Dinamik (MAK219)

2018-2019

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü
Drı Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Bölüm 4
Parçacık Sistemlerinin Kinetiği

- Bundan önceki konularda önce parçacığın kinematiğini ardından da kinetiğini çalıştık.
- Şimdiki konumuz birden fazla parçacığın bir araya gelerek oluşturdukları sistemlerin kinetiğidir.
- Bu konu daha sonra göreceğimiz rijid cisimlerin kinematiği ve kinetiğini anlamamızda bize kolaylık sağlayacaktır.

Bölüm 4
Parçacık Sistemlerinin Kinetiği

Parçacık Sistemlerinin Kinetiği Kapsamında

• Parçacık sistemleri için Newton'un 2. yasasının genelleştirilmesi

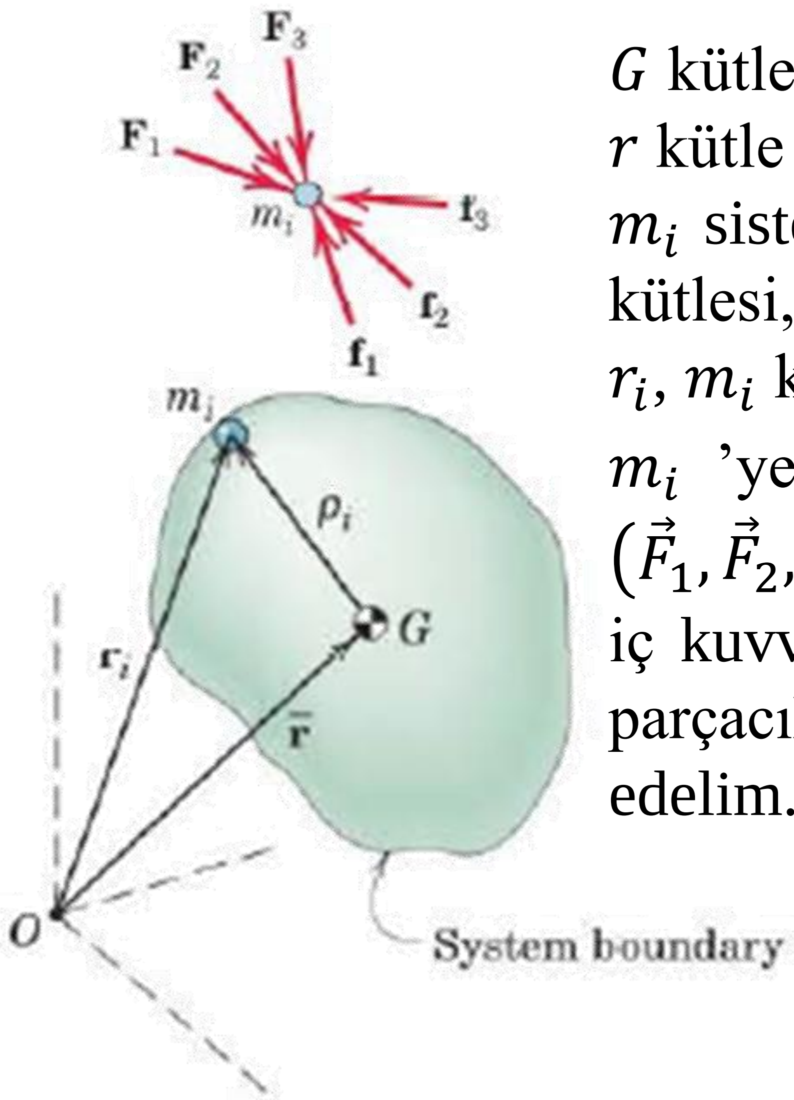
• İş-Enerji İlişkileri

• İmpuls-Momentum

• Enerji ve Momentumun Korunumu

konularını işleyeceğiz.

Parçacık sistemleri için Newton'un 2. yasasının genelleştirilmesi



G kütle merkezi,
r kütle merkezinin konumu,
m_i sistem sınırları içerisinde bir parçacığın kütlesi,
r_i, m_i kütlesinin konumu.
m_i 'ye etkiyen iç $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \cdots)$ ve $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots)$ dış kuvvetler. m_i'ye etkiyen iç kuvvetlerin, m_i'ye bağlı parçacığa veya parçacıklara da $-f$ olarak etkidiğine dikkat edelim.

$$\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Parçacık sistemleri için Newton'un 2. yasasının genelleştirilmesi

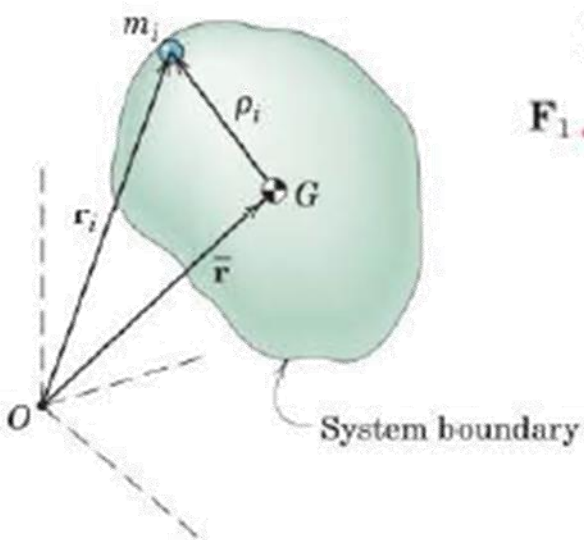
Newton'un ikinci yasası $\sum \vec{F} = \sum m\vec{a}$

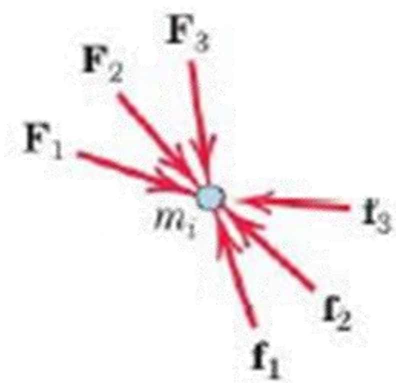
i. parçacık için

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots\right) + \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \cdots\right) = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Bu ilişkiyi tüm parçacıklar için yazıp toplarsak

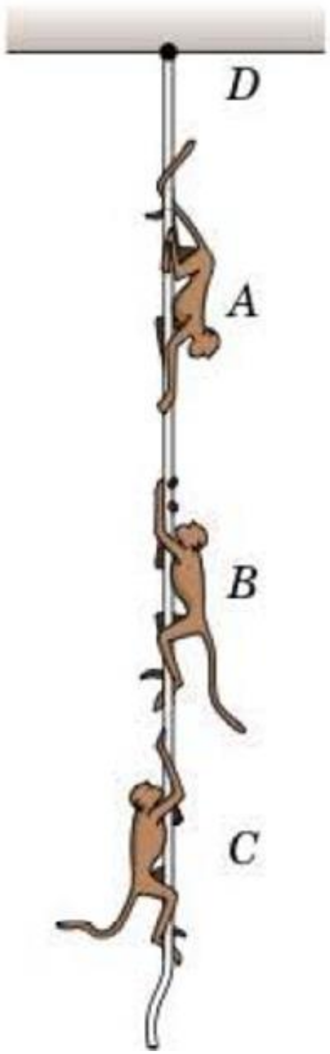
$$\sum\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots\right) + \sum\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \cdots\right) = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i$$





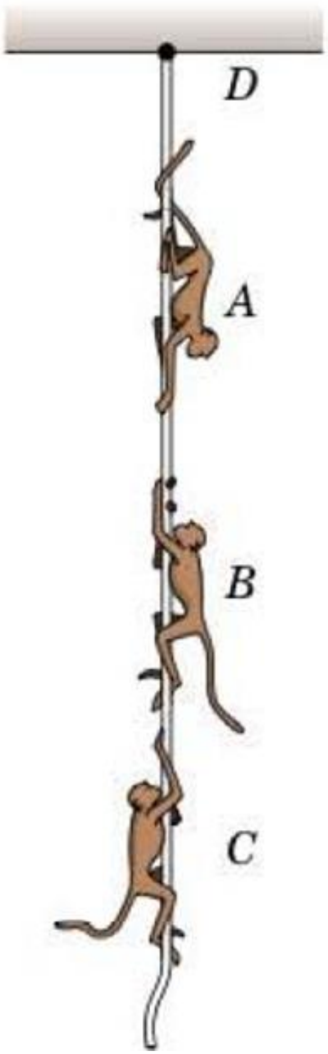
$$\sum \vec{F} = \sum m\ddot{\vec{r}} = \sum m\vec{a}_G$$

Örnek 1



Bir ip üzerinde 3 maymun hareket etmektedir. Kütleleri sırasıyla $m_A = 10\ kg$, $m_B = 15\ kg$, $m_C = 8\ kg$ olarak verilmektedir. İvmeleri ise bir an için sırasıyla $a_A = 2\ m/s^2$, $a_B = 0$, $a_C = 1.5\ m/s^2$ olarak ölçülmüştür. Bu anda ipteki gerilmeyi bulunuz.

Örnek 1'in çözümü

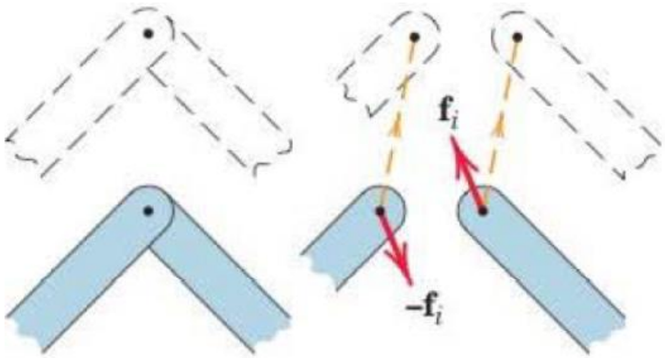


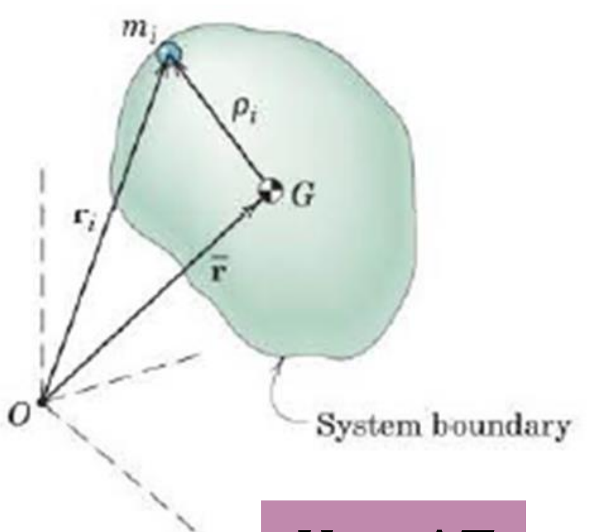
$m_A = 10\,kg,\ m_B = 15\,kg,\ m_C = 8\,kg$
$a_A = 2\,m/s^2,\ a_B = 0,\ a_C = 1.5\,m/s^2$

$$\sum F = m_i a_i \qquad (\uparrow) +$$

$$T - (10 + 15 + 8)g = -10 \cdot 2 + 0 + 8 \cdot 1.5$$
$$T = 316\,N$$

Parçacık sistemleri için İş-Enerji İlişkileri





$$\boxed{U = \Delta T}$$

Her bir parçacık için

$$U_i = \Delta T_i$$

Bu ilişkiyi tüm parçacıklar için yazıp toplarsak

$$\sum U_i = \sum \Delta T_i \Longrightarrow U = \Delta T$$

Sistemde iç kuvvetlerin yaptığı işin toplamı sıfırdır.

Dolayısıyla $U = \sum U_i$, sistemde yapılan toplam iş sadece dış kuvvetlerin yaptığı işlerin toplamıdır.

Parçacık sistemleri için İş-Enerji İlişkileri

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$$

$$\vec{r}_i = \vec{r} + \vec{\rho}_i$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \left(\vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i\right) \cdot \left(\vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i\right)$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_G^2 + \left|\dot{\vec{\rho}}_i\right|^2 + \cancel{2\vec{v}_G \cdot \dot{\vec{\rho}}_i}^{\,0}$$

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum m_i\, v_G^2 + \frac{1}{2}\sum m_i \left|\dot{\vec{\rho}}_i\right|^2}$$

Parçacık sistemleri için İmpuls-momentum kavramının genelleştirilmesi

Çizgisel Momentum

Her bir parçacık için

$$\vec{G}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i$$

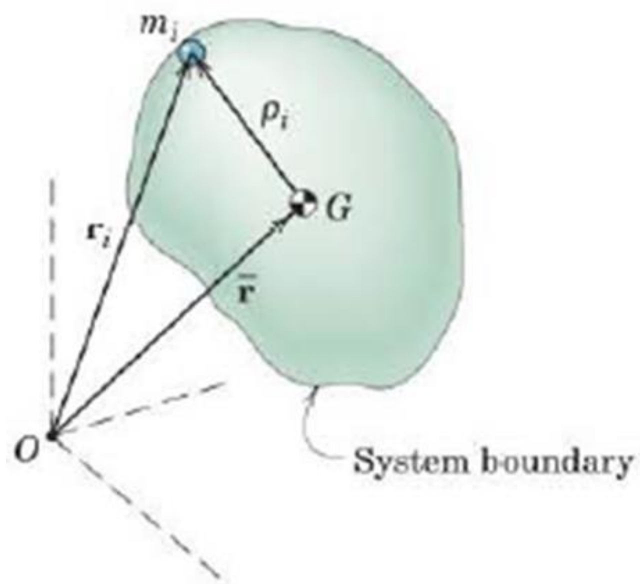
$$\vec{G}_i = m_i \vec{v}_G + m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \sum m_i \vec{v}_G + \frac{d}{dt} \cancelto{0}{\sum m_i \vec{\rho}_i}$$

Not: Eksen takımı G de olduğu için

$$\rho_G = 0, \sum m_i \vec{\rho}_i = 0$$

olmalı.

$$\boxed{\vec{G} = m \vec{v}_G}$$



Parçacık sistemleri için İmpuls-momentum kavramının genelleştirilmesi

Açısal Momentum

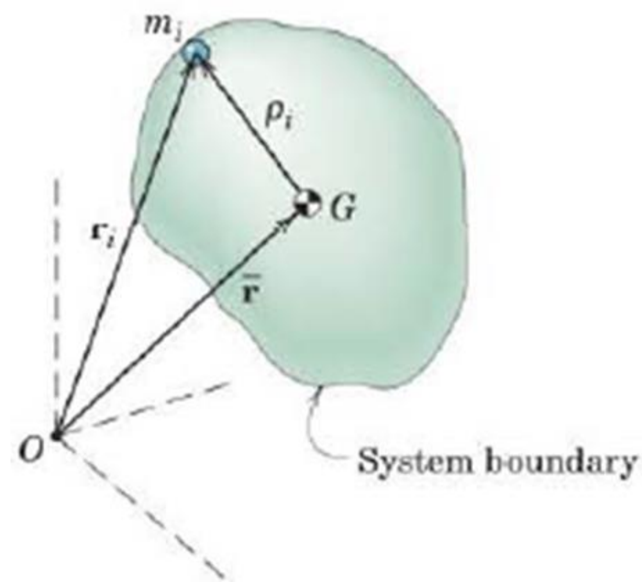
Her bir parçacık için

$$\vec{H}_o = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum \cancelto{0}{\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i} + \sum \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o}$$



Parçacık sistemleri için Enerji ve Momentumun Korunumu

Enerjinin Korunumu

Eğer $U = 0$ ise $\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$=0

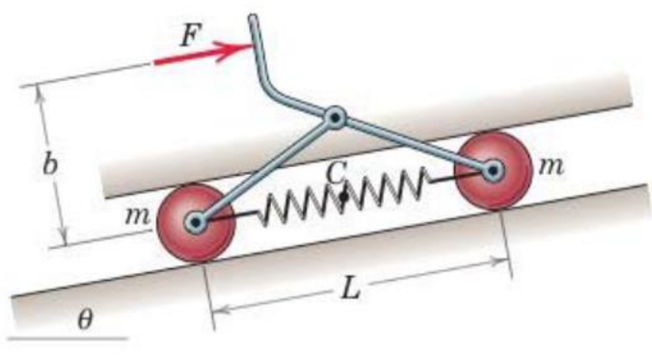
Momentumun Korunumu

Eğer $\sum F = 0$ ise $\Delta G = 0$

Açısal Momentumun Korunumu

Eğer $\sum M_o = 0$ ise $\Delta H_o = 0$

Örnek 2

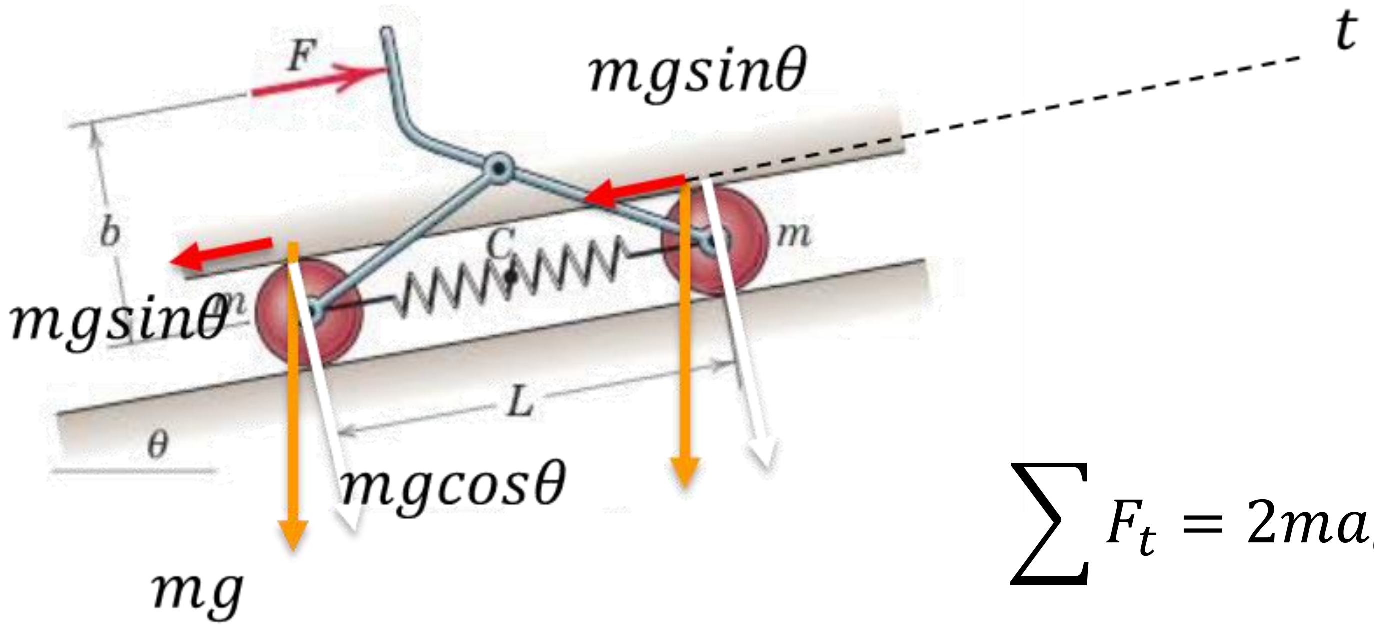


Kütleleri m olan iki küre, kütleleri ihmal edilecek kadar küçük yay ve mafsallı çubuklarla birbirine bağlanmıştır.

Kütleler yatayla θ açısı yapan sürtünmesiz yuvada serbestçe kaymaktadır.

Yayın merkezindeki C noktasının ivmesini bulunuz.

Örnek 2'nin çözümü

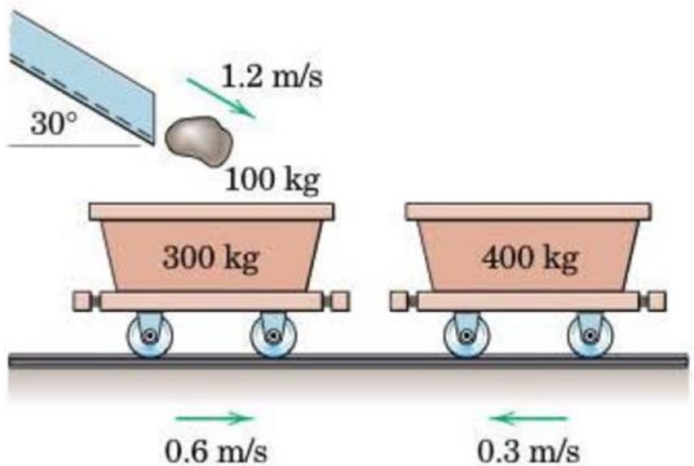


$$\sum F_t = 2ma_C$$

$$F - 2mgsin\theta = 2ma_C$$

$$a_C = \frac{F}{2m} - gsin\theta$$

Örnek 3



Şekilde görülen maden arabaları birbirlerine doğru kenetlenmek üzere yaklaşırken, konveyörden 100 kg'lık yük düşmektedir. Birleşme hareketinin tamamlanmasının ardından sistemin hızını bulunuz. Yük kenetlenmeden sonra düşseydi son hız etkilenir miydi?

Örnek 3'ün Çözümü

Tüm sistem için yatay doğrultuda momentumun korunumunu yazarsak

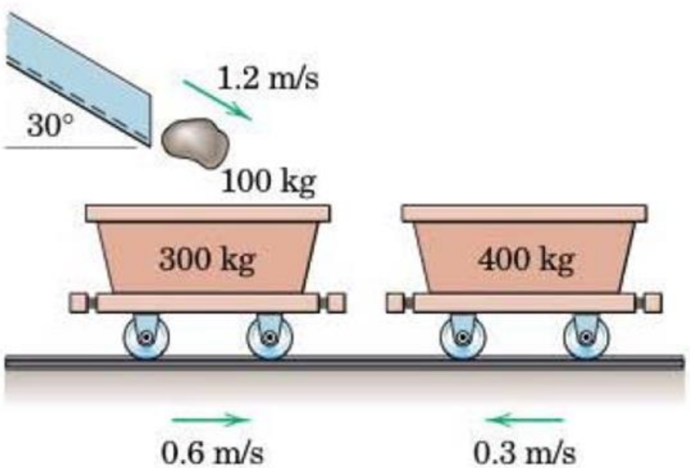
$$\Delta G_x = 0 \Longrightarrow G_{1x} = G_{2x}$$

$$G_{1x} = 100 * 1.2 * cos30 + 300 * 0.6 - 400 * 0.3 = 163.92$$

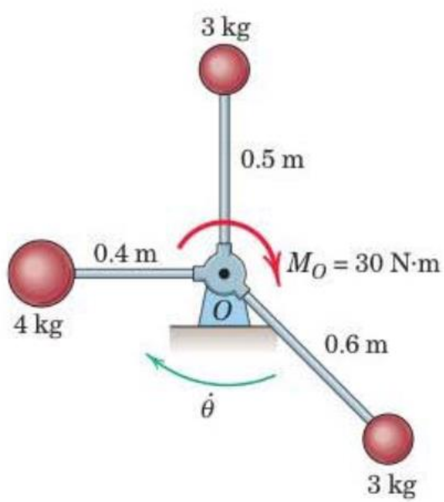
$$G_{2x} = (100 + 300 + 400) * v = 800v$$

$$163.92 = 800v \Longrightarrow v = 0.205\, m/s$$

Yük kenetlenmeden sonra düşseydi son hız etkilenmezdi çünkü momentumun korunumu olayların sırasıyla ilişkili değildir.



Örnek 4



Şekildeki sistem $\dot{\theta} = 20\ rad/s$ hızla dönerken 5 saniye boyunca 30 Nm'lik moment uygulanıyor. Sistemin 5 saniye sonundaki açısal hızını bulunuz.

Örnek 4’ün Çözümü

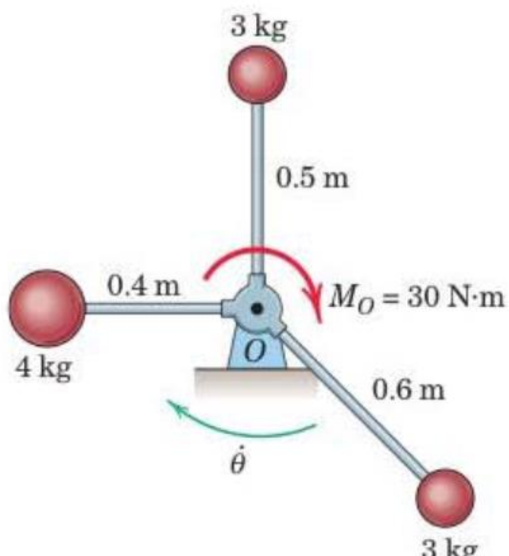
$$\int_0^5 \sum M_0 dt = \Delta H_0$$

$$M_0 t = \sum m_i r_i^2 \,(\dot{\theta}' - \dot{\theta})$$

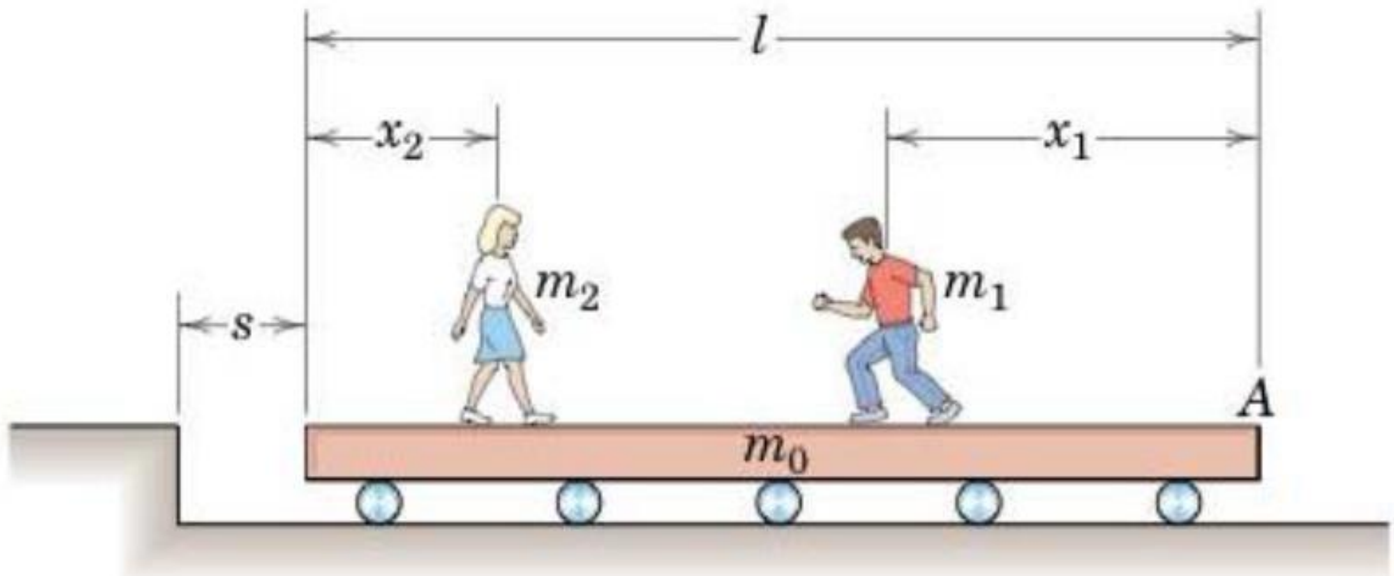
$$30 * 5 = [3 * 0.5^2 + 3 * 0.6^2 + 4 * 0.4^2](\dot{\theta}' - 20)$$

$$150 = [2.47](\dot{\theta}' - 20)$$

$$\dot{\theta}' = 80.73 \text{ rad/s}$$

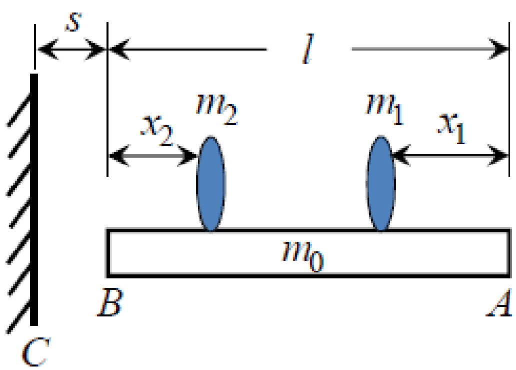


Örnek5



Başlangıçta s=0, kız arabanın bir başında oğlan diğer başında, birbirlerine doğru yürümeye başlıyorlar. Karşılaştıkları zaman araba ilk konumundan ne kadar uzaklaştığını x_1 cinsinden ifade ediniz.

Örnek5’in Çözümü



Yere sabit C noktasına göre sistemin momentumunun korunumlu olabilmesi için, birinci ve ikinci durumda oğlanın kızın ve kayığın yer değiştirmeleri toplamının sabit olması gerekmektedir.

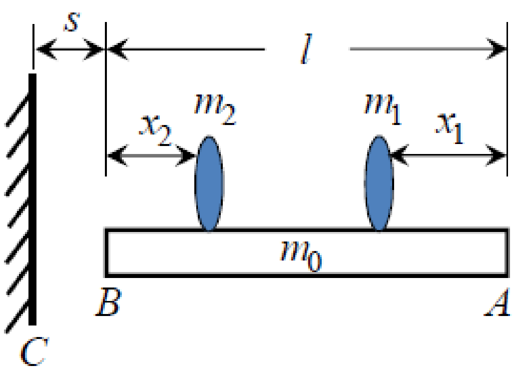
$$\left(\sum m_i x_i\right)_1 = \left(\sum m_i x_i\right)_2$$

$$m_1 l + m_0 \frac{l}{2} = m_1(s + l - x_1) + m_2(s + x_2) + m_0\left(s + \frac{l}{2}\right)$$

$$0 = (m_1 + m_2 + m_0)s - m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$s = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 + m_2 + m_0}$$

Örnek5'in Çözümü

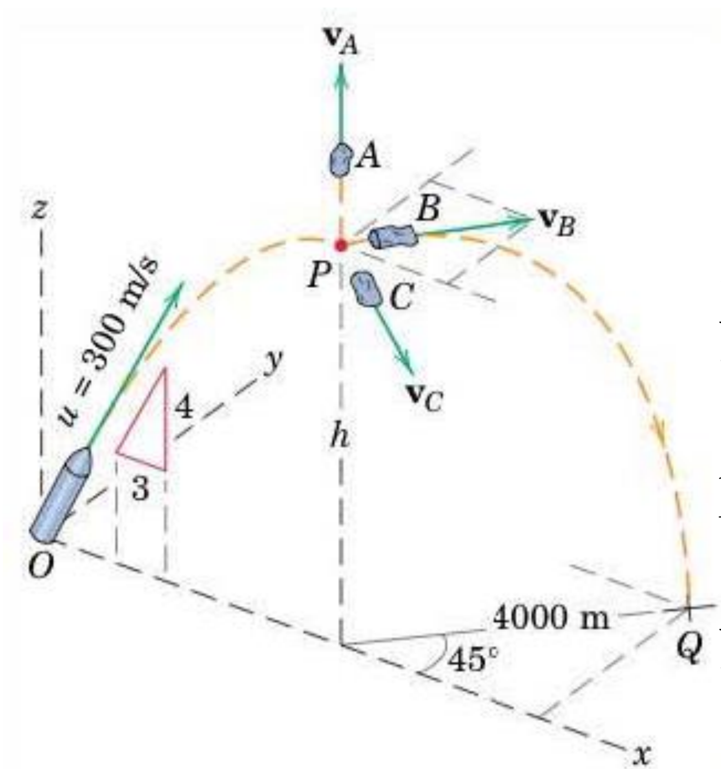


Soruda, oğlanla kızın karşılaştıkları anda kayığın kıyıdan ne kadar uzaklaştığı sorulduğuna göre, Oğlanla kızın aldığı yolların toplamı kayığın boyu kadar olmalıdır.

$$x_1 + x_2 = l \Longrightarrow x_2 = l - x_1$$

$$s = \frac{m_1 x_1 - m_2(l - x_1)}{m_1 + m_2 + m_0} = \frac{(m_1 + m_2)x_1 - m_2 l}{m_1 + m_2 + m_0}$$

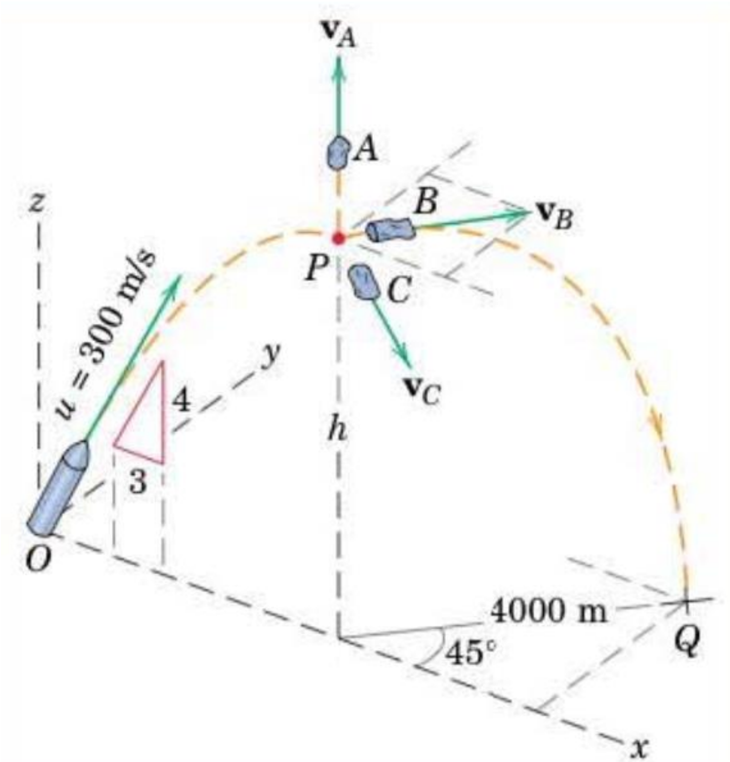
Örnek 6



20 kg kütlesindeki bir bomba 0 noktasında $x - z$ düsey düzleminde 300 m/s ilk hızı ile sekilde gösterildiği eğimle fırlatılıyor. Bomba yörüngenin en yüksek noktasına eristiğinde patlayıp A, B ve C parçalarına bölünüyor. Patlamadan sonra A parçasi dikey olarak 500 m. yükseliyor, B yatay $\boldsymbol{v}_B$ hızına sahip ve Q noktasında yere çarpıyor.

A, B ve C'nin kütleleri 5 kg, 9 kg ve 6 kg oldukları parçalar bulunduktan sonra tespit ediliyor. C'nin patlamadan hemen sonraki hızını bulunuz. Atmosferik sürtünmeyi ihmal edin.

Örnek 6'nın Çözümü



Momentumun korunumunu yazacağız ancak hızlar açık verilmemiş; Önce v_A ve v_B hızını bulacağız. Ardından momentumun korunumundan v_C hızını bulacağız.

$$v_A^2 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 * 9.81 * 500}$$

$$v_A = 99.045\, m/s$$

$$t = \frac{300 * \frac{4}{5}}{9.81} = 24.465\, s.$$

Örnek 6’nın Çözümü

$$v_B * t = x \Longrightarrow v_B = x/t$$

$$v_B = \frac{4000}{24.465} = 163.5\, m/s$$

Momentumun korunumu

$$mu\left(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k\right)$$

$$= m_A v_A k + m_B v_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) + m_C\,(v_{Cx}i + v_{Cy}j$$

$$+ v_{Cz}k)$$

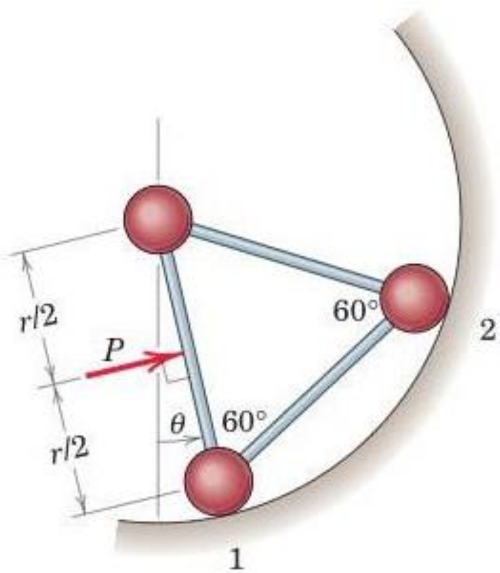
Örnek 6'nın Çözümü

$$v_{Cx} = \frac{mu\frac{3}{5}i - m_B v_B \frac{\sqrt{2}}{2} i}{m_C} =$$

$$v_{Cy} = \frac{-m_B v_B \frac{\sqrt{2}}{2} j}{m_C} =$$

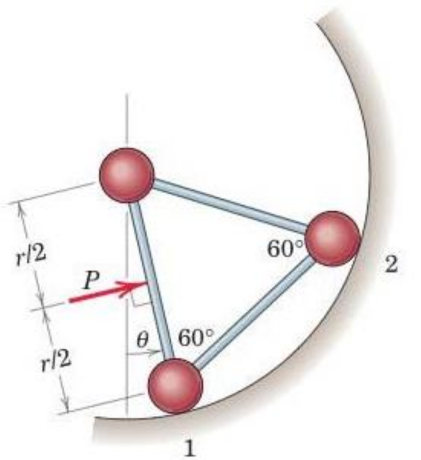
$$v_{Cz} = \frac{mu\frac{4}{5}k - m_A v_A k}{m_C} =$$

Örnek 7

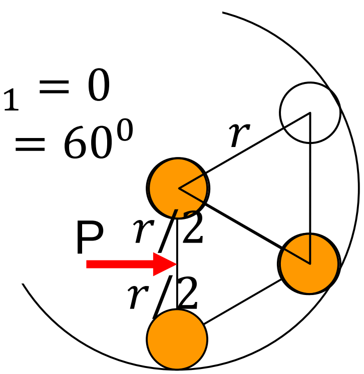


Kütleleri m olan üç küçük küre ağırlığı ihmal edilecek rigid bağlantılarla birbirlerine bağlanmıştır, sürtünmesiz dairesel yüzeyde hareket edebilmektedirler. $\theta = 0$ iken $\theta = 60^0$ olduğunda sistemin tekrar durgunluğa ulaşması için gerekli P_{min}'i bulunuz. $P = 2P_{\mathrm{min}}$ olduğunda 1 den 2 noktasına ulaşıldığında bu durumda $\theta = 60^0$ olur, sistemin ortak v hızını bulunuz.

Örnek 7’nin Çözümü



$\Theta_1 = 0$
$\Theta_2 = 60^0$



$$U = \Delta V_g$$

$$U = P_{min}\frac{r}{2}\frac{\pi}{3}$$

$$(V_g)_1 = mgr + mg\frac{r}{2}$$

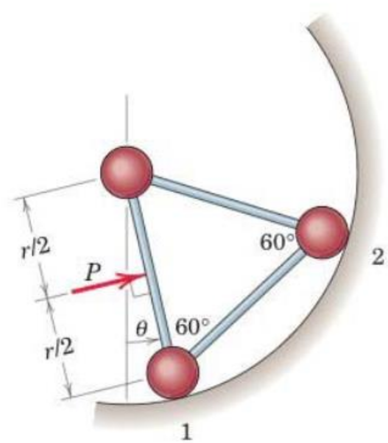
$$(V_g)_2 = mgr + mg\frac{r}{2} + mg\left(r + \frac{r}{2}\right)$$

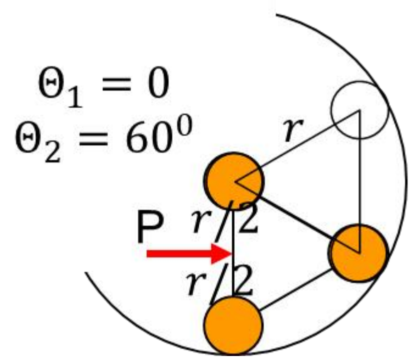
$$\Delta V_g = mg\frac{3r}{2}$$

$$U = \Delta V_g \Longrightarrow P_{min}\frac{r}{2}\frac{\pi}{3} = mg\frac{3r}{2}$$

$$P_{min} = \frac{9mg}{\pi}$$

Örnek 7’nin devamı





$$U = \Delta V_g + \Delta T$$

$$U = 2P_{min}s = \frac{18mg}{\pi}\frac{r}{2}\frac{\pi}{3}$$

$$\Delta V_g = mg\frac{3r}{2}$$

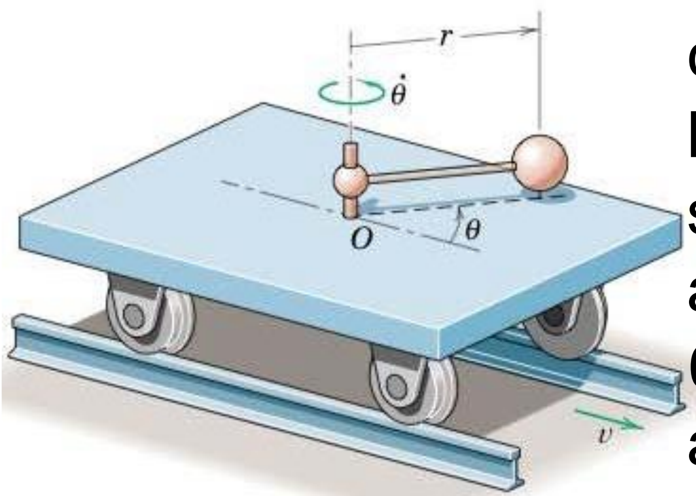
$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$$

$$U = \Delta V_g + \Delta T$$

$$3mgr = mg\frac{3r}{2} + mv^2$$

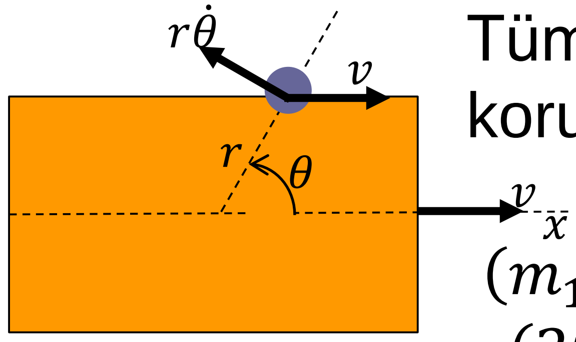
$$v = \sqrt{\frac{3gr}{2}}$$

Örnek 8



$20\ kg$'lık araba yatay ray üzerinde v hızıyla ilerlemektedir. Ağırlığı ihmal edilecek $r = 0.4\ m$'lik bir bağlantı çubuğuyla merkeze bağlı $5\ kg$'lık küre motor vasıtasıyla $\dot{\theta} = 4\ rad/s$ sabit hızla döndürülmektedir. Eğer arabanın hızı $\theta = 0^0$ iken $v = 0.6\ m/s$ ise $\theta = 60^0$ olduğunda arabanın hızını hesaplayınız.

Örnek 8'in çözümü



Tüm sistem için x yönünde momentumun korunumunu yazarsak;

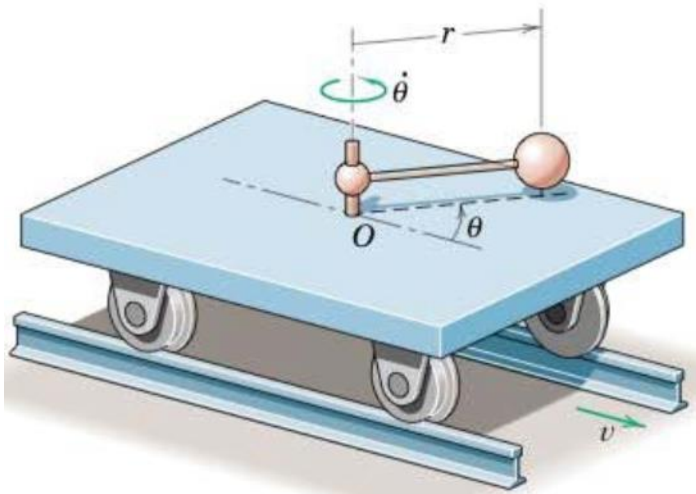
$$(G_1)_x = (G_2)_x$$

$$(m_1 + m_2)v = (m_1 + m_2)v_1' - m_2 r\dot{\theta}\cos(30)$$

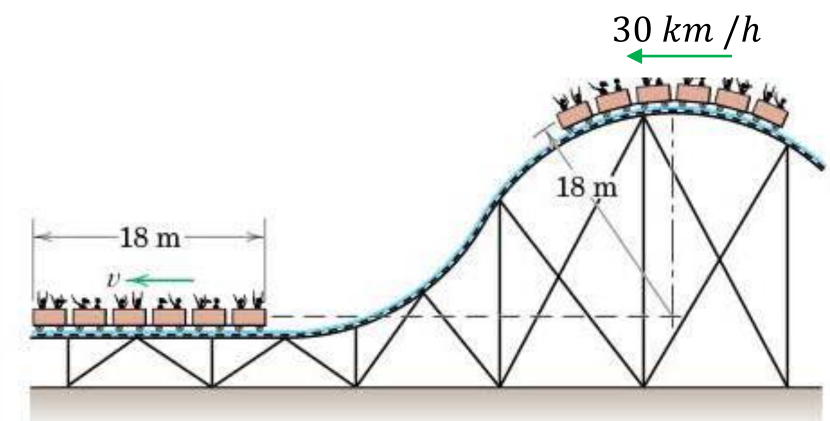
$$(20 + 5)0.6 = (20 + 5)v_1' - 5(1.6)\cos(30)$$

$$15 = 25v_1' - 6.9282$$

$$v_1' = 0.877\ m/s$$

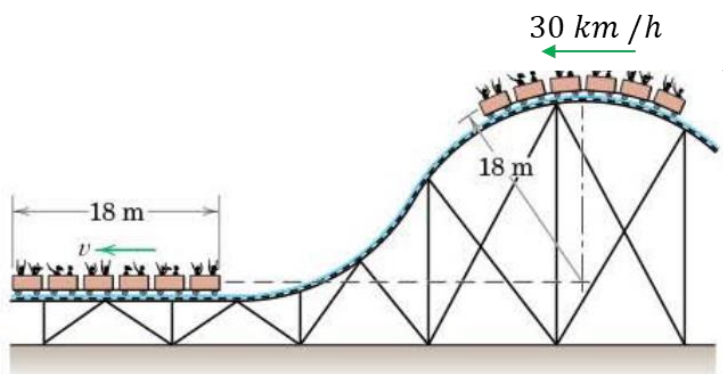


Örnek 9



Roller-coaster'ın hızı dairesel bölümün tepesinden geçerken 30 km/h. Sürtünmeleri ihmal edin ve Roller-coaster yatay pozisyona geldiğindeki hızını hesaplayın. Tepe noktasında Roller-coaster'ın ağırlık merkezinin dairesel yolun merkezine olan uzaklığı 18 m ve 6 arabada eşit kütlelerdedir.

Örnek 9'un çözümü



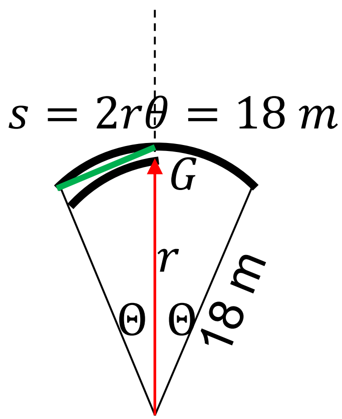
$$s = r2\theta = 18 \Longrightarrow \theta = \frac{1}{2} rad$$

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{180}{\pi} = 28.65^0$$

$$\bar{r}\theta = r sin\theta \Longrightarrow \bar{r} = 17.26 \text{ m}$$

Enerjinin korunumunu yazarsak;

$$\Delta T + \Delta V_g = 0$$

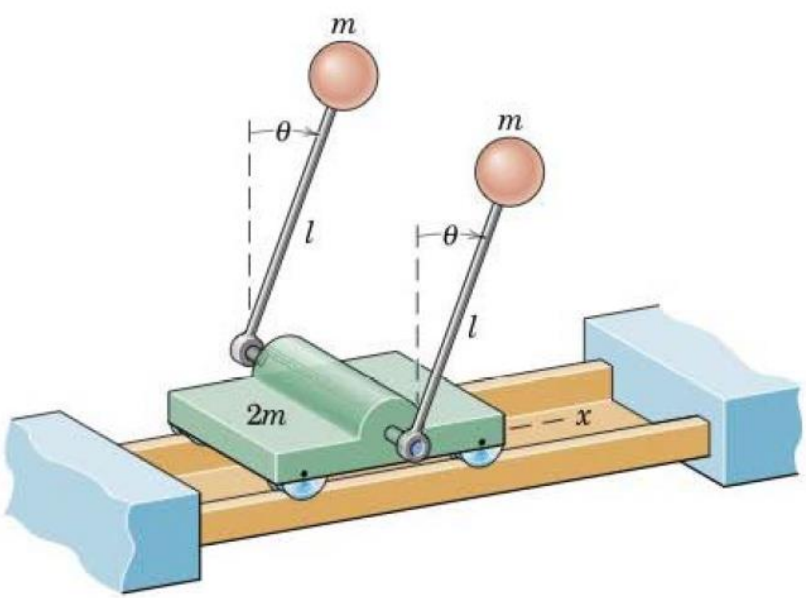


$$\frac{1}{2}m\left(v^2 - \left(\frac{30}{3.6}\right)^2\right) - mg(17.26) = 0$$

$$v = \sqrt{2g(17.26) + \left(\frac{30}{3.6}\right)^2} = 20.20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

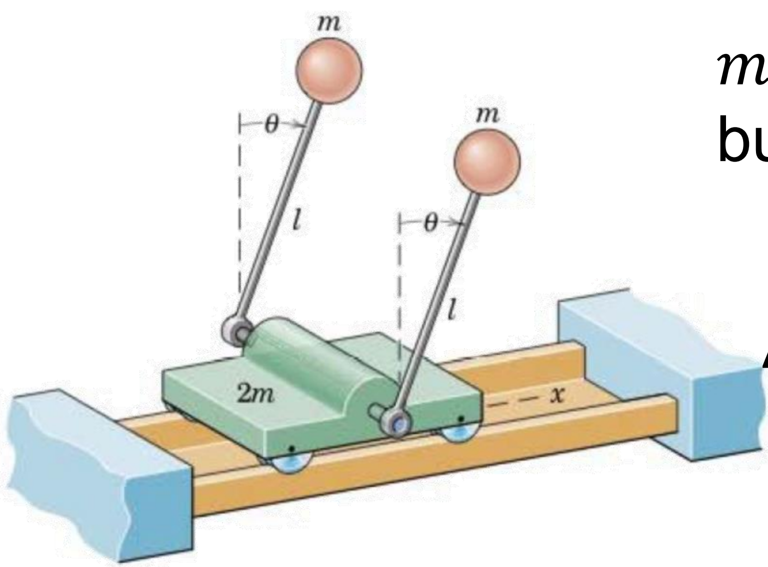
$$v = 20.20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} * 3.6 = 72.72\ km/h$$

Örnek 10



Gösterilen sistemde arabanın kütlesi $2m$ ve taşıdığı kürelerin her birinin kütlesi m dir. Küreler l uzunluğunda ağırlıksız rigid bağlantılarla arabaya bağlanmıştır. $\theta = 0$'dan küreler durgunluktan serbest bırakılıyorlar. Arabada durgunluktadır. $\theta = 180^0$'de kürelerin açısal hızını ve arabanın yatay hızını bulunuz.

Örnek 10



Enerjinin korunumundan

m kütleli kürelerin açısal hızını bulalım.

$$\Delta V_g = 2mg2l = 4mgl$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}2mv_x^2 + 2\left(\frac{1}{2}m\left(v_x - l\dot{\theta}\right)^2\right)$$

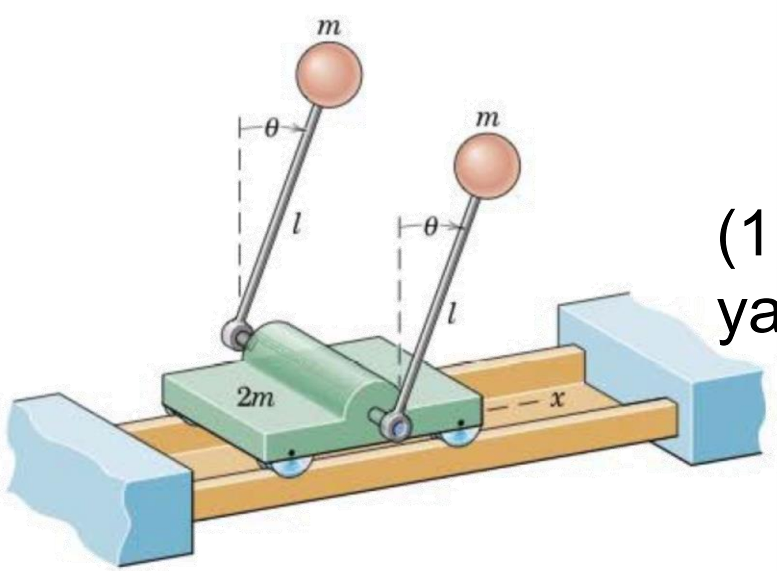
$$mv_x^2 + mv_x^2 + ml^2\dot{\theta}^2 - 2mv_x l\dot{\theta}$$

$$\Delta T = \Delta V_g$$

$$2mv_x^2 + ml^2\dot{\theta}^2 - 2mv_x l\dot{\theta} = 4mgl$$

$$v_x^2 + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{2} - v_x l\dot{\theta} = 2gl \quad (1)$$

Örnek 10



Momentumun korunumundan

$$2mv_x + 2m\left(v_x - l\dot{\theta}\right) = 0$$

$$2v_x = l\dot{\theta} \quad (2)$$

(1) Denkleminde (2)'yi yerine yazalım.

$$v_x^2 + \frac{(2v_x)^2}{2} - v_x(2v_x) = 2gl$$

$$v_x^2 = 2gl$$

$$v_x = \sqrt{2gl}$$

$$2v_x = l\dot{\theta} \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{2v_x}{l} = 2\sqrt{\frac{2g}{l}}$$