Dinamik (MAK219)

2018-2019

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Mühendislik Fakültesi

Makine Mühendisliği Bölümü

Drı Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Bölüm 3
Parçacık Kinetiği

Bu bölümü dört alt başlık altında çalışacağız

- Newton’un 2. yasasının direkt uygulaması
- İş - Enerji İlişkileri
- İmpuls ve Momentum İlişkileri
- Özel Uygulamalar

Parçacıkların Kinetiği

Dengelenmemiş Kuvvetler ve Hareketin değişimi arasındaki ilişkiler

- Newton'un 2ı yasasının direkt uygulaması: Kuvvet-Kütle-İvme
  - $$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
- İş-Enerji İlişkileri
  - $$\int \sum \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int m\vec{a}d\vec{s}$$
- Impuls-Momentum İlişkileri
  - $$\int \sum \vec{F} \cdot dt = \int m\vec{a}dt$$

Giriş

- Üç hafta boyunca parçacık kinetiği adı altında
  - Newton’un 2. yasasının direkt uygulaması
  - İş - Enerji İlişkileri
  - İmpuls ve Momentum İlişkileri

  Konularını tartıştık. Bu gün bu konulardaki özel uygulamalardan

  - Çarpışma
  - Bağıl Hareket

  Konularını tartışacağız.

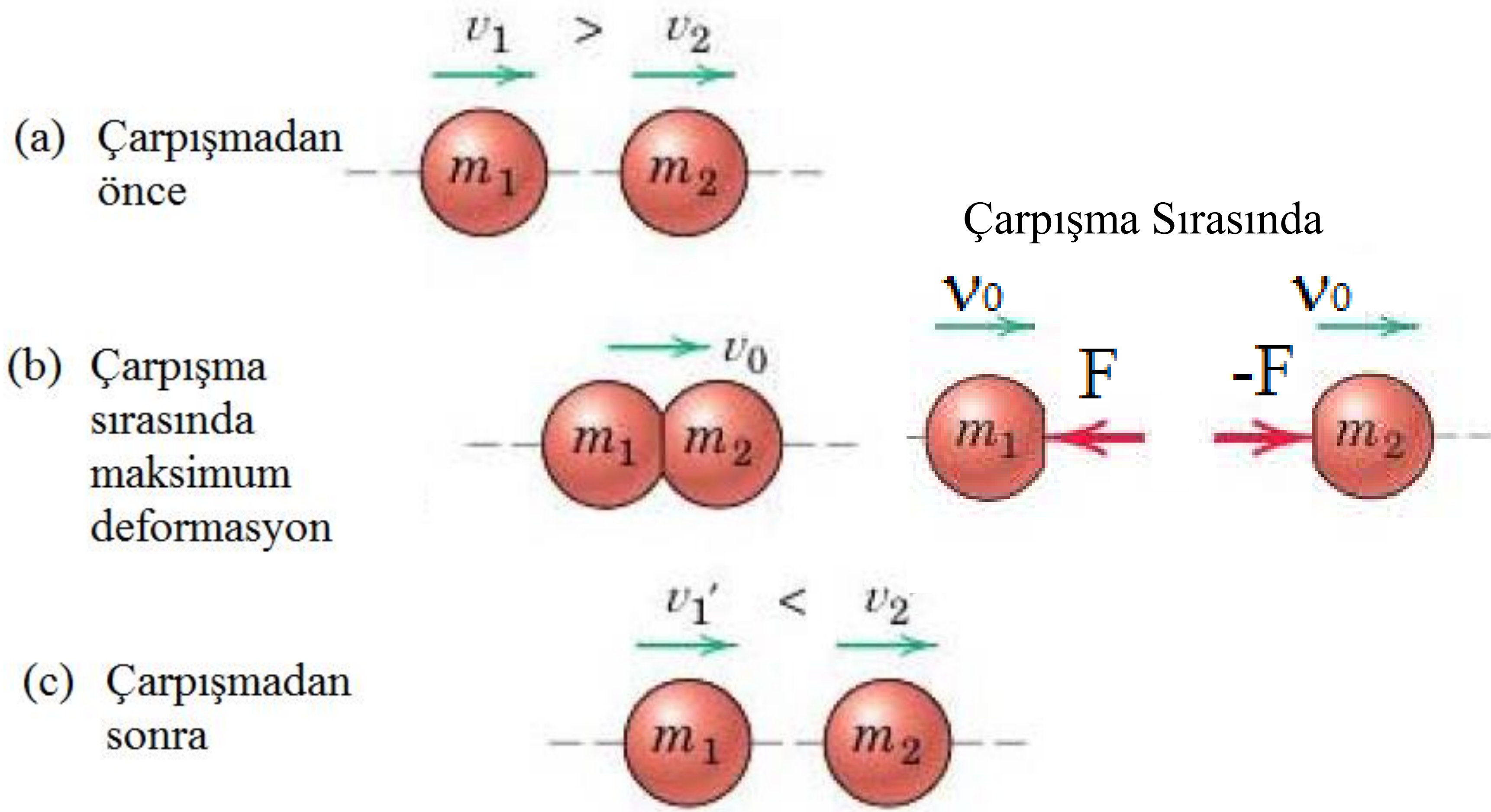
İmpuls Momentum Yöntemi Çarpışma

- İmpuls momuntum yöntemi çarpışan cisimlerin davranışını tanımlamak için kullanılabilecek önemli bir araçtır.
- İki kütle birbiri ile kısa süre içerisinde büyük impulsif kuvvetlere yol açacak şekilde temas ederse buna çarpışma (impact) denir.
- Çarpışma şartlarındaki ufak değişiklik, çarpışma olayında ve çarpışmayı takip eden kısa anda olan olaylarda büyük değişimlere sebep olabilir.
- Bu nedenle her çarpışmanın kendi şartlarına göre incelenmesi gerekir.

Çarpışma

- Çarpışma konusunu iki başlık altında inceleyeceğiz.
  I. Direkt merkezcil çarpışma
  II. Eğik merkezcil çarpışma

Direkt Merkezcil Çarpışma



Direkt Merkezcil Çarpışma

Hareket sırasında parçacıklara etkiyen net kuvvet sıfır olur. Eğer

$$\sum F = 0 \; ise \; \Delta G = 0 \; dır$$

$$G_1 = G_2$$

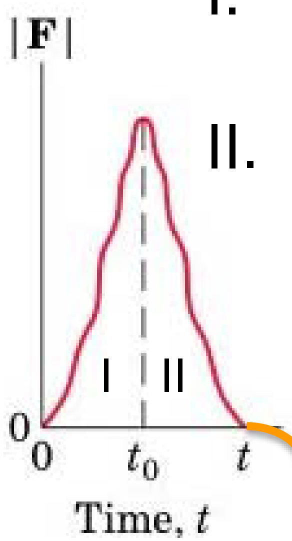
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

v_1', v_2' bilinmeyen, dolayısıyla iki bilinmeyen tek denklem var, yeni bir ilişki daha bulmamız gerek.

Bunun için deformasyon ve restorasyon kavramlarını düşüneceğiz.

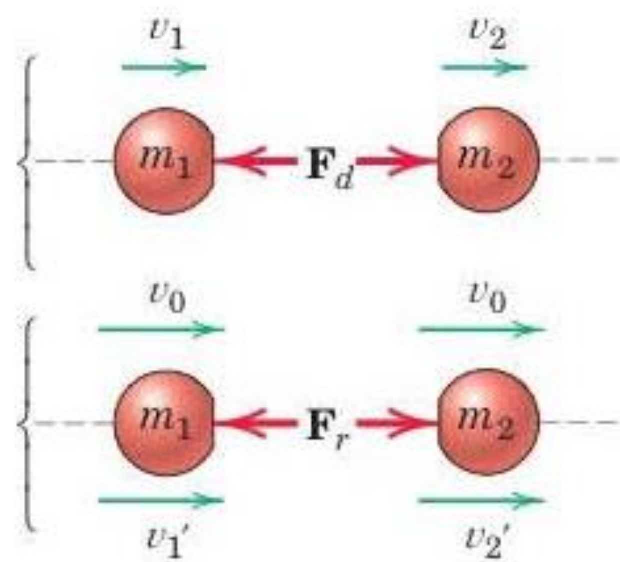
Direkt Merkezcil Çarpışma

- Çarpışma şartlarında; ses, ısı oluşumu ve çarpışan cisimlerde DEFORMASYON (şekil bozukluğu) ve RESTORASYON (eski şeklini alma) gibi kompleks olaylar ortaya çıkar.



I. Deformasyon periyodu
II. Restorasyon periyodu

Ayrılma zamanı



Direkt Merkezcil Çarpışma Geri Sıçrama Katsayısı (e)

- Klasik çarpışma (impact) teorisine göre;
- Hiç enerji kaybı olmayan tam elastik çarpışma için

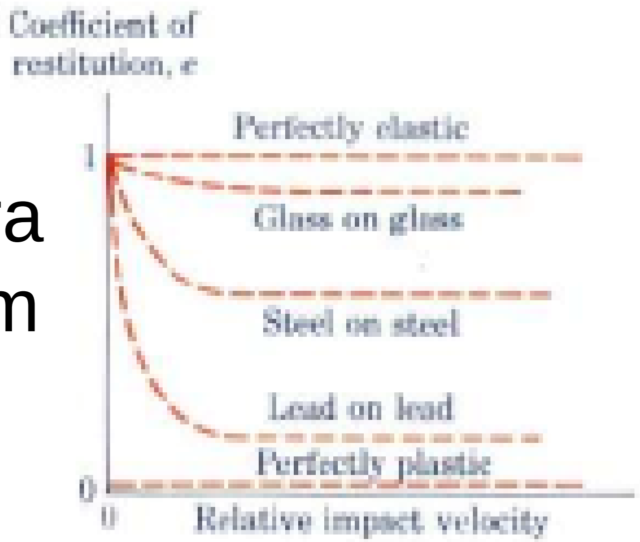
$$e = 1$$

- Diğer taraftan çarpışmadan sonra cisimler birbirine kenetlenirse tam plastik çarpışma olur.

$$e = 0$$

- Genelde ise

$$0 \leq e \leq 1$$



Direkt Merkezcil Çarpışma Geri Sıçrama Katsayısı (e)

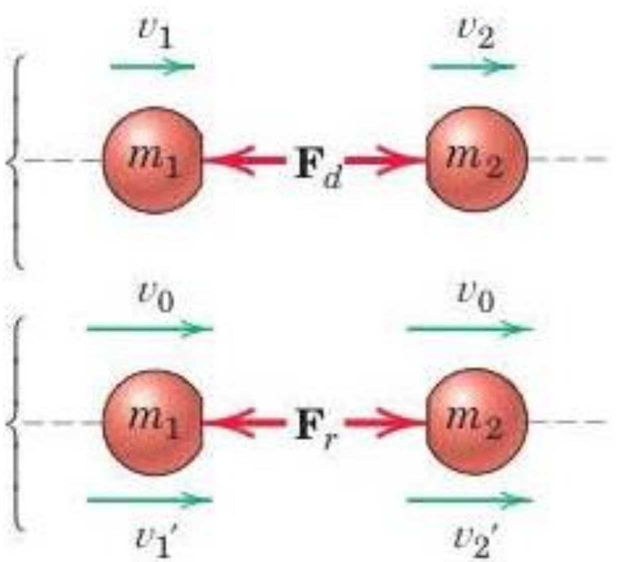
$$e = \frac{Normalleşme\ itkisi}{Deformasyon\ itkisi}$$

Birinci Parçacık için

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r dt}{\int_0^{t_0} F_d dt} = \frac{m_1[-v_1' - (-v_0)]}{m_1[-v_0 - (-v_1)]]} = \frac{v_0 - v_1'}{v_1 - v_0}$$

İkinci Parçacık için

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r dt}{\int_0^{t_0} F_d dt} = \frac{m_2(v_2' - v_0)]}{m_2(v_0 - v_2)} = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2}$$



Direkt Merkezcil Çarpışma Geri Sıçrama Katsayısı (e)

$$e = \frac{v_0 - v_1'}{v_1 - v_0} \; (1); \; e = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2} \; (2)$$

1 ve 2 den bulunan denklemlerden v_0 yok edilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

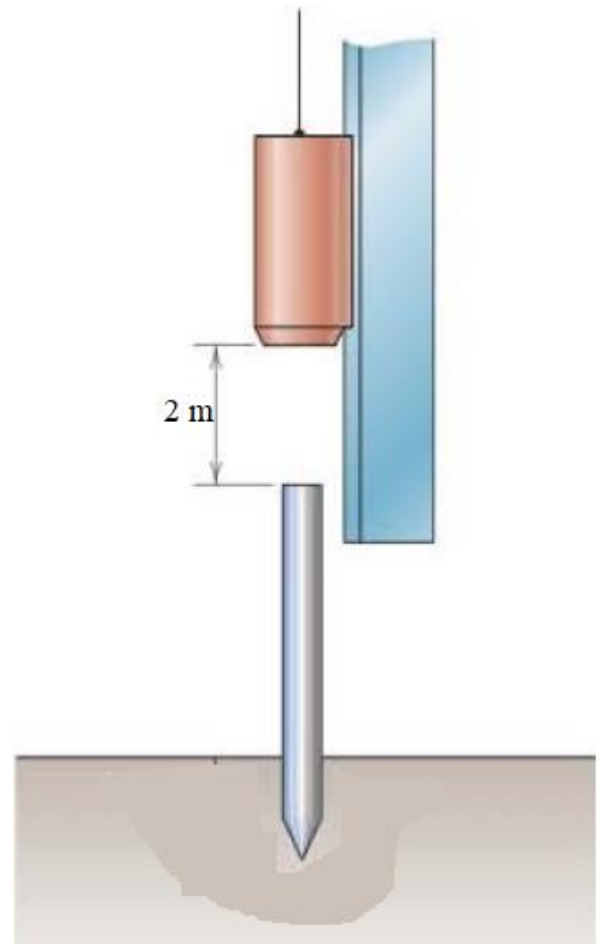
$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

Malzemenin özelliğine göre

$$0 < e < 1$$

Örnek

- Bir kazık çakıcının 800 kg kütlesindeki çekici 2400 kg'lık kazığın üzerine 2 m yükseklikten durgunluktan bırakılıyor. Eğer çekiç çarpışmadan sonra 0.1 m yukarı sıçrarsa:
  - Kazığın çarpışmadan hemen sonra hızını bulun.
  - Geri sıçrama katsayısı (e) yi hesaplayın.
  - Çarpışma sırasındaki enerji kaybını hesaplayın



Örneğin Çözümü

- Çekicin ve kazığın ağırlıkları çarpışma kuvvetinin yanında çok küçük olur.İhmal edilir. Serbest düşmede enerjinin korunumundan çekicin ilk ve son hızını enerjinin korunumundan aşağıdaki gibi elde ederiz.

İlk hız

$$v_y = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 * 9.81 * 2} = 6.2642$$

Sıçramadan sonra çekicin son hızı

$$v_y' = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 * 9.81 * 0.1} = 1.4$$

Örneğin Çözümü

- Kazığın çarpışmadan hemen sonraki hızını bulmak istiyoruz.

$$G_1 = G_2$$

- Haraket miktarının (momentumun) korunumundan çekiç ve kazık tek sistem alınarak

$$m_ç v_y + m_k v_k = m_ç v'_y + m_k v'_k$$

$$800 * 6.2642 + 2400 * (0) = 800 * 1.4 + 2400 * v'_k$$

$$v'_k = 2.55 \text{ m/s}$$

Örneğin Çözümü

- Geri sıçrama katsayısı (e) yi hesaplayalım.

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{v_k' - v_y'}{v_y - v_k} = \frac{2.55 - (-1.4)}{6.2642} = 0.63$$

- Çarpışma sırasındaki enerji kaybını hesaplayın.

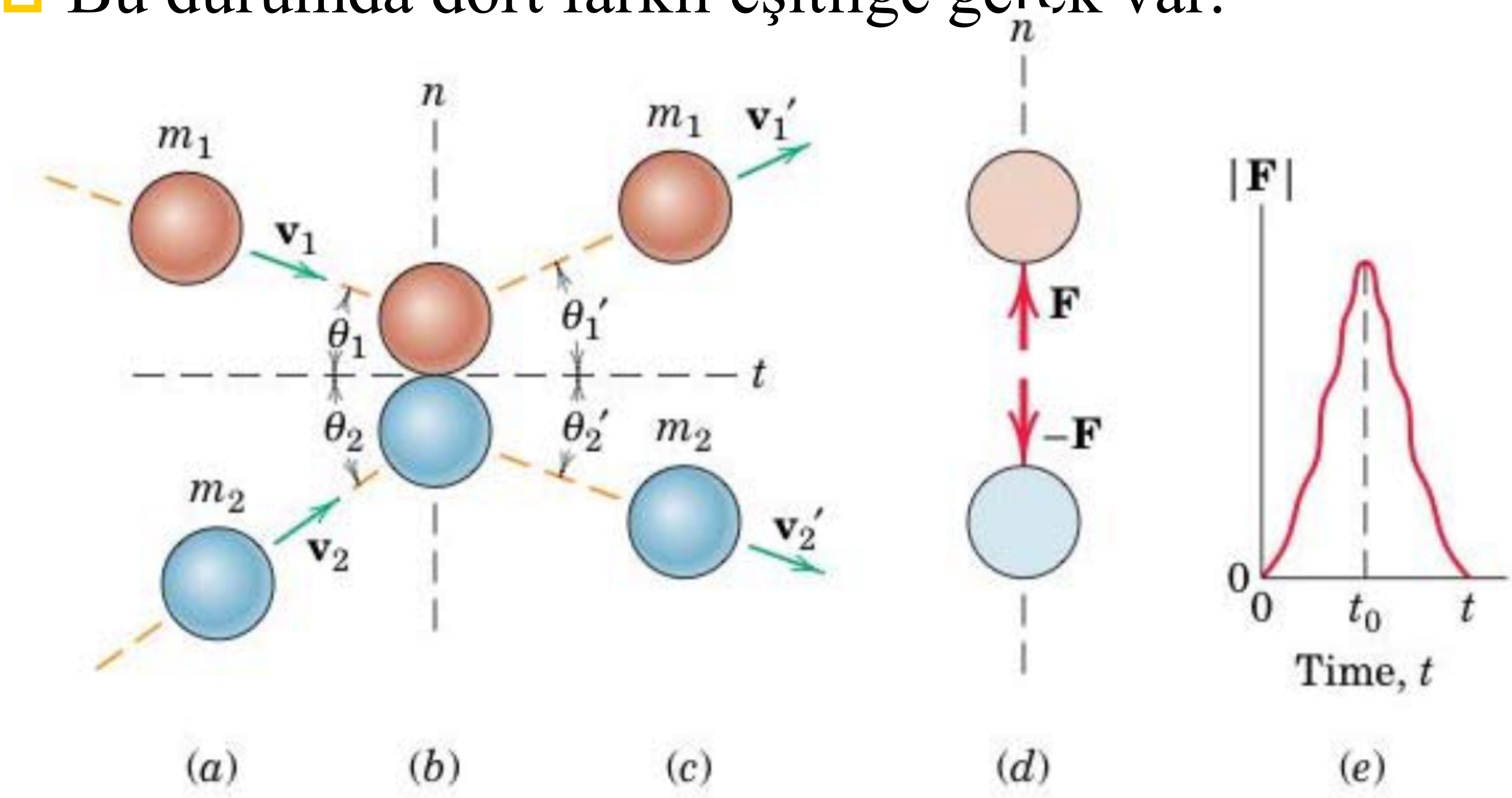
İlk ve son durumda kinetik enerjiler

$$T_{ilk} = \frac{1}{2} m_ç v_y^2 ; T_{son} = \frac{1}{2} m_ç v_y'^2 + \frac{1}{2} m_k v_k'^2$$

$$Kayıp\ Enerji\ Oranı = \frac{T_{ilk} - T_{son}}{T_{ilk}}$$

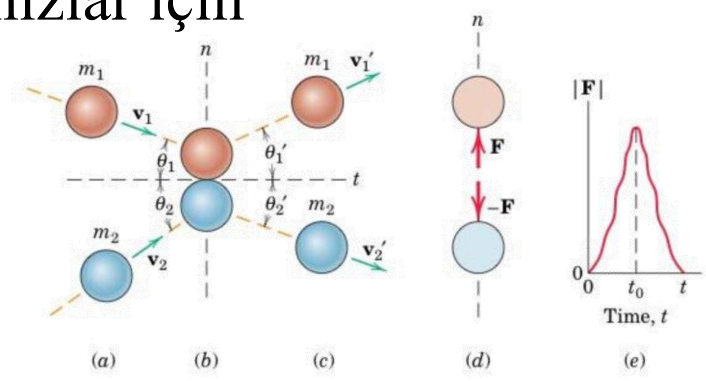
Eğik Merkezcil Çarpışma

- Dört bilinmeyen $v_1', v_2', \theta_1', \theta_2'$ var.
- Bu durumda dört farklı eşitliğe gerek var.

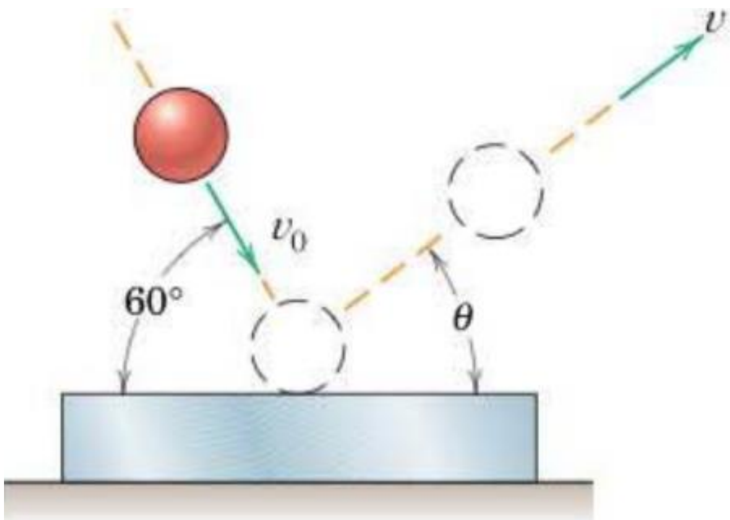


Eğik Merkezcil Çarpışma

- Dört bilinmeyen $v_1', v_2', \theta_1', \theta_2'$ var. Dört farklı eşitlik şu şekilde bulunur..
- n- yönünde momentum korunumludur (1), dolayısıyla
$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$
- Her iki parçacığın teğetsel yönde hızları değişmez (2) ve (3)
$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t$$
$$m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t$$
- Geri sıçrama katsayısı normal yöndeki hızlar için yazılabilir(4)
$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$



Örnekler



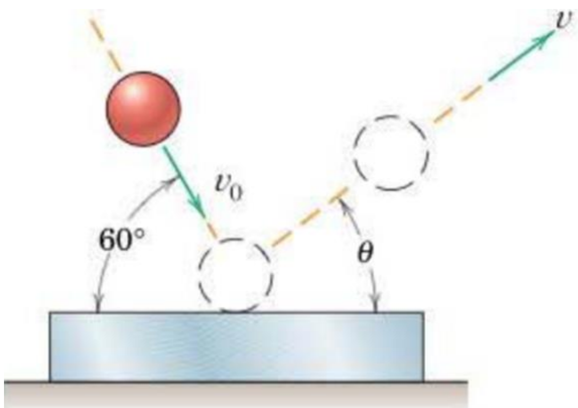
Örnek 1: Çelik top 60^0 açı ve $v_0 = 24\ m/s$ hızla ağır bir çelik levhaya çarpmaktadır.

Eğer geri sıçrama katsayısı $e = 0.8$ ise topun çarpışmadan sonraki hızını ve açısını hesaplayınız.

Örnekler

Örnek 1’in Çözümü

- Çelik levha hareket etmiyor onun hızları sıfırı



$$m_1 v_0 cos60 = m_1 v cos\theta$$

$$v cos\theta = v_0 cos60 = 12$$

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} = \frac{-(v_1')_n}{(v_1)_n}$$

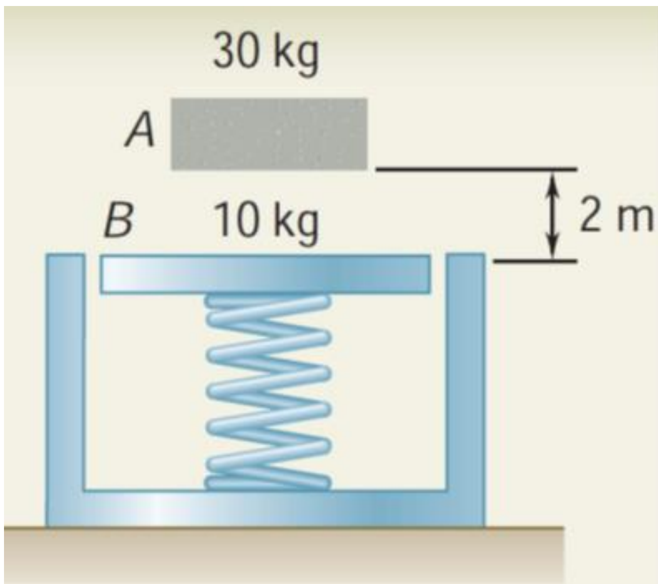
$$0.8 = \frac{-(v sin\theta)}{-v_0 sin60}$$

$$\Longrightarrow v sin\theta = 16.62$$

$$\tan\theta = \frac{v sin\theta}{v cos\theta} = \frac{16.62}{12} \Longrightarrow \theta = 54.18°$$

$$\Longrightarrow v = \frac{16.62}{sin\theta} = 20.5\, m/s$$

Örnekler

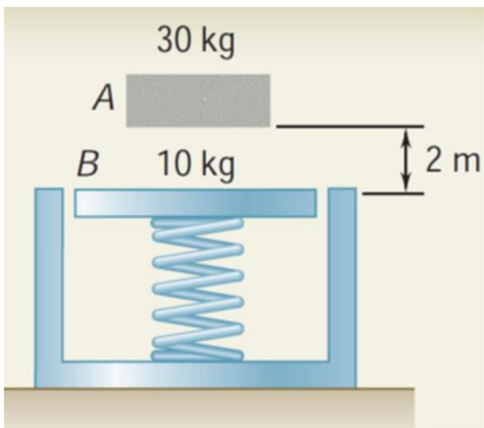


- Örnek 2: 30 kg'lık bir blok 2 m yükseklikten 10 kg'lık çelik yayla zemine bağlanmış bir levhanın üzerine düşüyor. Çarpışmanın tamamen **plastik** olduğunu varsayalım. Yay sabiti k=20 kN/m ise yay-levha sisteminin maksimum çökme miktarını hesaplayınız.

Örnekler

Örnek 2'nin Çözümü

Çözüm Yolu;



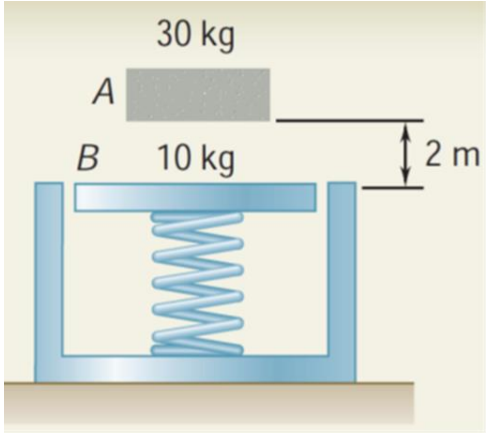
- Sistemin tüm hareketini 3 parçaya ayıracağız.

I. Düşmeden hemen çarpışma öncesine kadar olan süreç (Enerjinin Korunumu).

II. Çarpışma anı (Momentumun Korunumu)

III. Çarpışmanın hemen ardından sistemin yeni dengesine gelmesi süreci (Enerjinin Korunumu)

Örnekler



Örnek 2'nin Çözümü

Düşmeden hemen çarpışma öncesine kadar olan süreç (Enerjinin Korunumu).

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow$$

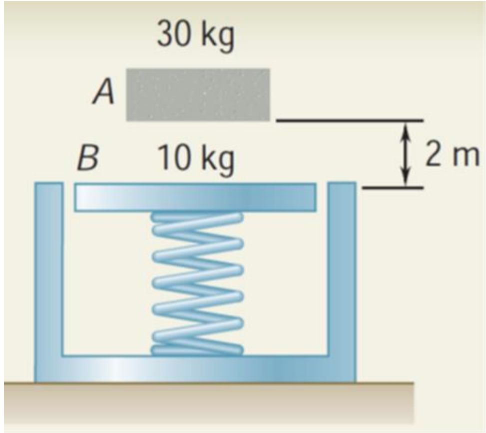
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 2} = 6.26\frac{m}{s}$$

$$v = 6.26\frac{m}{s}$$

Örnekler

Örnek 2'nin Çözümü

Çarpışma anı (Momentumun Korunumu)

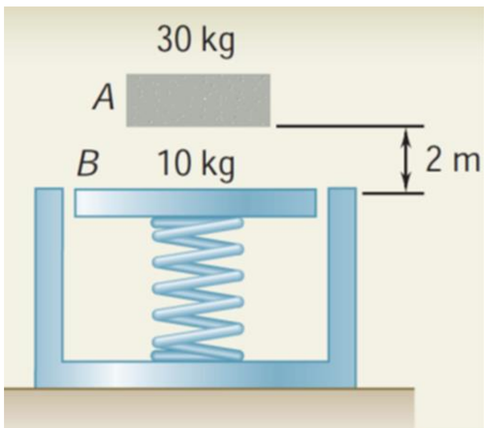


$$m_{blok}v = m_{top}v'$$

$$\Longrightarrow v' = \frac{m_{blok}v}{m_{top}} = \frac{30 \cdot 6.26}{(30+10)} = 4.7\frac{m}{s}$$

$$v' = 4.7\frac{m}{s}$$

Örnekler



Örnek 2'nin Çözümü

Çarpışmanın hemen ardından sistemin yeni dengesine gelmesi süreci (Enerjinin Korunumu)

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0$$

$$\Delta T = 0 - \frac{1}{2} m_{top} v'^2$$

$$\Longrightarrow \Delta T = -\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4.7^2 = -442\ Nm$$

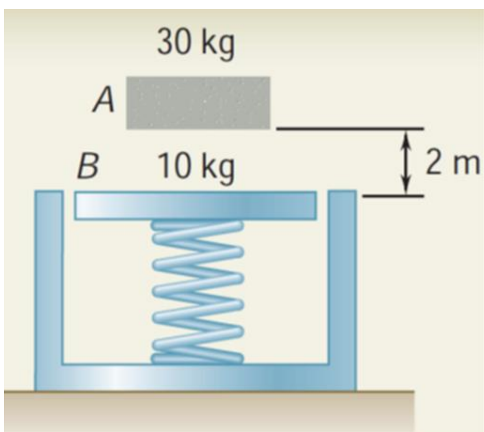
$$\Delta V_g = -m_{top} \cdot \mathrm{g} \cdot h_2 = -40 \cdot 9.81 \cdot h_2$$

Burada

$$h_2 = \delta - \delta_0 \Longrightarrow \delta = h_2 + \delta_0$$

Örnekler

Örnek 2'nin Çözümü



Deformasyonların hesabı

δ_0 ilk durumda 10 kg'luk yük altında yayın deformasyonu

$$W_{blok} = m_{blok}\mathrm{g} = \mathrm{k}\delta_0$$

$$\Longrightarrow \delta_0 = \frac{m_{blok}\mathrm{g}}{\mathrm{k}} = 4.905\mathrm{x}10^{-3}$$

δ ikinci durumda 40 kg'luk yük altında yayın deformasyonu

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k\left(\delta^2 - {\delta_0}^2\right) = \frac{1}{2}k\left((h_2 + \delta_0)^2 - {\delta_0}^2\right)$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(h_2^2 + 2h_2\delta_0) = 10000h_2^2 + 98.1h_2$$

Örnekler

Örnek 2'nin Çözümü

Enerjinin Korunumunu yazalım

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0$$

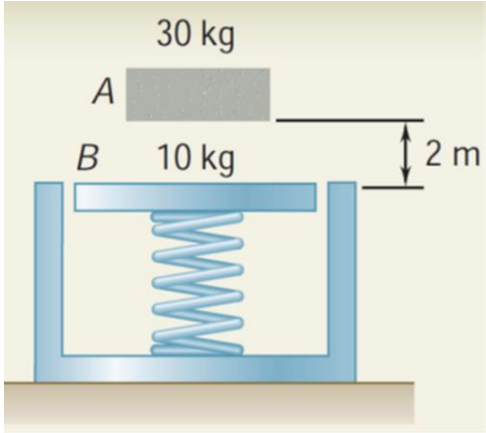
$$\Delta T = -442\ Nm$$

$$\Delta V_g = -40 \cdot 9.81 \cdot h_2$$

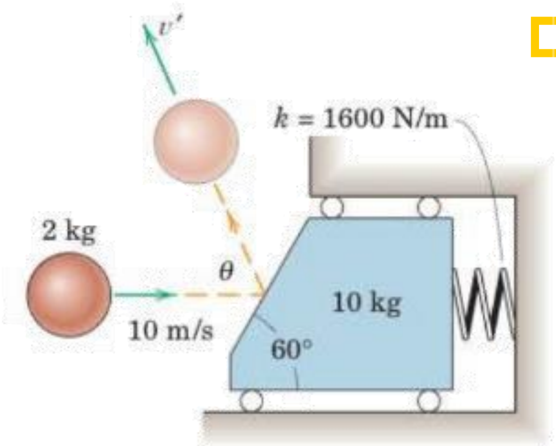
$$\Delta V_e = 10000h_2^2 + 98.2h_2$$

$$U = 0 \Longrightarrow 10000h_2^2 - 294.3h_2 - 442 = 0$$

$$h_2 = 0.225\ m$$

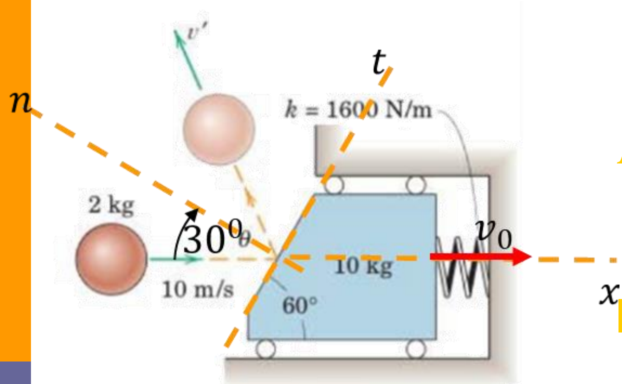


Örnekler



- Örnek 3: 2 kg'lık küre 10 m/s'lik bir hızla yatay olarak gelip 1600N/m yay sabitine sahip yayla sabitlenmiş 10 kg'lık arabaya çarparak sıçrıyor. İlk durumda arabanın bağlı olduğu yay sıkışık değil. Eğer geri sıçrama katsayısı e=0.6 ise kürenin sıçrama hızını v', sıçrama açısını θ ve çarpmaya bağlı yaydaki deformasyonu δ bulunuz.

Örnekler



Örnek 3'ün Çözüm Yolu

- Bulmamız gereken değerler $v', \theta \; ve \; \delta$

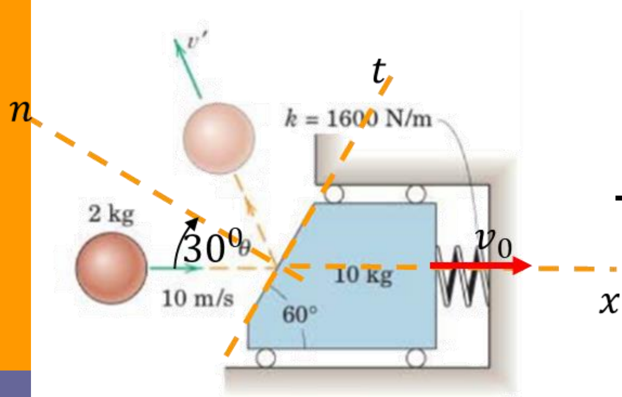
I. x yönünde momentumun korunumunu yazacağız.

II. t yönünde momentumun korunumunu yazacağız

III. Geri sıçrama katsayısının denklemini yazacağız. Bu üç denklemden $v', \theta \; ve \; v_0$'yu bulacağız.

IV. Çarpışmanın ardından araba için enerjinin korunumunu yazarak yaydaki deformasyonu δ bulacağız.

Örnekler



Örnek 3'ün Çözümü

Tüm sistem için x yönünde momentumun korunumunu yazalım.

$$m_{top} v + 0 = m_{araba} v_0 + m_{top} v' cos\theta$$

$$2 * 10 = 10 v_0 - 2 v' cos\theta \quad (1)$$

Topun t- teğetsel yönde hızı değişmez

$$m_{top} (v)_t = m_{top} (v')_t$$

$$v sin 30 = v' \sin(\theta - 30) \quad (2)$$

Geri sıçrama katsayısı normal yöndeki hızlar için yazılabilir

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \Longrightarrow 0.6 = \frac{v_0 cos 30 + v' cos(\theta - 30)}{10 cos 30 - 0}$$

$$5.196 = v_0 cos 30 + v' cos(\theta - 30) \qquad (3)$$

$$10 = 5v_0 - v'cos\theta \quad (1)$$
$$5 = v'\sin(\theta - 30) \qquad (2)$$
$$5.196 = v_0cos30 + v'cos(\theta - 30) \qquad (3)$$

- Yukarıdaki denklemlerden $v', \theta\ ve\ v_0$’nun bulunması

(2) ve (3)’ü düzenleyelim

$$5 = v'\sin\theta\, cos30 - v'sin30cos\theta$$
$$5.196 = v_0cos30 + v'\cos\theta\, cos30 + v'sin30sin\theta$$

Bilinen değerleri yerine yazalım.

$$5 = 0.86v'\sin\theta - 0.5v'cos\theta \quad (2')$$
$$5.196 = 0.86v_0 + 0.86v'\cos\theta + 0.5v'sin\theta \; (3')$$

(1) Denkleminden

$$v_0 = 2 + \frac{1}{5}v'cos\theta \;\; (1')$$

(1’) denklemi (3’)’da yerine konulur.

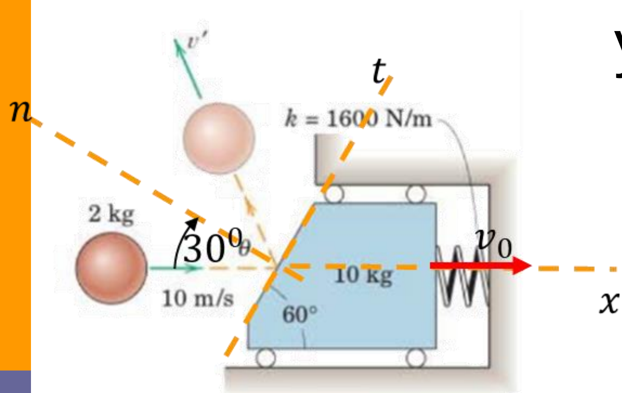
$$3.476 = 1.32v'\cos\theta + 0.5v'sin\theta \;\; (3'')$$

$$5 = 0.86v' \sin\theta - 0.5v' cos\theta$$
$$3.476 = 1.32v' \cos\theta + 0.5v' sin\theta$$

- Yukarıdaki denklemlerden v', θ'nun bulunması

$$\frac{5}{0.86 \sin\theta - 0.5 cos\theta} = \frac{3.476}{1.32 \cos\theta + 0.5 sin\theta}$$
$$6.6 \cos\theta + 2.5 sin\theta = 2.99 \sin\theta - 1.738 cos\theta$$
$$6.6 \cos\theta + 2.5 sin\theta - 2.99 \sin\theta + 1.738 cos\theta = 0$$
$$8.338 \cos\theta - 0.49 \sin\theta = 0$$
$$\frac{8.338}{0.49} = \tan\theta \Longrightarrow \theta = 86.6^0$$
$$v' = \frac{5}{0.86 \sin\theta - 0.5 cos\theta} = 6.03\ m/s$$
$$v_0 = 2 + \frac{1}{5} v' cos\theta \Longrightarrow v_0 = 2.07\ m/s$$

Örnekler



Örnek 3'ün çözümü Devam

Son olarak çarpışmanın ardından araba için enerjinin korunumunu yazarak yaydaki deformasyonu δ bulacağız.

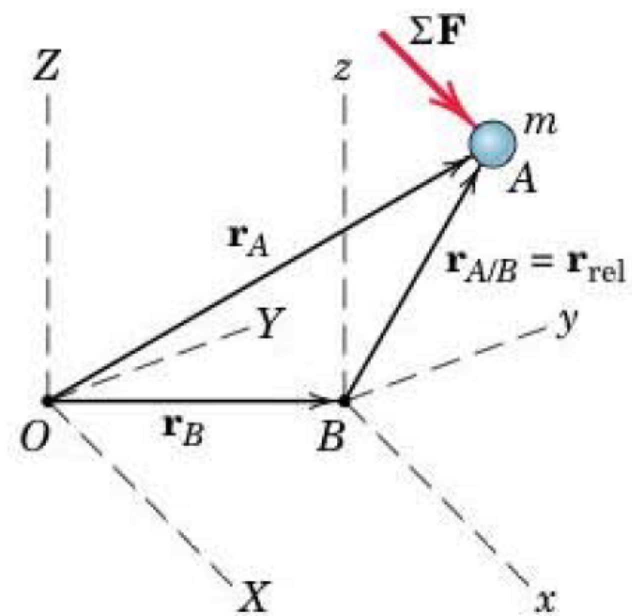
$$\frac{1}{2} m_{araba} v_0^2 = \frac{1}{2} k\delta^2$$

$$10 * 2.07^2 = 1600\delta^2$$

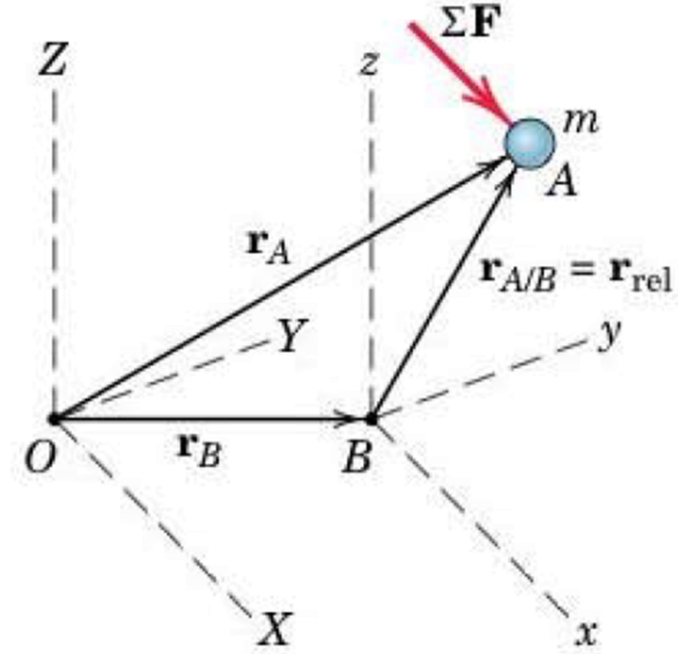
$$\delta = 0.164\, m = 164\, mm$$

Özel Uygulamalar
Bağıl Hareket

- Şimdiye kadar, Newton'un ikinci kanununu, iş-enerji eşitliklerini ve impuls-momentum eşitliklerini sabit eksen takımı kullanarak çözdük.
- Bu bölümde, m kütlesindeki bir noktasal cismin hareketli x-y-z ve sabit X-Y-Z eksen takımlarına göre hareketini inceleyeceğiz.



Bağıl Hareket

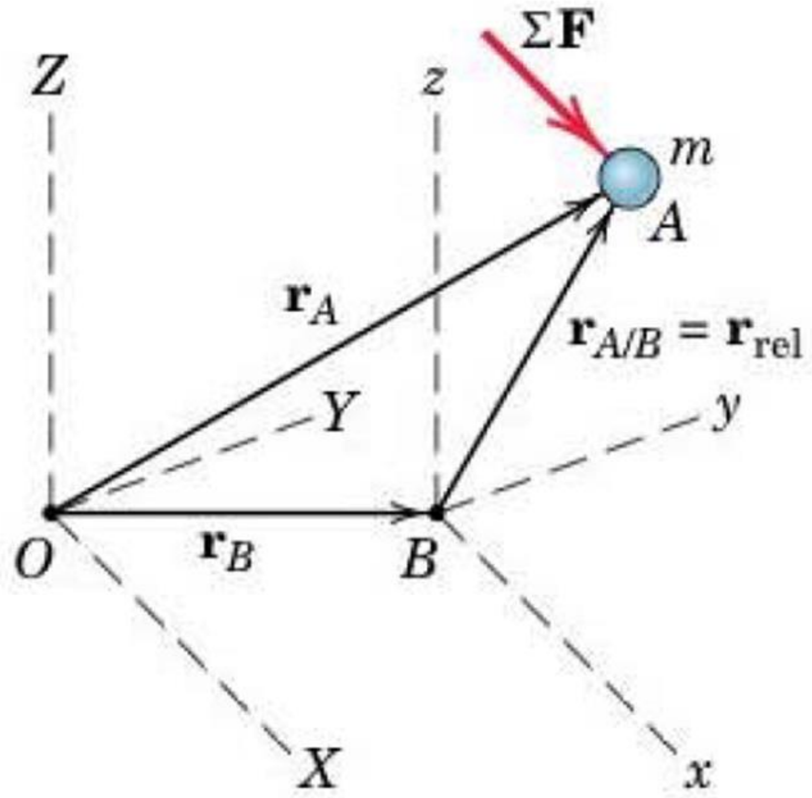


$$r_A = r_B + r_{A/B}$$

$$\dot{r}_A = \dot{r}_B + \dot{r}_{A/B} \text{ ya da } v_A = v_B + v_{A/B}$$

$$\ddot{r}_A = \ddot{r}_B + \ddot{r}_{A/B} \text{ ya da } a_A = a_B + a_{A/B} \text{ ya da } a_A = a_B + a_{rel}$$

Bağıl Hareket



Newton'un 2. yasası

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_A$$

$$\sum \vec{F} = m(\vec{a}_B + \vec{a}_{rel})$$

Eğer $\vec{a}_B$=0 ise

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{rel}$$

Sabit Hızla Ötelenen Sistemler

$\vec{a}_B$=0 , $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{rel}$

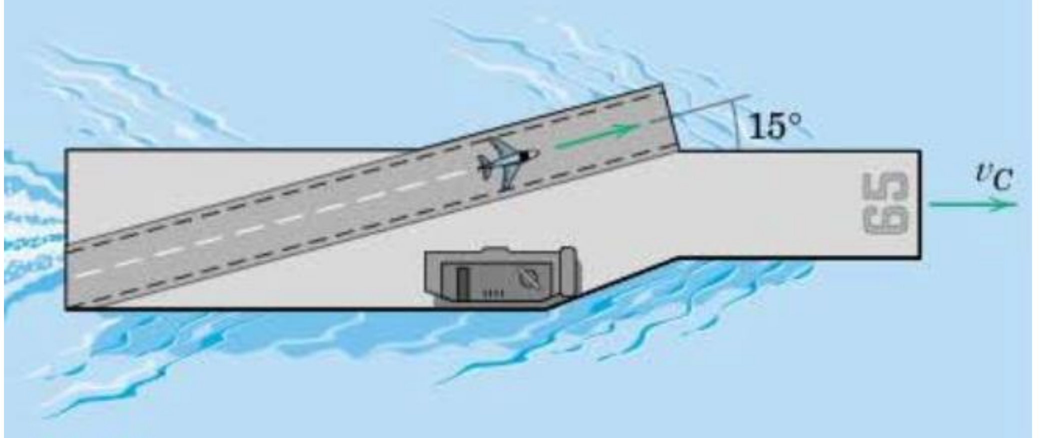
$U_{rel} = \Delta T_{rel}$ burada $U_{rel} = \int \sum \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}_{rel}$

$$T_{rel} = \frac{1}{2} m (v_{rel})^2$$

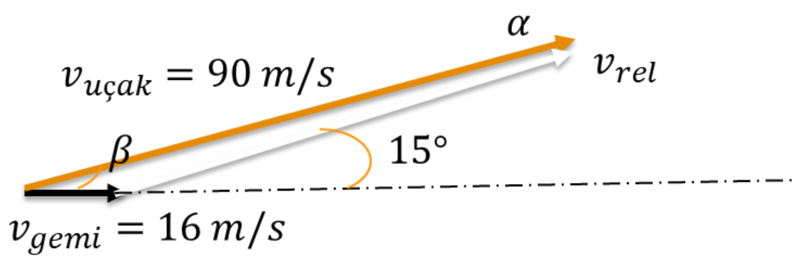
$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}_{rel} \text{ ya da } \int \sum \vec{F}\, dt = \Delta \vec{G}_{rel} \;\; burada\; \vec{G}_{rel} = m\vec{v}_{rel}$$

Örnekler

- Örnek 1: Uçak gemisinin fırlatma rampası $7\ ton$ kütleli uçağa sabit ivme vererek, uçağın kalkış hızı olan $v_{uçak} = 90\ m/s$ mutlak hız ile $100\ m$'lik yatayla $15°$ açı yapan pistten kalkmasını sağlamaktadır. Uçak gemisinin hızı ise sabit gösterilen yönde $v_{gemi} = 16\ m/s$ dir. Fırlatma rampasının uçağa uyguladığı net kuvveti bulunuz.



Örnek 1'in çözümü



$$(v_{rel})^2 = (v_{gemi})^2 + (v_{uçak})^2 - 2 \cdot v_{gemi} \cdot v_{uçak} \cdot \cos(\beta)$$

$$\frac{\sin 165}{90} = \frac{\sin \alpha}{16} \Longrightarrow$$

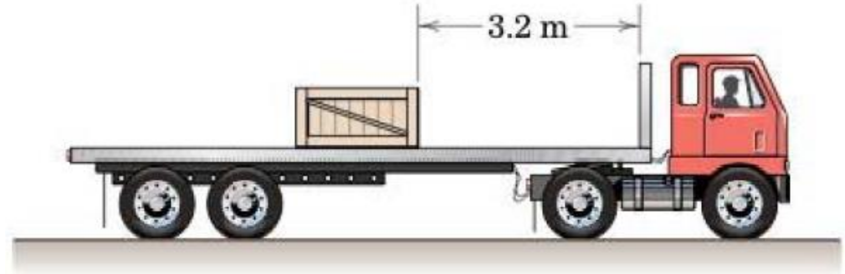
$$\alpha = 2.64 \Longrightarrow \beta = 180 - 165 - 2.64 = 12.36^0$$

$$v_{rel} = 74.45 \text{ m/s}$$

$$U_{rel} = \Delta T_{rel}$$

$$F \cdot d = \frac{1}{2} m (v_{rel})^2 \Longrightarrow F = \frac{0.5 * 7000 * (74.45)^2}{100} = 194kN$$

Örnekler



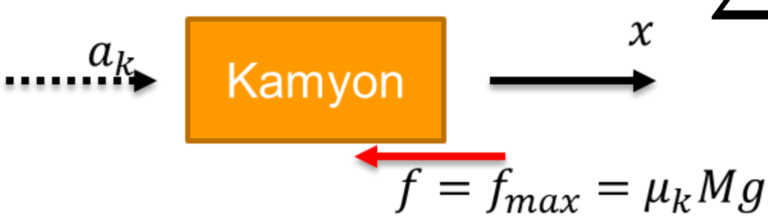
- Örnek 2: Kasasında yük taşıyan bir kamyon $15\ m/s$ sabit hızla ilerlerken ani (maksimum: tekerler kitlenir ve kayar) fren yaparak duruyor. Yük ile kasa arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları sırasıyla $\mu_s = 0.8$ ve $\mu_k = 0.7$ olarak verilmektedir. Tekerlerle yol arasındaki sürtünme katsayısı ise $\mu_k = 0.9$ dur. Frenleme sırasında yükün kamyona göre bağıl hareketi için ne söylenebilir.

a) Yük hareketsiz durur mu

b) Biraz hareket eder durur mu

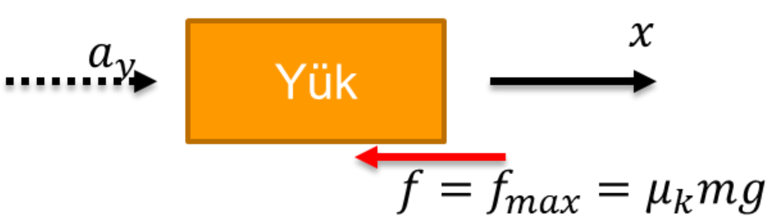
c) kamyona göre bağıl v_{rel} hızıyla $3.2\ m$ ilerisindeki kasa duvarına mı çarpar ve bu durumda hızı ne kadar olur.

Örnek 2’nin çözümü



$$\sum \vec{F} = M\overrightarrow{a_k}; \quad -f_{max} = \mu_k M g = M a_k$$

$$-\mu_k g = a_k = -0.9 g \; m/s^2$$



$$\sum \vec{F} = m\overrightarrow{a_y}; \quad -f_{max} = \mu_k m g = m a_y$$

$$-\mu_k g = a_y = -0.7 g \; m/s^2$$

Örnek 2'nin çözümü devam

Yükün kamyona göre bağıl ivmesi

$$a_y = a_k + a_{y/k} \Longrightarrow a_{\frac{y}{k}} = a_y - a_k = -0.7g - (-0.9g) = 0.2g$$

Kamyon hareket ettiği sürece yükün kamyona göre bağıl ivmesi $0.2g$ dolayısıyla yükün durmadığı hareket ettiği anlaşılıyor. Yük kamyon durana kadar bu ivme ile hareket edecek, Peki kamyon ne kadar sürede durur.

$$v = v_0 + a_k t_{durma} \Longrightarrow$$

$$0 = 15 - 0ı9 g t_{durma} \Longrightarrow t_{durma} = 1.699\ s$$

Örnek 2'nin çözümü devam

Bu zaman süresince yük kamyonun kasasında kamyona göre ne kadar yol almıştır

$$X_{y/k} = \left(X_{y/k}\right)_0 + \left(v_{y/k}\right)_0 t_{durma} + \frac{1}{2} a_{y/k} (t_{durma})^2$$

$$X_{y/k} = 2.83\ m$$

$$v_{y/k} = \left(v_{y/k}\right)_0 + \left(a_{y/k}\right)_0 t_{durma}$$

$$v_{y/k} = 3.33\ m/s$$

Örnek 2'nin çözümü devam

- Yük kamyon durduktan sonrada bir süre $v_{y/k} = 3.33\, m/s$ ilk hızı ve $a_{y/k} = a_y = -0.7g$ yavaşlama ivmesiyle hareketine devam edecektir. Yükün önünde duvar olduğuna göre duvara çarpacağını düşünebiliriz. Son durumda duvara olan uzaklığı

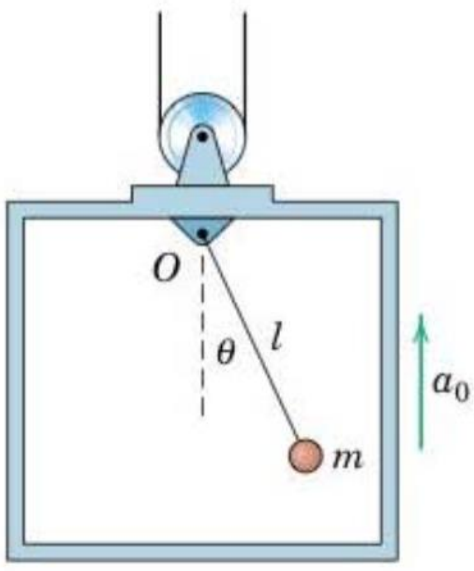
$$X = s - X_{y/k} = 3.2 - 2.83 = 0.37\, m$$

Çarpma hızı

$$v_c{}^2 = v_{c_0}{}^2 + 2a_y \cdot X$$

$$v_c = 2.46\, m/s$$

Örnek 3



Şekilde görüldüğü gibi yukarı doğru a_0 ivmesiyle hareket eden asansörün tavanına basit bir sarkaç bağlanmıştır.

Eğer sarkaç θ_0 açısıyla durgunluktan harekete başlatılırsa ipteki T_0 gerilmesini $\theta = 0$ için bulunuz.

Bulduğunuz sonucu $\theta_0 = \pi/2$ için değerlendiriniz.

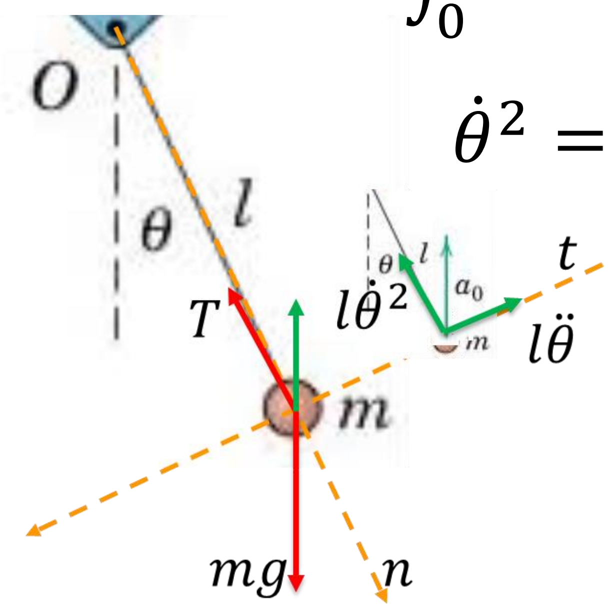
Örnek 3'ün çözümü

$$\sum F_t = ma_t \Longrightarrow -mgsin\theta = m\left(l\ddot{\theta} + a_0 sin\theta\right)$$

$$\Longrightarrow \ddot{\theta} = -\left(\frac{a_0 + g}{l}\right) sin\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\,\dot{\theta} = -\int_{\theta_0}^{\theta} -\left(\frac{a_0 + g}{l}\right) sin\theta d\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = 2\left(\frac{a_0 + g}{l}\right)(cos\theta - cos\theta_0)$$



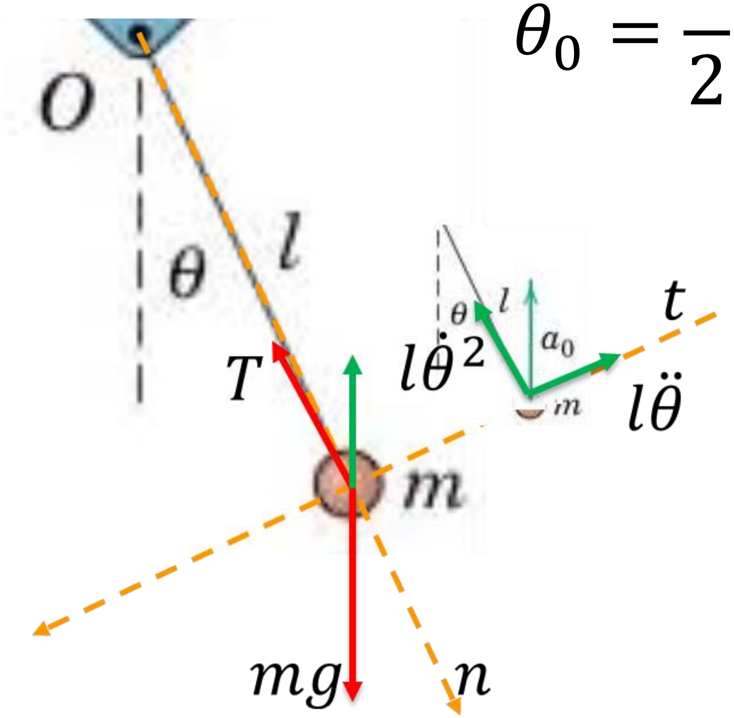
Örnek 3'ün çözümü devam

$$\sum F_n = ma_n \Longrightarrow T - mgcos\theta = m\left(l\dot{\theta}^2 + a_0 cos\theta\right)$$

$$\Longrightarrow T = m(g + a_0)(3cos\theta - 2cos\theta_0)$$

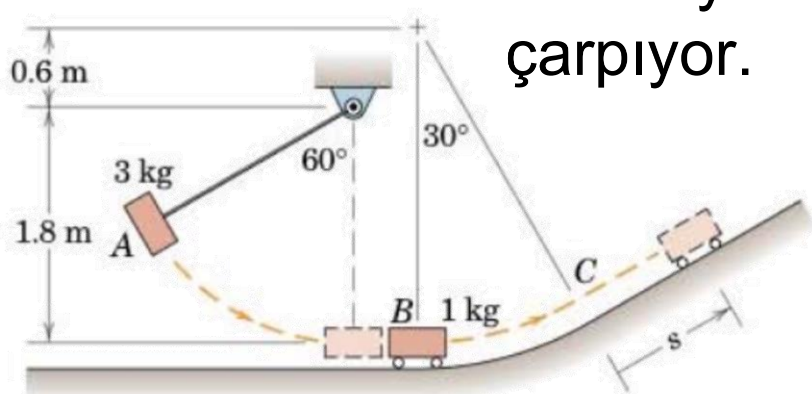
$$\theta = 0 \Longrightarrow T_0 = m(g + a_0)(3 - 2cos\theta_0)$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow T_0 = 3m(g + a_0)$$



Örnek 4

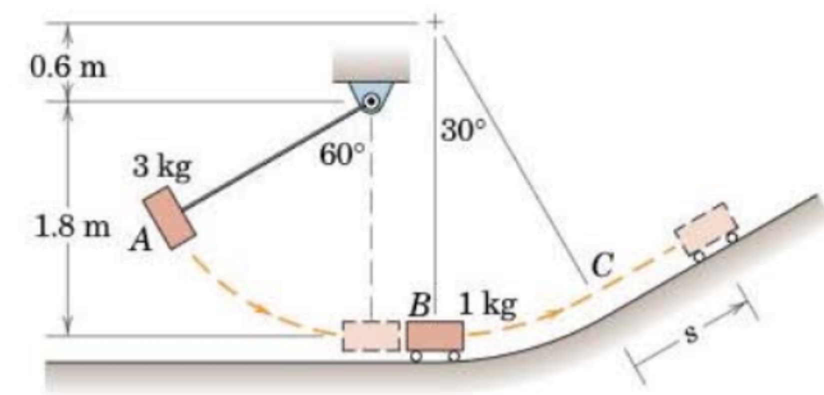
$3\ kg$'lık A bloğu resimde gösterilen 60^0 pozisyonundan durgunluktan serbest bırakılıyor ve akabinde $1\ kg$'lık B arabasına çarpıyor.



Eğer çarpışma sırasındaki geri sıçrama katsayısı $e = 0.7$ ise B arabasının çarpışma sonrası yapacağı s ile gösterilen yolu bulunuz. Sürtünmeler ihmal edilebilir.

Örnek 4'ün çözümü

- Çözüm yolu
  - A cisminin çarpışmadan hemen önceki hızını bul.
  - Momentumun korunumundan çarpışma sonrası hızlarla ilgili bir eşitlik bul
  - Verilen geri sıçrama katsayısını kullanarak çarpışma sonrası hızlarla ilgili bir eşitlik daha bul
  - B cisminin durana kadar enerjinin korunumunu yaz ve kat edeceği mesafeyi bul.



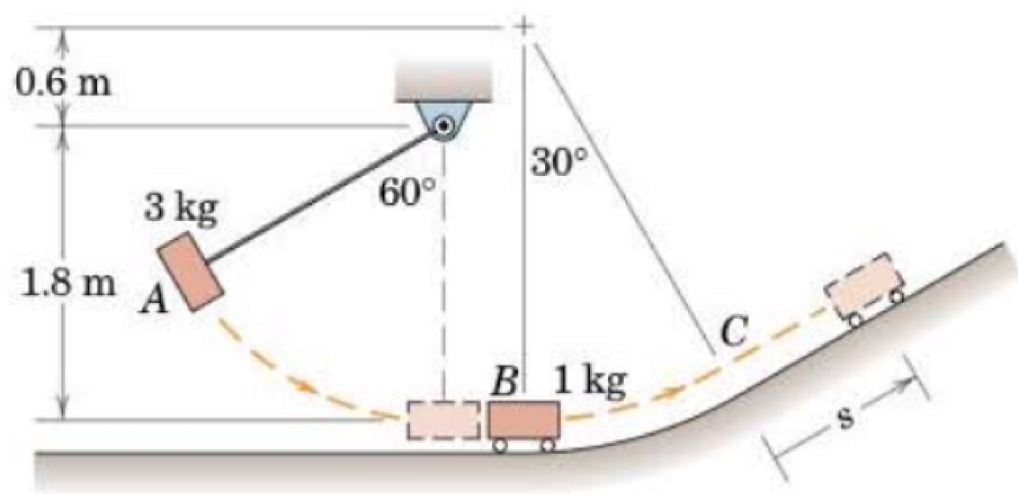
Örnek 4'ün çözümü

- Çözüm
  - A cisminin çarpışmadan hemen önceki hızını bul.

$$\Delta T = \Delta V_g \Longrightarrow 0 - \frac{1}{2} m_A v_A^2 = -m_A g 1.8(1 - cos\theta)$$

$$v_A^2 = 2g1.8(1 - cos\theta) \Longrightarrow v_A = \sqrt{3.6g(1 - cos\theta)}$$

$$v_A = 4.20\, m/s$$



Örnek 4’ün çözümü

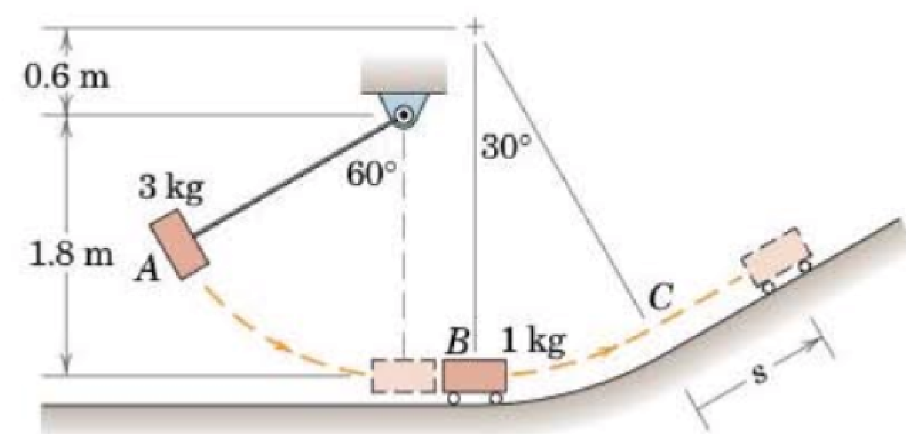
- Çözüm devam
  - Momentumun korunumundan çarpışma sonrası hızlarla ilgili bir eşitlik bul ve Verilen geri sıçrama katsayısını kullanarak çarpışma sonrası hızlarla ilgili bir eşitlik daha bul

$$m_A v_A + 0 = m_A v_A' + m_B v_B' \Longrightarrow 3 * 4.2 = 3v_A' + v_B'$$

$$e = \frac{v_B' - v_A'}{v_A - 0} \Longrightarrow 0.7 * 4.2 = v_B' - v_A'$$

$$v_A' = 2.415\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_B' = 5.355\,\frac{m}{s}$$

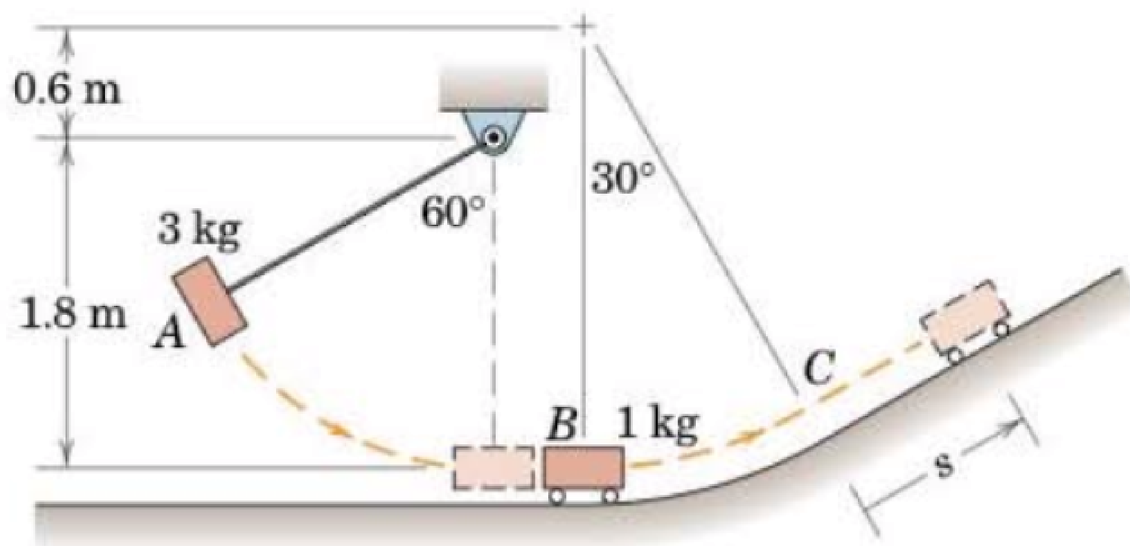


Örnek 4'ün çözümü

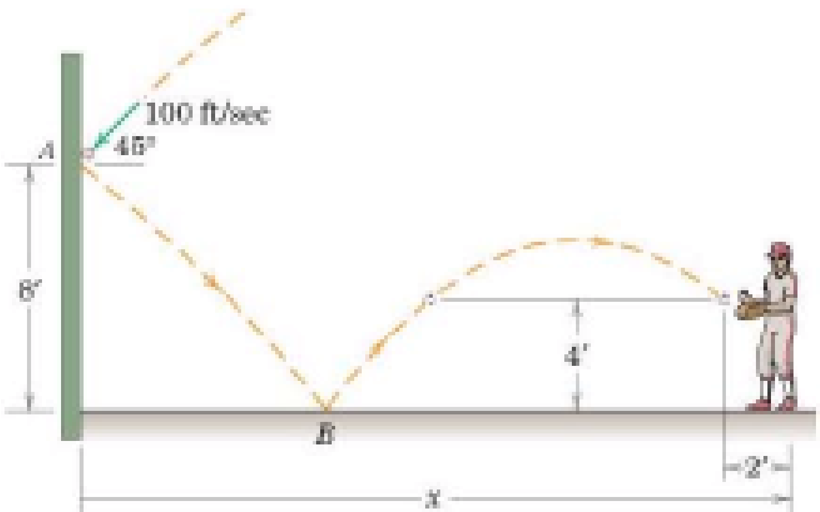
- Çözüm son
  - B cisminin durana kadar enerjinin korunumunu yaz ve kat edeceği mesafeyi bul.

$$\Delta T = \Delta V_g \Longrightarrow \frac{1}{2} m_B {v'_B}^2 - 0 = m_B g 2.4(1 - cos30 + s * sin30)$$

$$s = 2.33\ m$$



Örnek 5



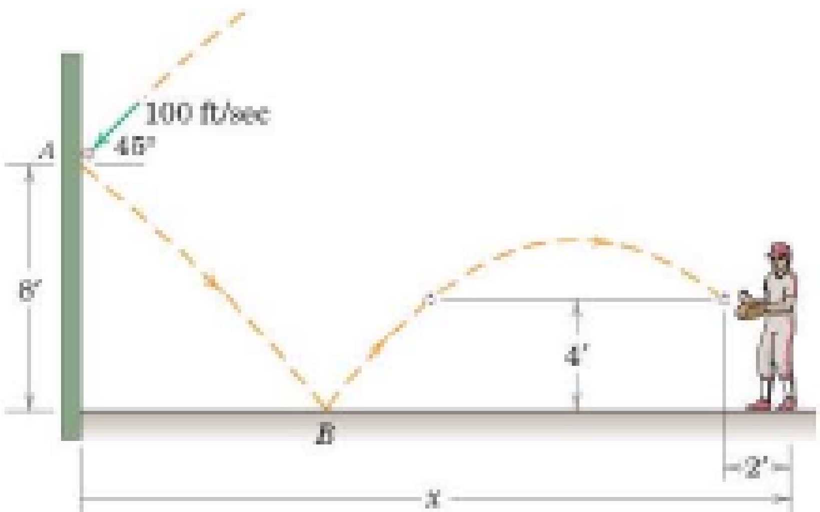
Oyun sırasında fırlatılan top A noktasında $(e_1 = 0.5)$ duvara B noktasında $(e_2 = 0.3)$ yere çarpıyor.

Oyuncu topu kendisinden $2\ ft$ önde ve yerden $4\ ft$ yükseklikte tutuyor.

Problem x ile gösterilen mesafenin bulunması istenmektedir.

İki olası çözüm olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 5’in Çözümü



Çözüm Yolu

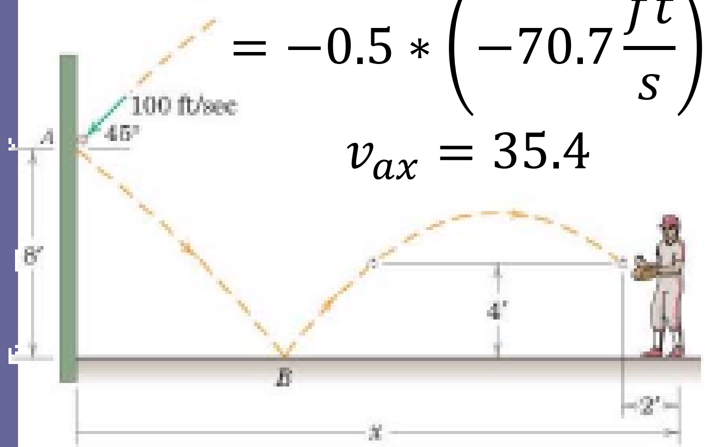
a) Topun duvara çarptıktan sonraki hızı $(e_1 = 0.5)$
b) Topun yere düşme hızı ve zamanı
c) Yere çarptıktan sonraki hızı $(e_2 = 0.3)$
d) Sıçradıktan sonra $4\ ft$ yüksekliğe ulaşma hızı zamanı
e) Problem x ile gösterilen mesafenin iki durum içi bulunması

Örnek 5'in Çözümü

$$v_x = -100cos45 = -70.7\frac{ft}{s};$$
$$v_y = -100sin45 = -70.7\frac{ft}{s};$$

a.) duvara çarptıktan sonra x yönündeki hız değişecek y yönündeki hız aynı kalacaktır.

$$v_{ay} = v_y = -70.7\frac{ft}{s}$$
$$v_{ax} = -e_1 * v_x$$
$$= -0.5 * \left(-70.7\frac{ft}{s}\right)$$
$$v_{ax} = 35.4$$

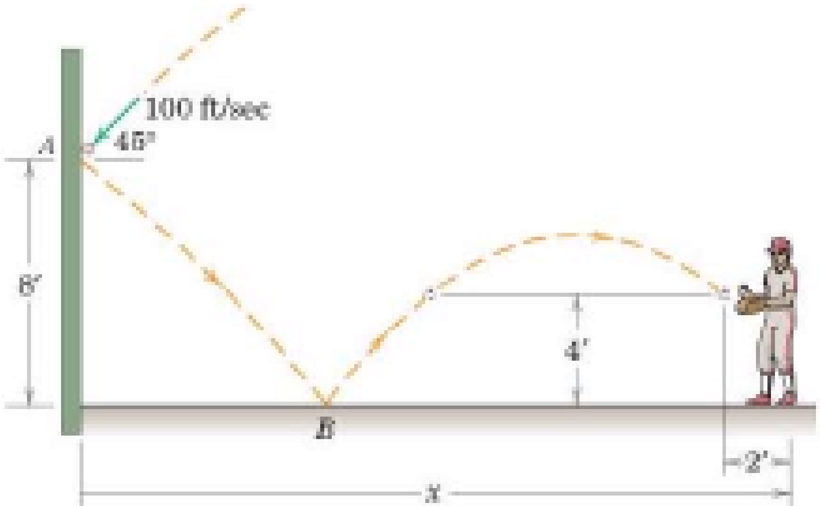


Çözüm Yolu

b.) Topun yere düşme hızı enerjini korunumundan bulunur. Bu sefer x yönündeki hız sabit kalır y yönündeki hızı yerçekimi ivmesinin etkisi ile değişir.

$$v_{bx} = v_{ax}$$
$$\Delta T = \Delta V_g \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{2}mv_{by}^2 - \frac{1}{2}mv_{ay}^2 = mg8$$
$$v_{by} = -74.3\frac{ft}{s}$$
$$t_{düşüş} = \frac{-v_{by} - (-v_{ay})}{-g} = 0.1104$$

Örnek 5'in Çözümü



c.) Yere çarpıp sıçrama hızı

$$v'_{by} = -e_2 * v_{by} = -0.3 * \left(-74.3\,\frac{ft}{s}\right)$$

$$v'_{by} = 22.3\,\frac{ft}{s}$$

d.) Sıçradıktan sonra $4\ ft$ yüksekliğe ulaşma hızı ve zamanı

$$v_{4y} - v'_{by} = -gt$$

$$v_{4y} = v'_{by} - gt$$

$$4 - 0 = v'_{by} t_4 - \frac{1}{2} g t_4^2$$

$$(t_4)_{ilk\ durum} = 0.212\ s$$

$$(t_4)_{ikinci\ durum} = 1.172\ s$$

e.) İlk durumda mesafe

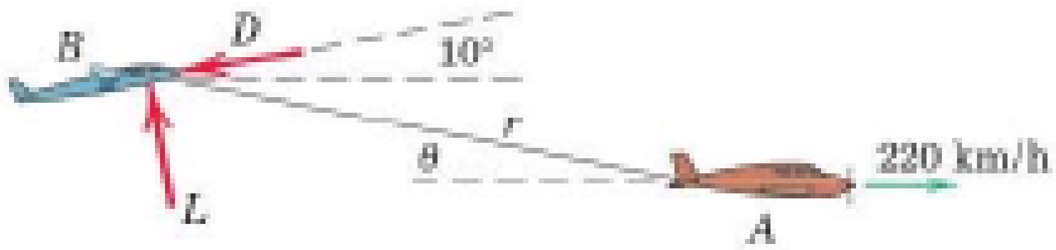
$$x = v_{ax} * t_{düşüş} + v_{bx} * t_{4ilk} + 2$$

$$x = v_{ax} * \left(t_{düşüş} + t_{4ilk}\right) + 2 = 13.4$$

İkinci durumda mesafe

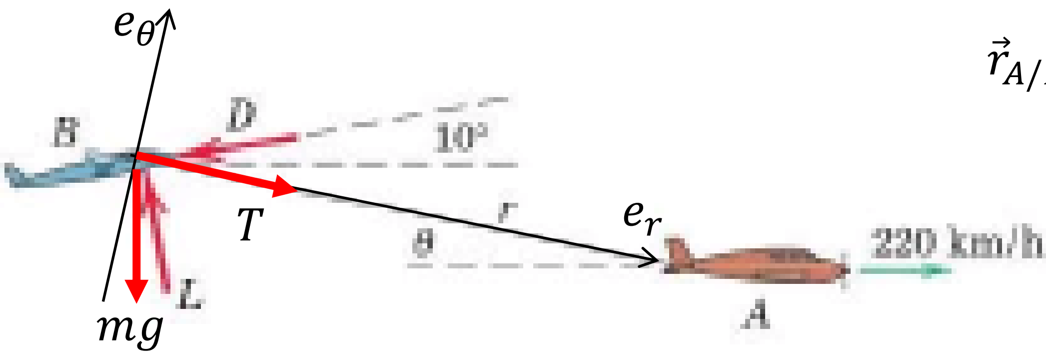
$$x = v_{ax} * \left(t_{düşüş} + t_{4iki}\right) + 2 = 47.4$$

Örnek 6



Yatay olarak $220\ km/h$ hızla uçan A uçağına, $200\ kg$'lık B planörü bağlanmıştır. Bağlama kablosu düz bir çizgi şeklinde ve $60\ m$ uzunluğundadır. $\theta = 15^0$olduğunda planör yükselmeye başlıyor ve kablonun yatayla yaptığı açı sabit olarak artmaya başlıyor $\dot{\theta} = 5\ \mathrm{deg}/s$. Aynı zamanda bu pozisyon için bağlama kablosundaki gerilim $1520\ N$. Planöre etkiyen aerodinamik kaldırma L ve sürüklenme D kuvvetlerini hesaplayınız.

Örnek 6'nın çözümü



$$\vec{r}_{A/B} = re_r \Longrightarrow \vec{v}_{A/B} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta; \dot{r} = 0$$
$$\vec{a}_{A/B} = \dot{r}\dot{\theta}e_\theta + r\ddot{\theta}e_\theta - r\dot{\theta}^2 e_r$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$
$$0 = \vec{a}_B - r\dot{\theta}^2 e_r$$
$$\vec{a}_B = r\dot{\theta}^2 e_r$$

$$\sum F_\theta = 0 \Longrightarrow Lcos25 - Dsin25 - mgcos15 = 0$$

$$\sum F_r = ma \Longrightarrow T - Lsin25 - Dcos25 + mgsin15 = \mathrm{m}r\dot{\theta}^2$$

$$0.906L - 0.422D = 1895$$
$$0.422L + 0.906D = 1936$$
$$L = 2536; D = 955.6$$