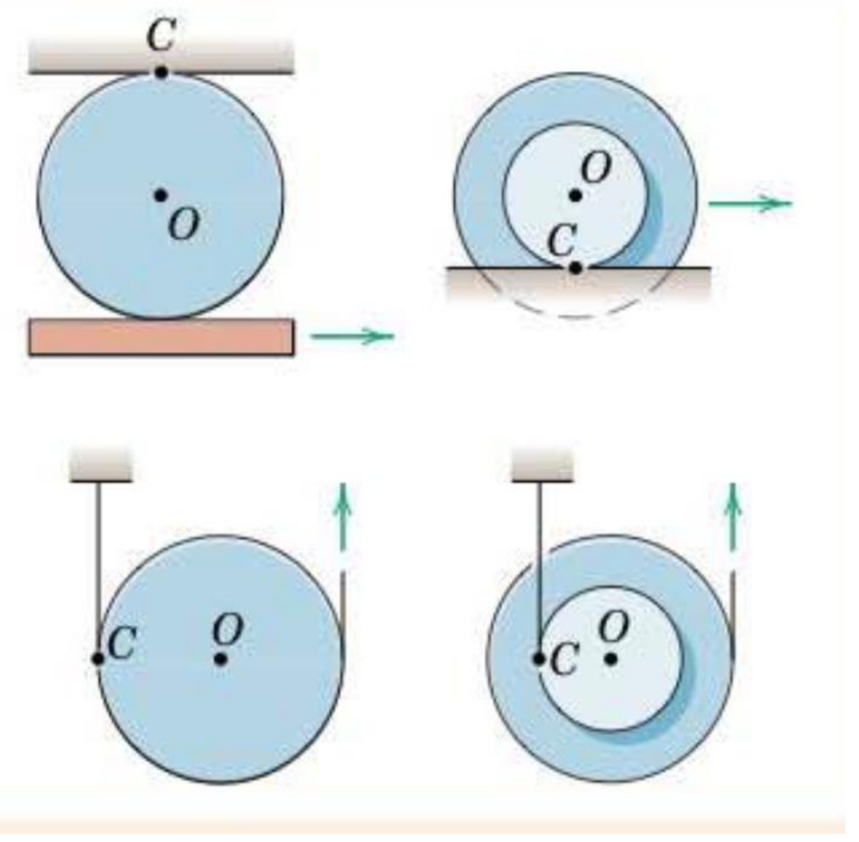
Örnek 4 Çözüm Devam:

$$s = r\theta;$$

$$v_0 = r\dot{\theta} = r\omega;$$

$$a_0 = r\ddot{\theta} = r\alpha;$$

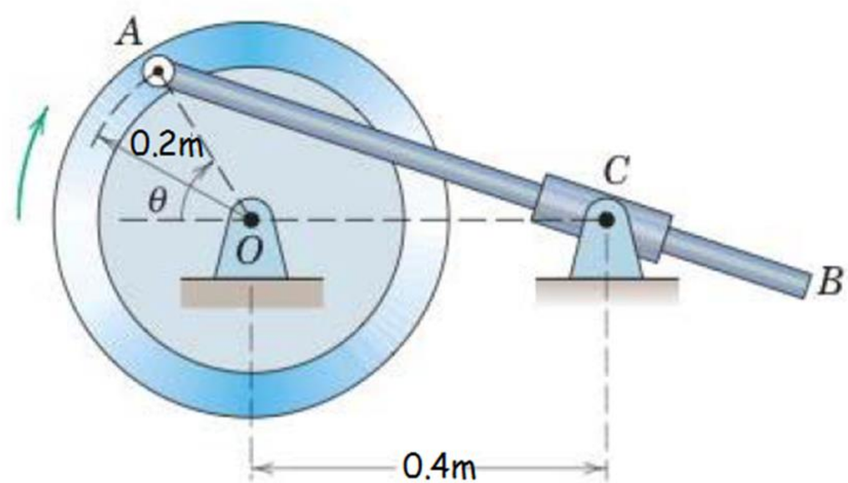
İlişkileri kullanılarak yuvarlanan tekerle ilgili yanda gösterilen farklı tipteki problemler çözülebilmektedir.



Mutlak Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 5 :

Kasnak $\omega = 600$ rpm ile dönmektedir.$\theta = 60°$iken AB çubuğunun açısal hızını devir/dakika(rpm) cinsinden bulunuz.



Mutlak Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 5 Çözüm:

Sinüs kuralına göre;

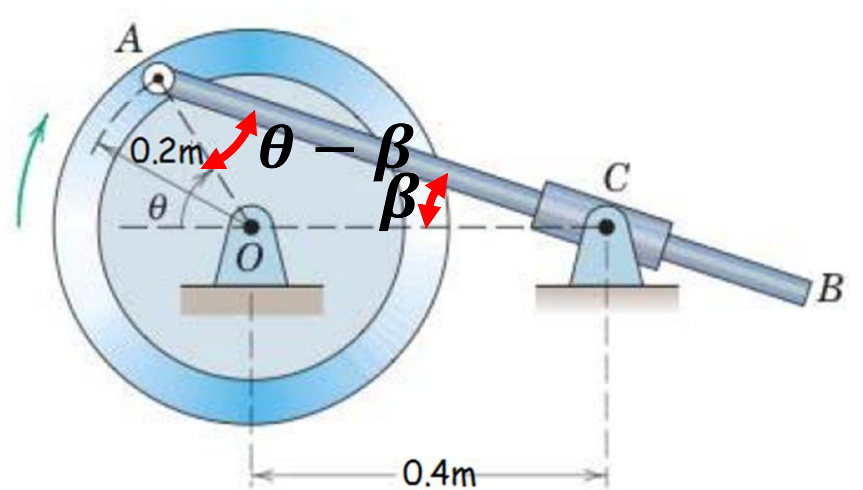
$$\frac{0.2}{\sin\beta} = \frac{0.4}{\sin(\theta-\beta)}$$

$$0.2\sin(\theta-\beta) = 0.4\sin\beta$$

$$(\dot{\theta}-\dot{\beta})0.2\cos(\theta-\beta) = 0.4\dot{\beta}\cos\beta$$

$$\frac{\dot{\theta}0.2\cos(\theta-\beta)}{0.4\cos\beta + 0.2\cos(\theta-\beta)} = \dot{\beta}$$

$$tan\beta = \frac{0.2sin\theta}{0.4+0.2cos\theta} \Rightarrow \beta = 19.10^0$$



Mutlak Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 5 Çözüm Devam:

$$\frac{\dot{\theta}0.2\cos(\theta-\beta)}{0.4\cos\beta+0.2\cos(\theta-\beta)}=\dot{\beta}$$

$$\frac{600*0.2\cos(40.90)}{0.4\cos 19.10+0.2\cos(40.90)}=\dot{\beta}=428.53\,\frac{dev}{dak}.$$

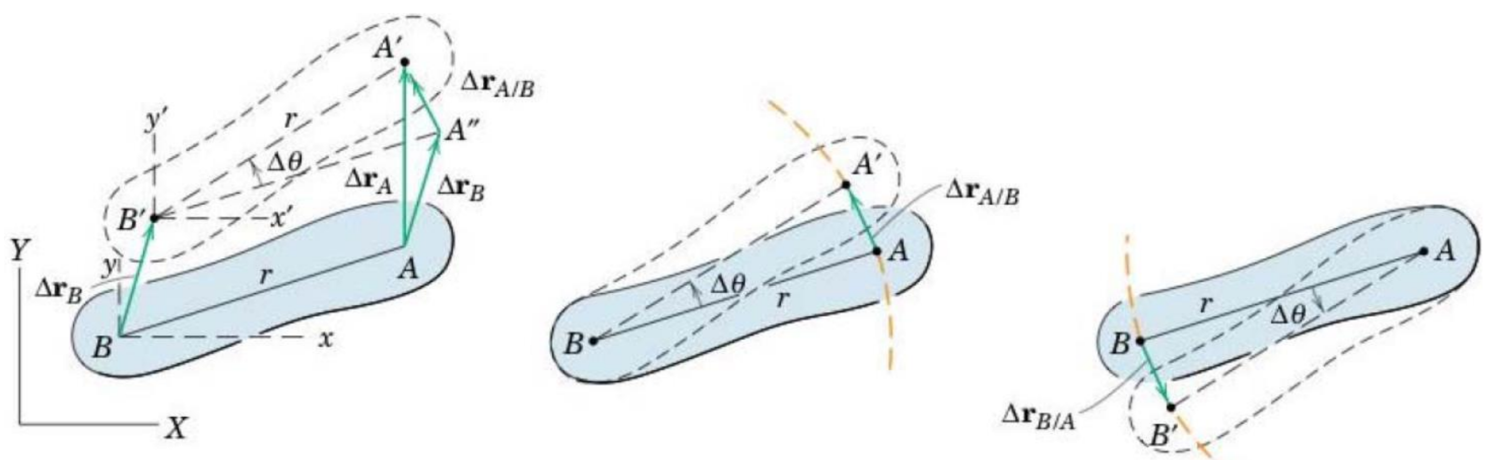
Bağıl Hareket

Rijit cismin AB doğrultusu Δt zamanında A'B' konumuna hareket etsin. Bu hareket:

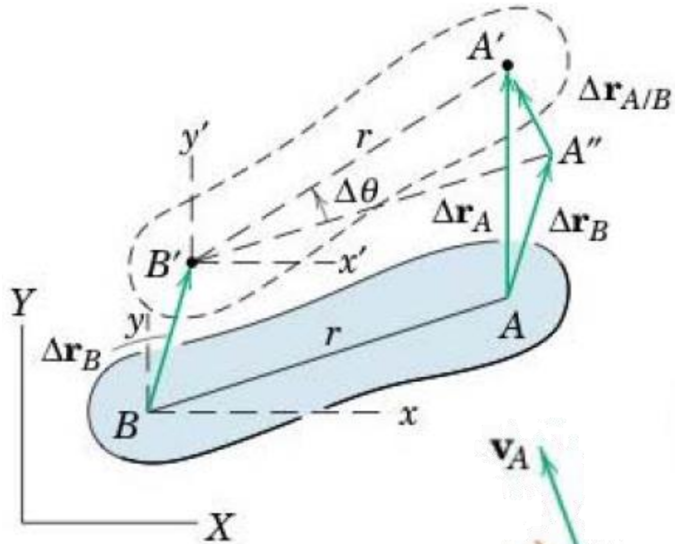
a) AB nin B'A" ya ötelenmesi (Δr_B kadar)

b) B' etrafında $\Delta\theta$ kadar dönme hareketinin

Toplamı olarak düşünülebilir. Hareket düzlemseldir. Yer değiştirmesi ise $\Delta r_{A/B}$ dir. Şekil (a)'da görülmektedir.



Bağıl Hareket

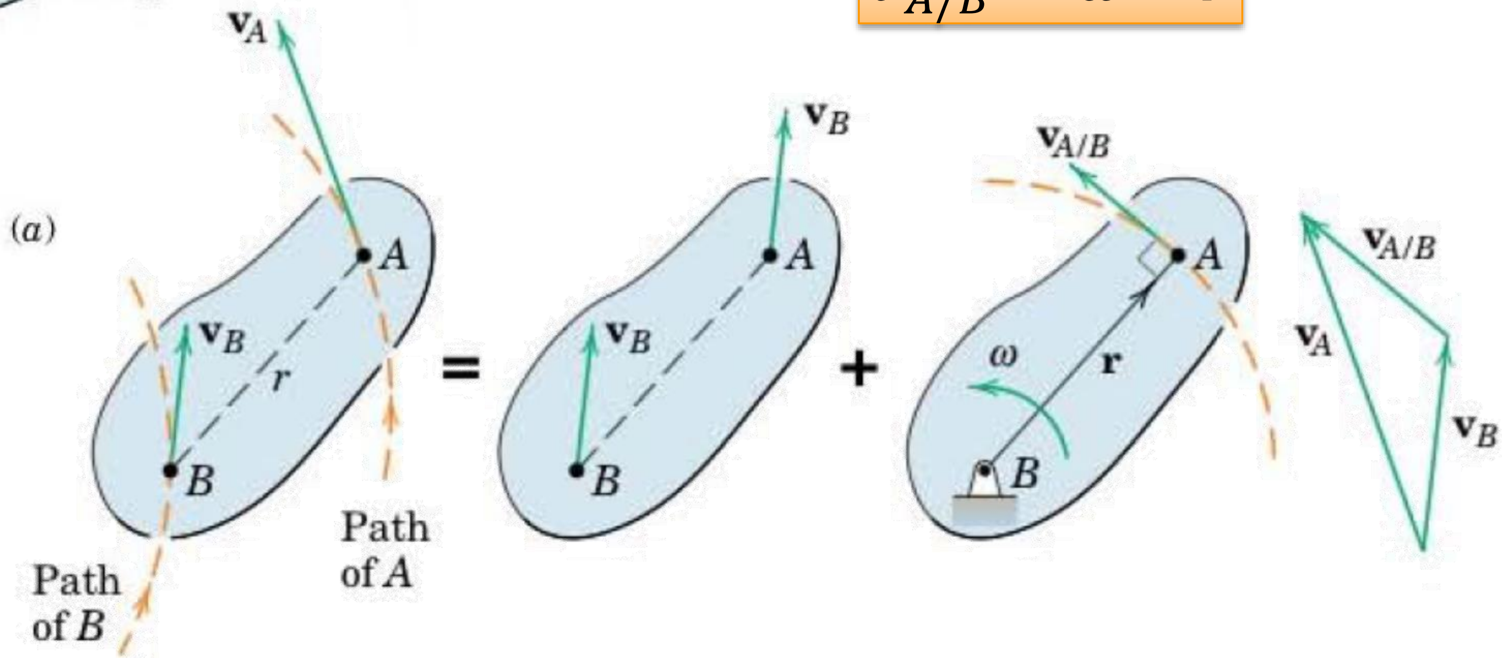


$$\Delta r_A = \Delta r_B + \Delta r_{A/B}$$

$$v_A = v_B + v_{A/B}$$

$$v_{A/B} = r\omega$$

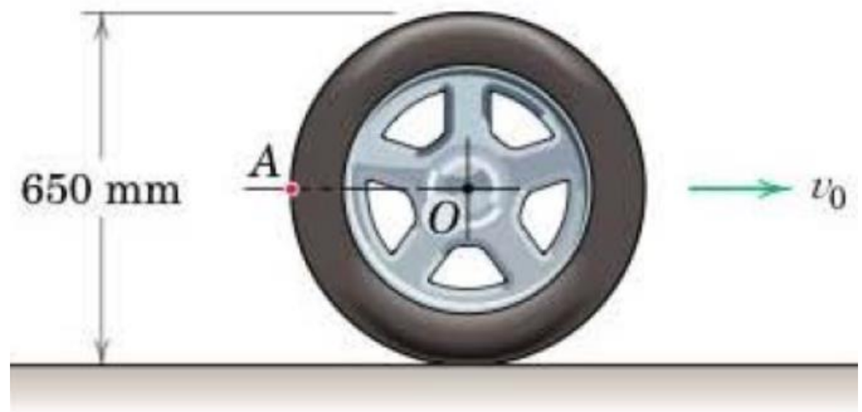
$$\boldsymbol{v}_{A/B} = \omega \times \boldsymbol{r}$$



Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 6 :

Bir otomobil lastiğinde A şekildeki pozisyonda iken mutlak hızı 12 m/s dir. Bu anda O noktasının hızı ve tekerin açısal hızı nedir. Not: Tekerler kaymadan dönmektedir.

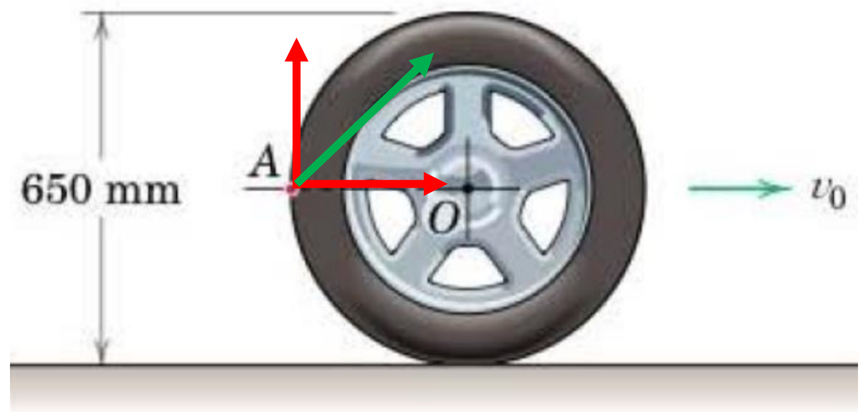


Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 6 Çözüm:

$$v_0 = 12\,cos45 = 8.485m/s$$

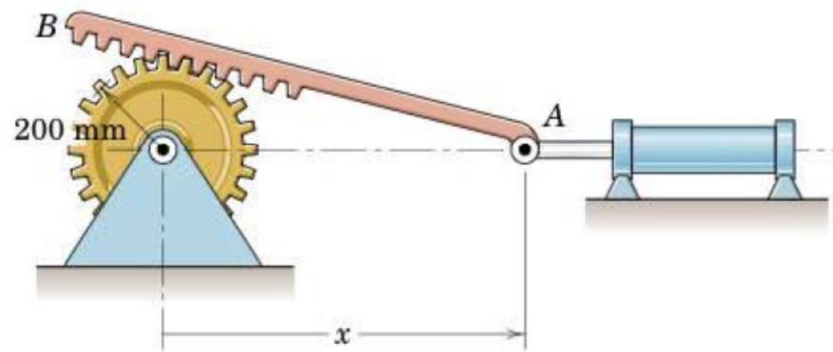
$$\omega = \frac{12sin45}{r} = 26.1\,rad/s$$



Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

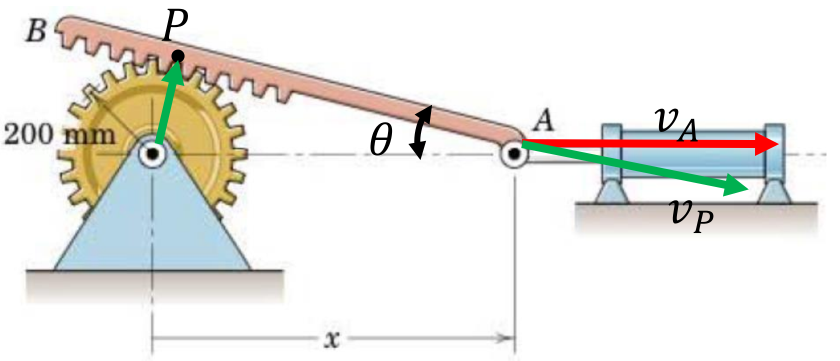
Örnek 7 :

Pinyon dişlinin dönmesi, üzerine diş açılmış AB çubuğu tarafından kontrol edilmektedir. Gösterilen pozisyonda piston $\dot{x} = 300\ mm/s$'lik hız verdiğine göre x=800 mm iken pinyon dişlinin (ω_0) ve AB çubuğunun (ω_{AB}) açısal hızlarını bulunuz.



Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 7 Çözüm:



$$\omega_{AB} = \dot{\theta}$$

$$\omega_0 = \frac{v_P}{r}$$

$$sin\theta = \frac{0.2}{x} \Longrightarrow x = 0.8\, m'de$$

$$\theta = 14.48^0, \dot{x} = v_A = -0.3\frac{m}{s};$$

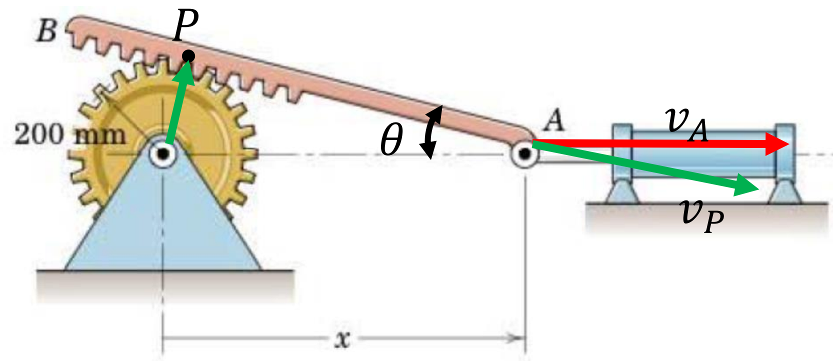
$$xsin\theta = 0.2 \Longrightarrow \dot{x}sin\theta + x\dot{\theta}cos\theta = 0$$

$$\dot{\theta} = \frac{-\dot{x}sin\theta}{xcos\theta} = \frac{-(-0.3)\sin(14.48)}{0.8\cos(14.48)} = 0.0968\, rad/s$$

$$\omega_{AB} = \dot{\theta} = 0.0968\, rad/s$$

Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 7 Çözüm Devam:

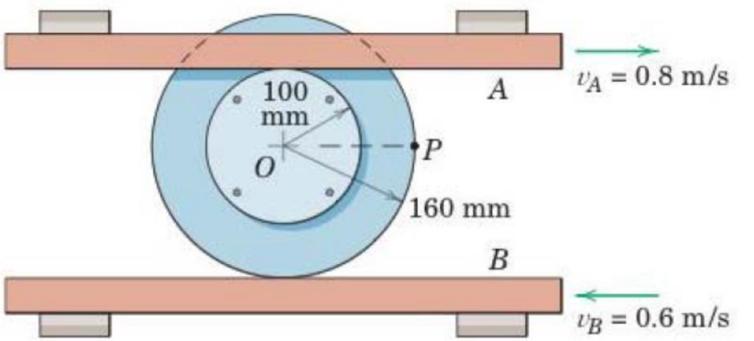


$$\omega_0 = \frac{v_P}{r} = \frac{v_A cos\theta}{r} = \frac{0.3cos14.48}{0.2} = 1.452 \text{ rad/s}$$

Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

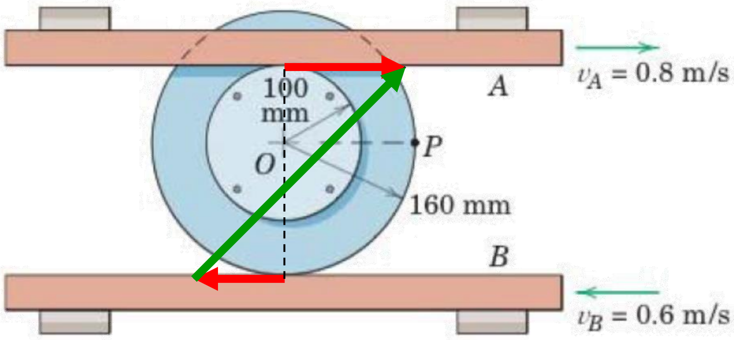
Örnek 8:

A ve B kayan uzuvlar, iki farklı çapa sahip kasnağa bağlıdır. Kasnak kaymadan döndüğüne göre P noktasının hızını bulunuz.



Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 8 Çözüm:



$$v_A = v_B + v_{A/B}$$

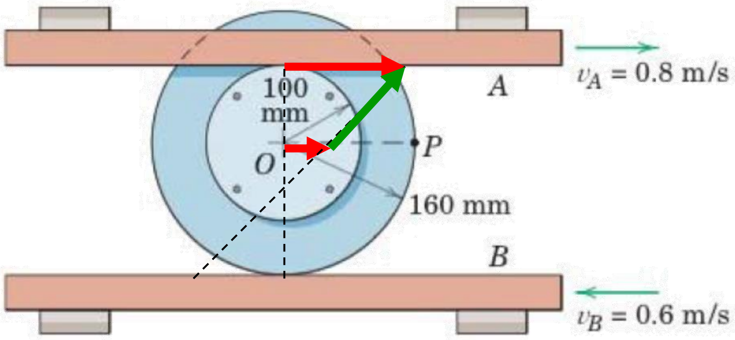
$$v_{A/B} = r\omega$$

$$0.8 = -0.6 + 0.26\omega \Longrightarrow \omega = 5.385\, rad/s$$

$$v_A = v_0 + v_{A/O}$$

$$v_0 = 0.8 - 0.1 * 5.385\, rad/s$$

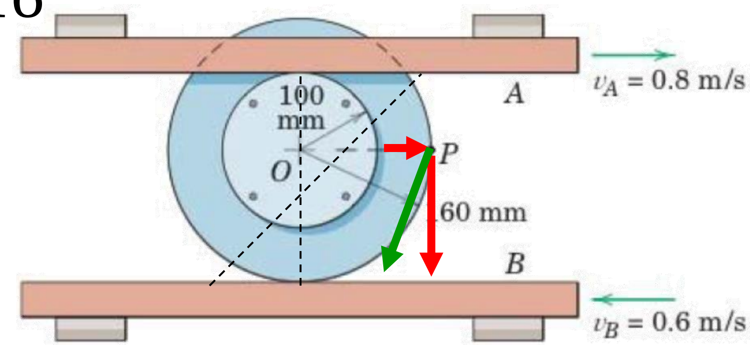
$$v_0 = 0.2615\, m/s$$



Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 8 Çözüm:

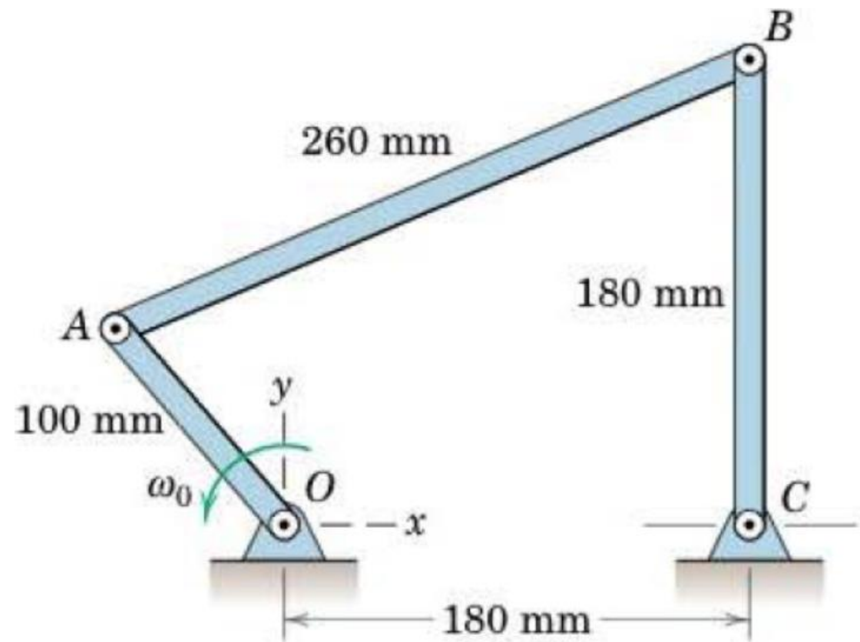
$$v_P = v_0 + v_{P/0}$$
$$v_{P/0} = PO * \omega$$
$$v_{P/0} = 0.16 * 5.385 \frac{rad}{s} = 0.8616$$
$$v_P = \sqrt{0.2615^2 + 0.8616^2} \frac{m}{s}$$
$$v_P = 0.9\, m/s$$



Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 9:

Gösterilen pozisyonda CB uzvu dik pozisyonda iken A noktasının koordinatları (x,y)=[-60,80] olarak ölçülmektedir. OA uzvunun açısal hızı $\omega_0 = 10\, rad/s$ olduğuna göre AB ve BC uzvunun açısal hızlarını bulunuz.



Bağıl Hareket Konusuna İlişkin Örnekler

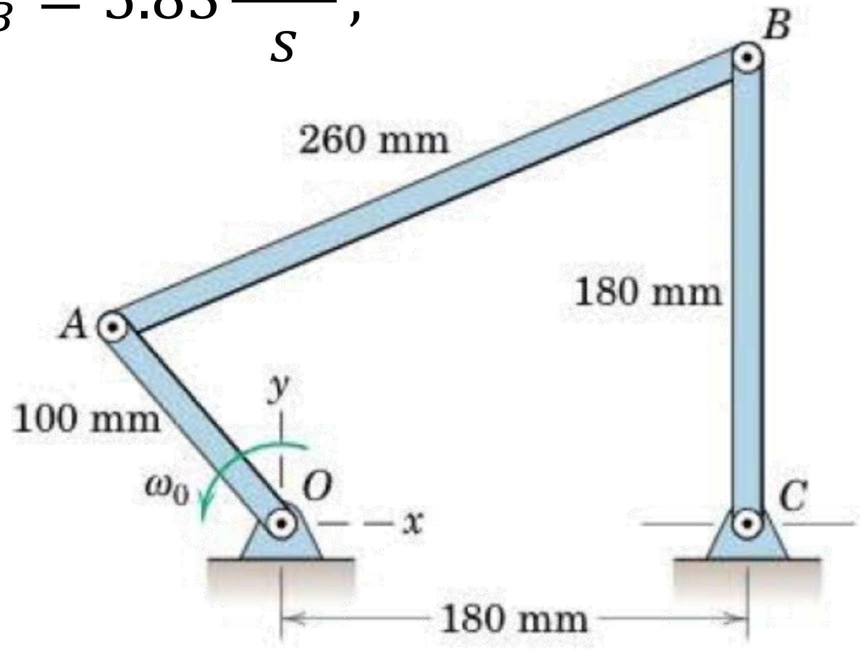
Örnek 9 Çözüm:

$$v_A = v_B + v_{A/B}$$

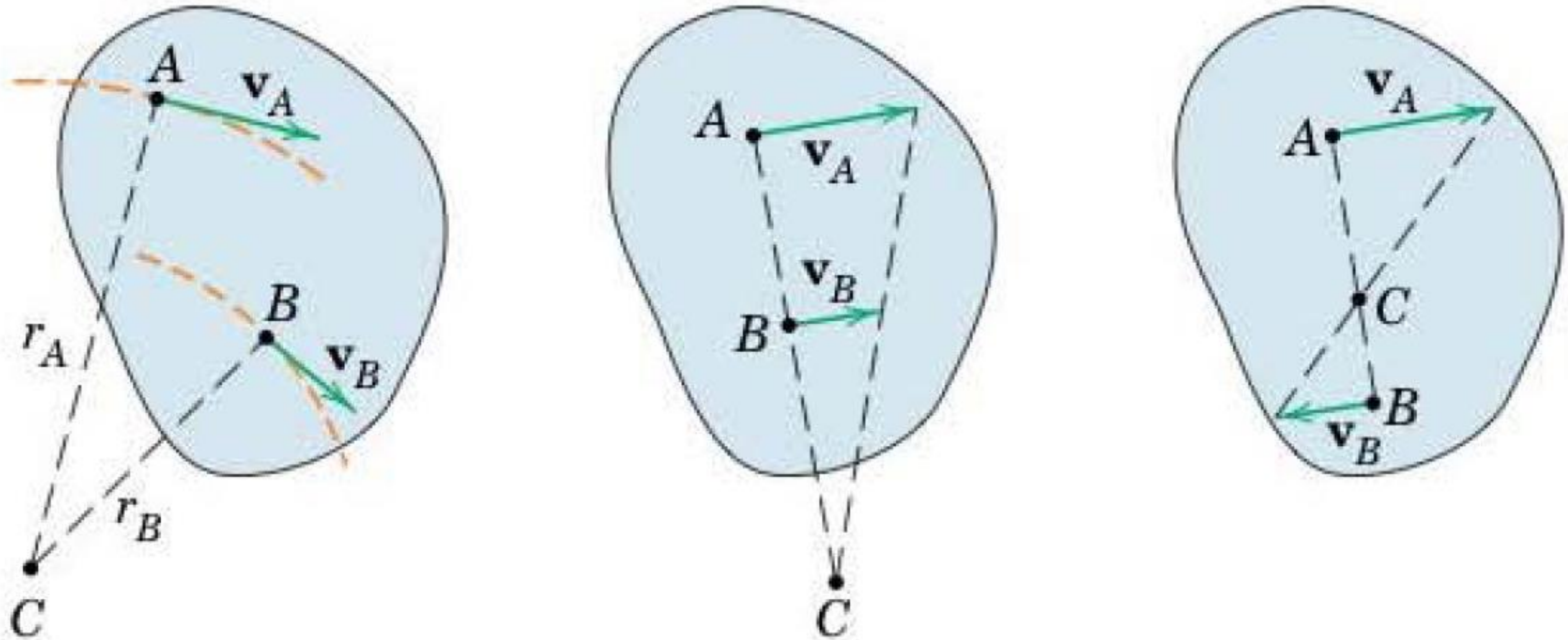
$$\omega_0 \times r_{0A} = \omega_{CB} \times r_{CB} + \omega_{AB} \times r_{BA}$$

$$10k \times (-60i + 80j) = \omega_{CB} k \times 180j + \omega_{AB} k \times (-240i - 100j)$$

$$\omega_{AB} = 2.5 \frac{rad}{s}; \omega_{CB} = 5.83 \frac{rad}{s};$$



Ani Dönme Merkezi



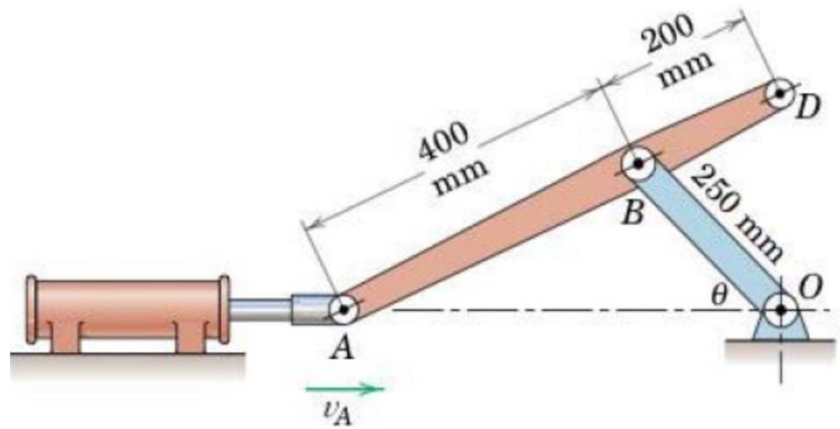
Ani Dönme Merkezi

- Her düzlemsel hareket için, incelendiği anda geçerli olmak üzere, bir ani dönme merkezi bulunur. Bu nokta hareketli düzlemde o an için sıfır hıza sahip tek noktadır.
- Cisim üzerinde bulunan her hangi bir noktanın hızının şiddeti o noktanın ani dönme merkezinden uzaklığının cismin açısal hızı ile çarpımıdır. Noktanın hızı noktayı ani dönme polüne bağlıyan doğruya dik olup açısal hıza göredir. $v = r \times \omega$
- Hız analizi açısından her türlü düzlemsel hareket anlık olarak ani dönme merkezi etrafında dönme olarak düşünülebilir

Ani Dönme Merkezi Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 10:

Hidrolik silinder A noktasında sınırlı bir yatay hareket yaratrmaktadır. Eğer $\theta = 45°$ iken A noktasının hızı $V_A = 4\ m/s$ ise ABD çubuğunun açısal hızını ve D noktasının doğrusal hızını bulunuz.



Ani Dönme Merkezi Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 10 Çözüm:

$$\theta = 45°;\ V_A = 4\, m/s$$

$$\beta = \sin^{-1}(\frac{250}{400} sin\theta) = 26.23$$

$$\alpha = 108.77$$

$$AO = PA = 535.6\, mm$$

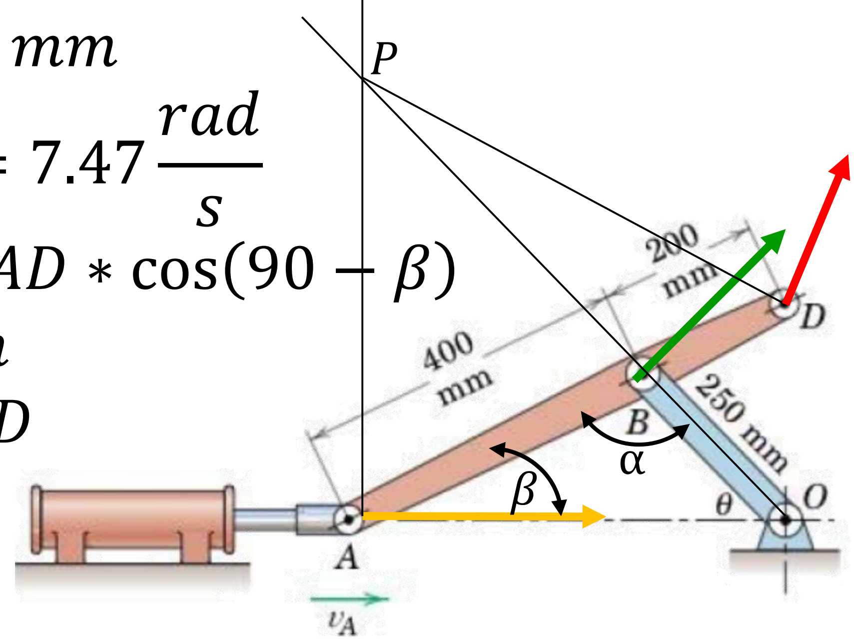
$$\omega_{ABD} = \frac{v_A}{PA} = \frac{4}{0.5356} = 7.47\frac{rad}{s}$$

$$PD^2 = PA^2 + AD^2 - 2 * PA * AD * \cos(90 - \beta)$$

$$PD = 0.602\, m$$

$$v_D = \omega_{ABD} * PD$$

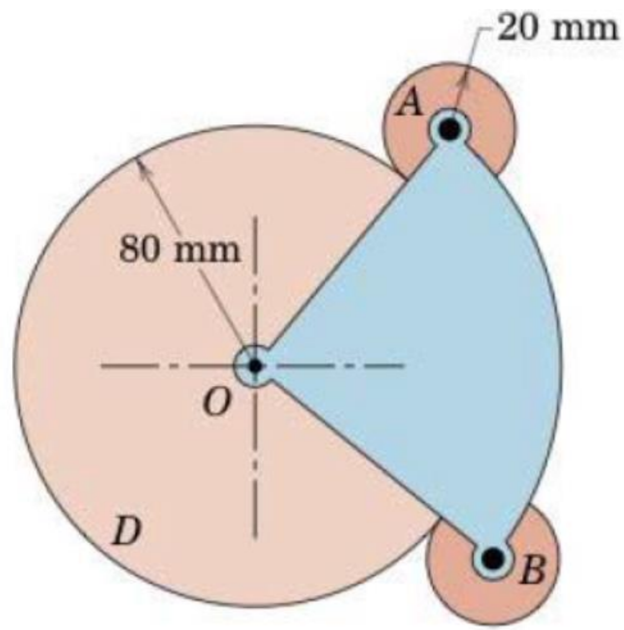
$$v_D = 4.5\frac{m}{s}$$



Ani Dönme Merkezi Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 11:

D dişlisi saat yönünde 4 rad/s sabit hızla dönmektedir. 90° lik AOB kapağı O noktasına ve küçük dişlilerin merkezlerine bağlanmıştır. Eğer kapağın hızı saatin ters yönünde 3 rad/s ise küçük dişlilerin hızlarını bulunuz.



Ani Dönme Merkezi Konusuna İlişkin Örnekler

Örnek 11:

D dişlisi SY 4 rad/s sabit hız

$$v_D = 80 * 4 = 320\, mm/s$$

AOB kapağı STY 3 $\frac{rad}{s}$

$$v_{AOB} = 100 * 3 = 300\, mm/s$$

$$\omega_A = \omega_B = ?$$

$$x\omega_A = v_D$$

$$(20 - x)\omega_A = v_{AOB}$$

$$x = 10.32\, mm;\ \omega_A = 31\, rad/s$$