Dinamik (MAK219)

2018-2019

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Makine Mühendisliği Bölümü
Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

Bölüm 3
Parçacık Kinetiği

Bu bölümü dört alt başlık altında çalışacağız

- Newton’un 2. yasasının direkt uygulaması
- İş - Enerji İlişkileri
- İmpuls ve Momentum İlişkileri
- Özel Uygulamalar

Parçacıkların Kinetiği

Dengelenmemiş Kuvvetler ve Hareketin değişimi arasındaki ilişkiler

- Newton'un 2. yasasının direkt uygulaması: Kuvvet-Kütle-İvme
  - $$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
- İş-Enerji İlişkileri
  - $$\int \sum \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int m\vec{a}\,d\vec{s}$$
- Impuls-Momentum İlişkileri
  - $$\int \sum \vec{F} \cdot dt = \int m\vec{a}\,dt$$

Parçacıkların Kinetiği

Kinetik: Parçacığın hareketi ve parçacığın hareketini yaratan kuvvetler arasındaki ilişkiyi inceleyen bilim dalıdır.

İmpuls-Momentum Yöntemi

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}\, dt$$

İmpuls-Momentum Yöntemi

- Toplam kuvvetin yerdeğiştirmeye bağlı integrasyonu ile elde edilir.
- Belirli bir aralık için geçerlidir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}\, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v}$$

Doğrusal impuls doğrusal momentum ilişkisi

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}\, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = m\Delta\vec{v} \text{ ya da } \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \Delta\vec{G}$$

Tanım: ***Linear momentum****:* $\vec{G} = m\vec{v}$ ile ifade edilir.

O halde $m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{G}$ ile ifade edilebilir ve ***linear momentumun değişimi*** olarak adlandırılır.

Doğrusal impuls doğrusal momentum ilişkisi

Başka bir ifade ile ***linear momentumun zamana bağlı değişimi*** sisteme etkiyen kuvvetlerin toplamına eşittir.

Şöyle ki, m kütlesi sabit olmak koşuluyla

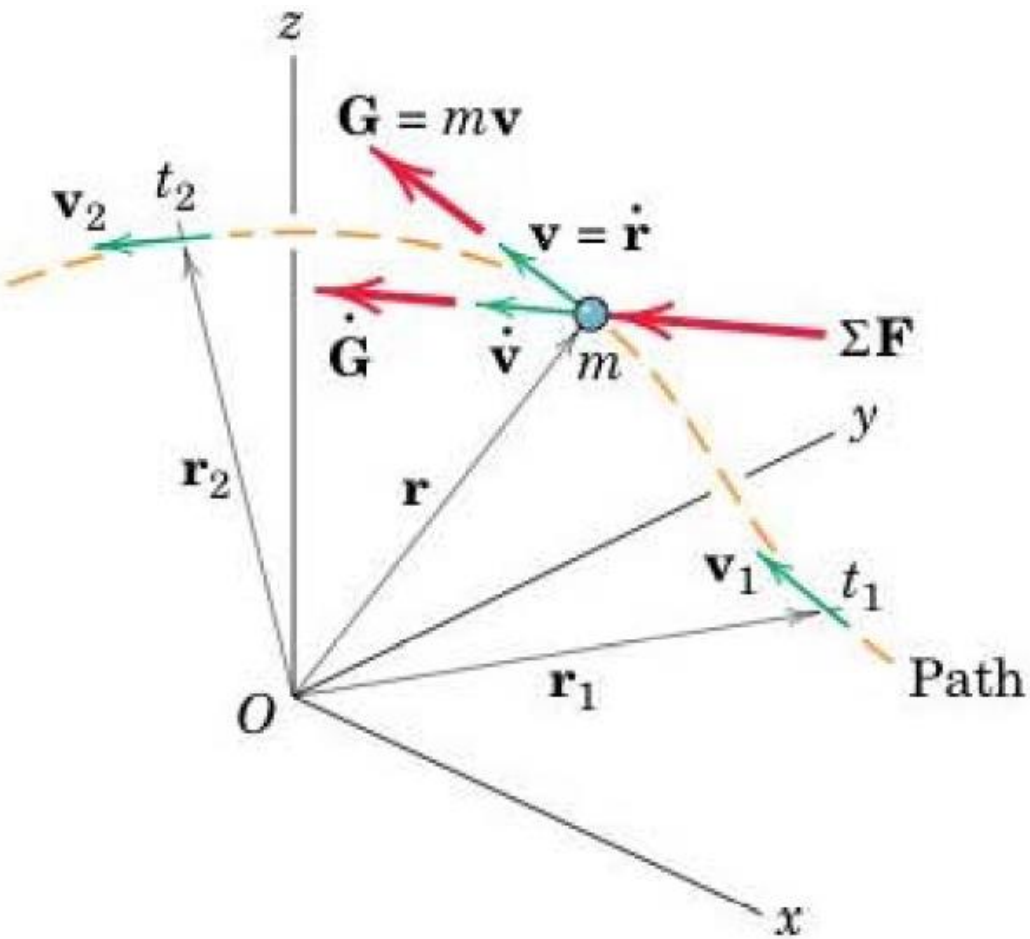
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ifadesinde ivme yerine hızın türevi ifadesi yazılırsa yani

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \Rightarrow \sum \vec{\boldsymbol{F}} = \dot{\vec{\boldsymbol{G}}}$$

olur.

Impuls-Momentum Yönteminin Vektörel Anlatımı



- Momentum vektörel bir büyüklüktür.
- Yönü hız ile aynı yöndedir.
- Momentumun zamanla değişimi ise toplam kuvvetin diğer bir değişle ivmenin yönündedir.

Doğrusal Momentumun Korunumu

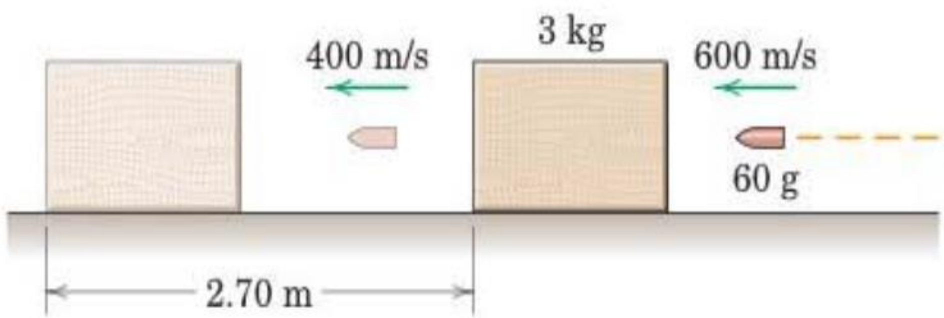
- Doğrusal momentum (çizgisel momentum) **korunumludur**;
- **Momentumun korunumu**, kapalı bir sistem herhangi bir dış kuvvetin etkisi altında değilse, o kapalı sistemin toplam momentumunun değişemeyeceği anlamına gelir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \Delta\vec{G} = 0$$

$$\vec{G}_2 = \vec{G}_1$$

Örnek Problemler

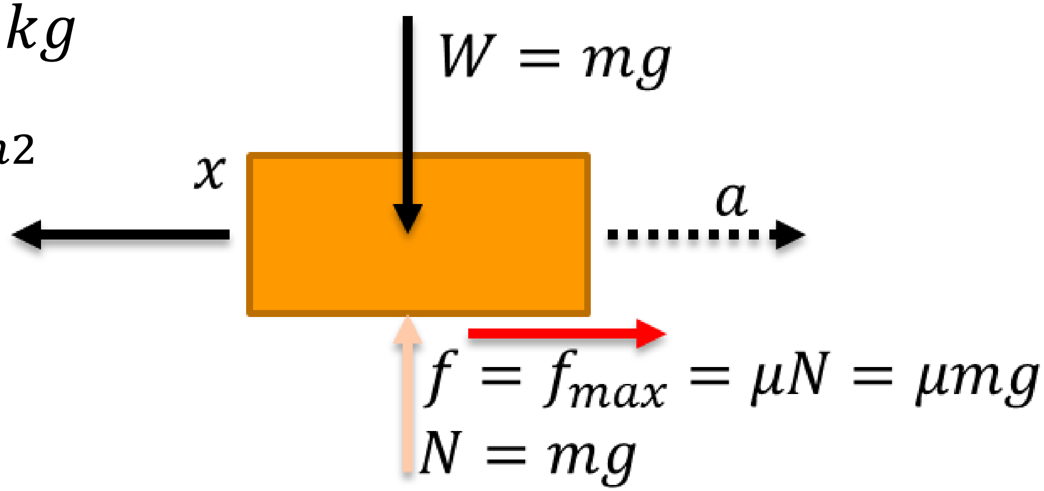
Örnek 1: 60 g kütleli mermi 600 m/s hızla yatayda duran 3 kg'lık kütüğü delerek 400 m/s hızla kütükten çıkıyor. Kütük merminin etkisi ile 2.7 m sürüklenerek duruyor. Yerin sürtünme katsayısını bulunuz.



Örnek Problemler

Örnek 1'in Çözümü:

$$m_m = 60\ g = 0.06\ kg$$
$$v_{m1} = 600\frac{m}{s}; v_{m2} = 400\ m/s$$
$$m_k = 3\ kg$$
$$s = 2.7\ m$$
$$\mu = ?$$



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}; -f_{max} = -\mu mg = ma \Longrightarrow -\mu g = a$$

Sürtünme katsayısı μ'yu bulmak için önce ivmeyi a'yı bulmalıyız.

Örnek Problemler

Örnek 1’in Çözümü:

$$\Delta\vec{G} = 0;$$

$$m_m v_{m1} = m_m v_{m2} + m_k v_k;$$

$$0.06 \cdot 600 = 0.06 \cdot 400 + 3 \cdot v_k; v_k = 4\ m/s$$

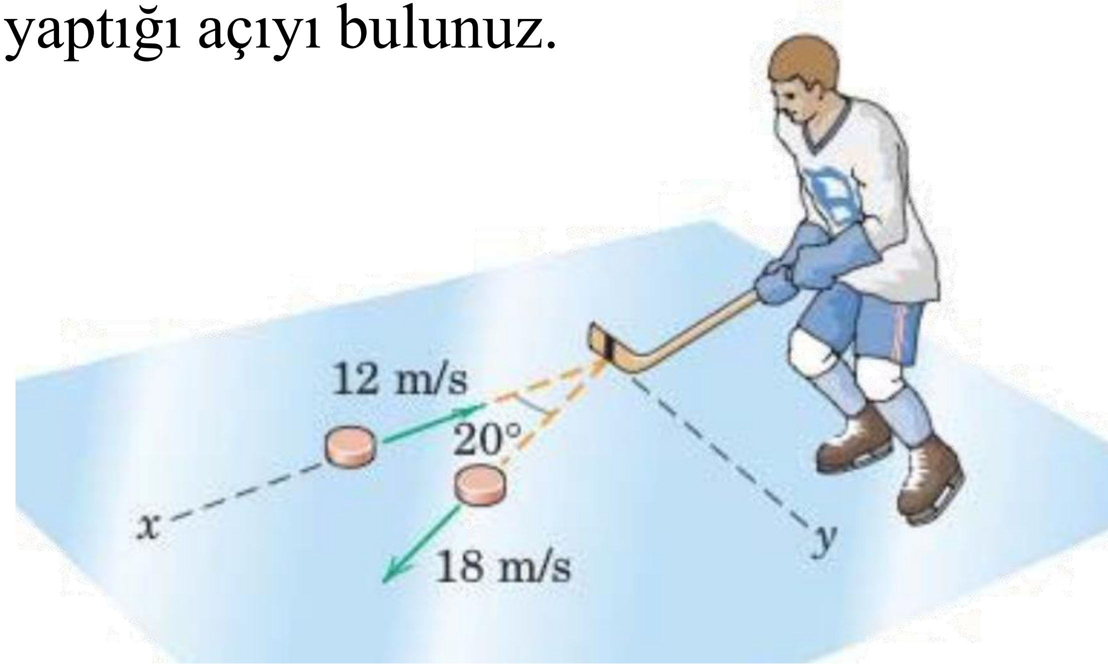
$$\int_v^0 v dv = \int_0^s a ds$$

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_v^0 = as \Longrightarrow a = -\frac{v^2}{2s}$$

$$-\mu g = a \Longrightarrow \mu = \frac{v^2}{2gs} = \frac{4^2}{2 \cdot 9.81 \cdot 2.7} = 0.302$$

Örnek Problemler

Örnek 2 0.20 kg'lık hokey diski resimde gösterilen yönde 12 m/s hızla gelerek hokey sopasına çarpmaktadır. Disk çarpmanın ardından resimde gösterildiği gibi yatayla 20° açı yaparak 18 m/s hızla sopadan uzaklaşmaktadır. Disk ve sopa arasındaki toplam kontakt 0.04 s sürdüğüne göre, sopadan diske uygulanan ortalama kuvveti ve kuvvetin yatayla yaptığı açıyı bulunuz.



Örnek Problemler

Örnek 2'nin Çözümü:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\,dt = m\Delta\vec{v} \Longrightarrow \sum \vec{F}_{av} \int_{t_1}^{t_2} dt = \sum \vec{F}_{av}\,\Delta t = m\Delta\vec{v}$$

$$\sum \vec{F}_{av} = \frac{m}{\Delta t}(v_2 - v_1)$$

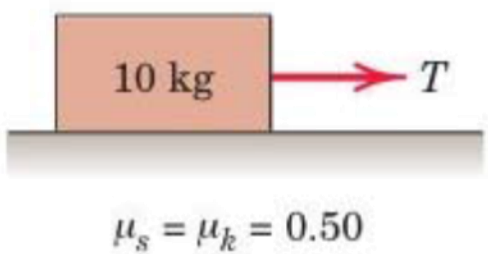
$$\sum \vec{F}_{av} = \frac{0.20}{0.04}[18(cos20i + sin20j) - (-12i)]$$

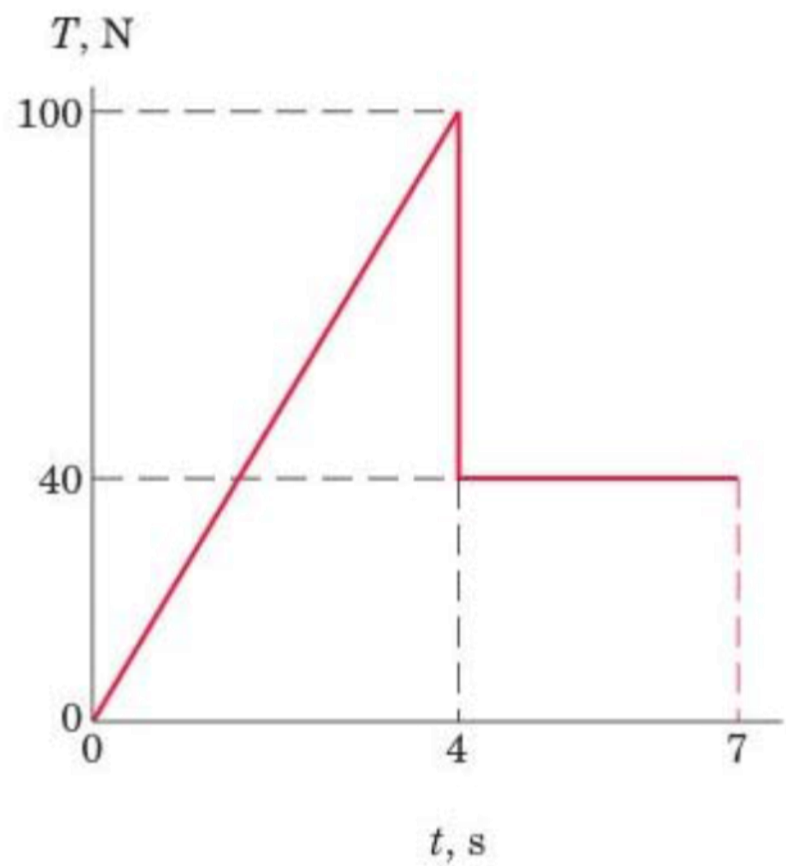
$$\sum \vec{F}_{av} = 5(28.91i + 6.16j) = 144.55i + 30.78j$$

$$F_{av} = \sqrt{144.55^2 + 30.78^2} = 147.79; \beta = \tan^{-1}\frac{30.78}{144.55} = 12.02°$$

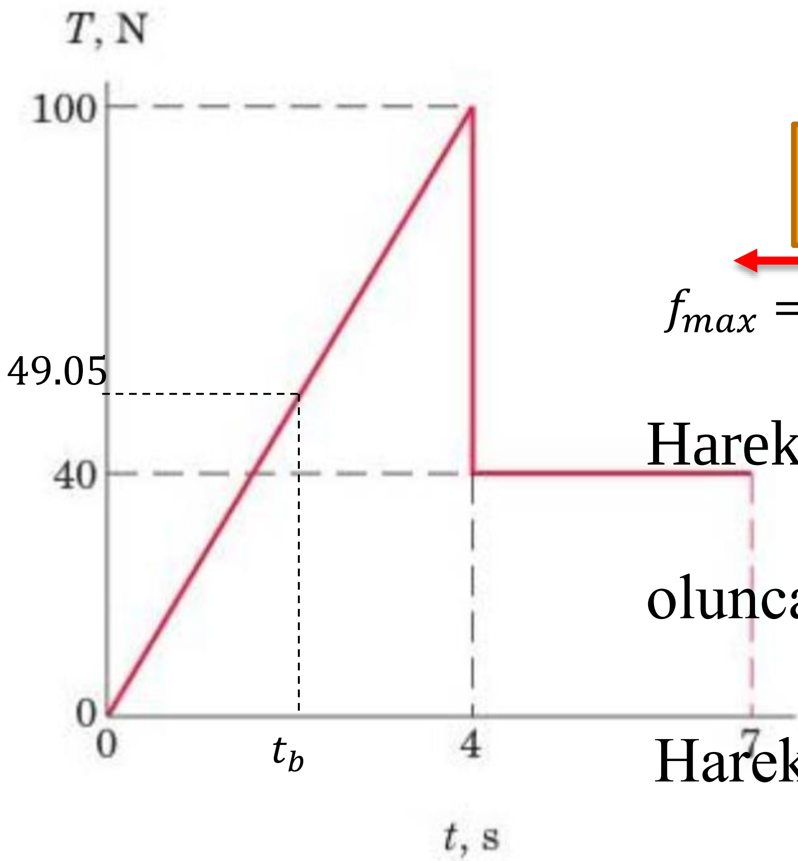
Örnek Problemler

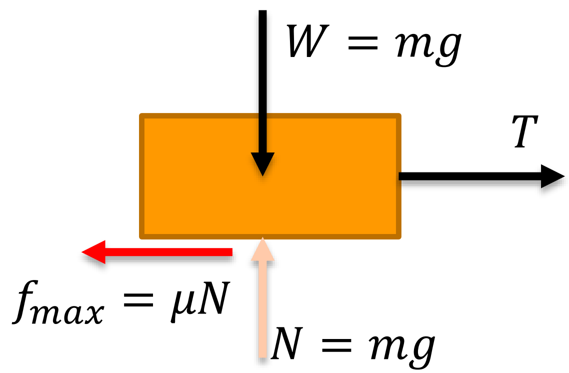
Örnek 3 10 kg’lık blok yatay düzlemde dururken, 7 saniye boyunca grafiği aşağıda verilen kuvvetin etkisinde kalıyor. Bu kuvvetin etkisi altında bloğun ulaşacağı maksimum hızı, harekete başlama zamanını ve kutunun durma zamanını bulunuz. Statik ve kinetik sürtünme katsayısı eşit ve 0.5 değerindedir.





Örnek 3'ün Çözümü:





Hareket,

$$T = f_{max} = \mu mg$$

olunca başlar.

$$T = 0.5 * 10 * 9{,}81 = 49.05$$

Hareketin başlama zamanı;

$$t_b = 49.05 * \frac{4}{100} = 1.96 \text{ s}$$

Şeklinde oran orantı ile bulunur.

Örnek 3 Çözüm Devam:

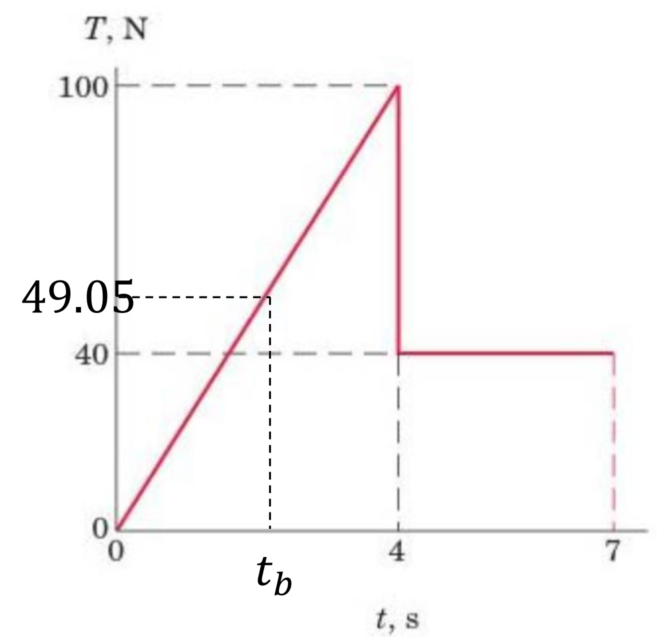
Maksimum hız $t = 4$ s'de elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = m\Delta\vec{v} \Longrightarrow \int_{1.96}^{4} (T - f)\, dt = m(v_2 - v_1)$$

$$\Longrightarrow \int_{1.96}^{4} (25t - 49.05)\, dt = 10(v_{max} - 0)$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{25t^2}{2} - 49.05t\right|_{1.96}^{4} = 10v_{max}$$

$$\Longrightarrow v_{max} = 5.19\; m/s$$



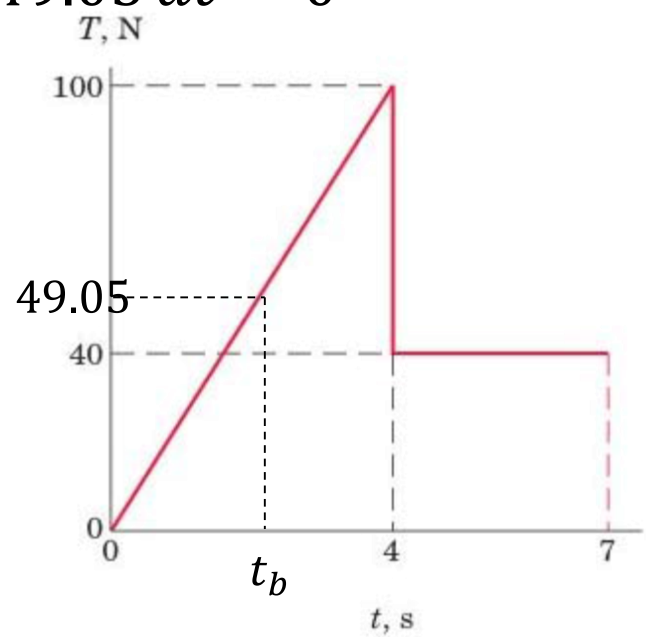
Örnek 3 Çözüm Devam:

Toplam hareket süresinin;
kuvvetin etkisinin sona erdiği 7 saniyeden daha uzun olduğunu kestiriyoruz

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = m\Delta\vec{v}$$

$$\Rightarrow \int_{1.96}^{4} 25t\, dt + \int_{4}^{7} 40\, dt - \int_{1.96}^{t_f} 49.05\, dt = 0$$

$$\Rightarrow t_f = 7.52\ s$$

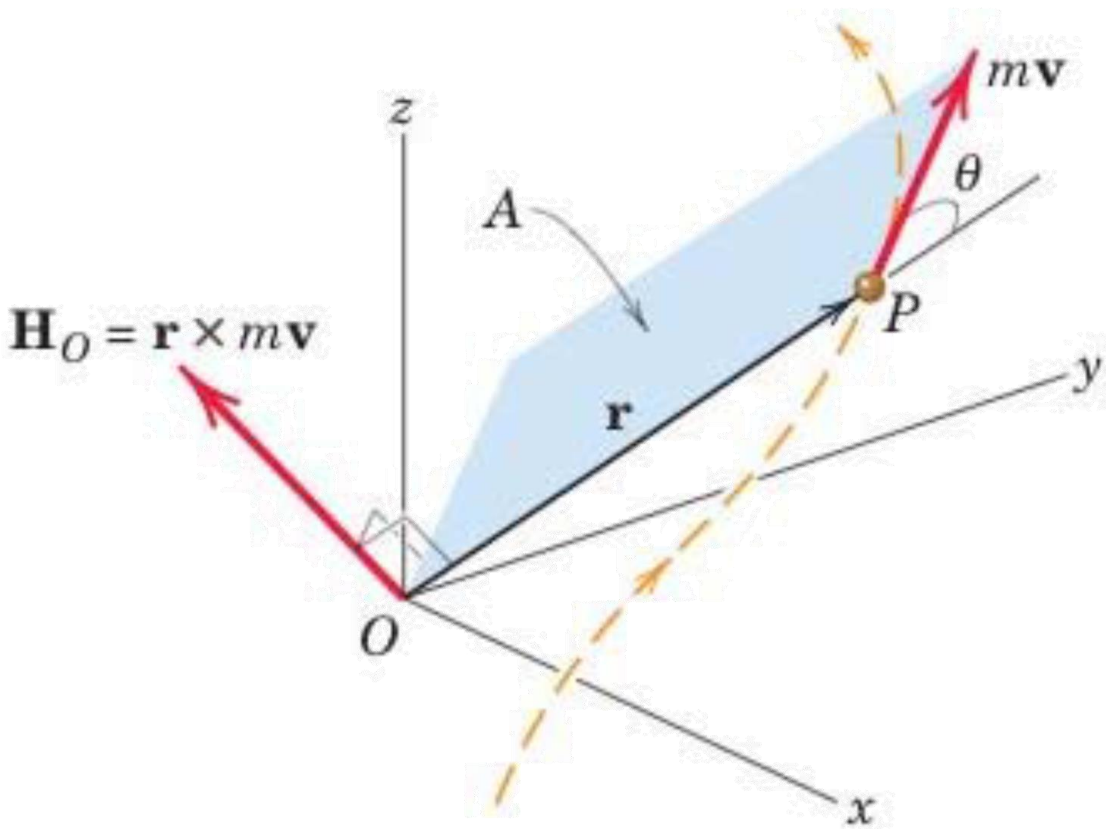


Açısal impuls- açısal momentum

Tanım: ***Açısal momentum****, doğrusal momentumun momentidir:*

$$\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

ile ifade edilir.



Açısal impuls- açısal momentum

Açısal Momentumun Değişimi

$$\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\dot{\overrightarrow{H_o}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$$

$$\dot{\overrightarrow{H_o}} = \mathrm{m}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}\right)$$

$$\dot{\overrightarrow{H_o}} = \mathrm{m}\vec{r} \times \dot{\vec{v}}$$

Toplam Moment

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \sum \vec{F} = m\dot{\vec{v}}$$

$$\sum \overrightarrow{M_o} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = m\vec{r} \times \dot{\vec{v}}$$

$$\sum \overrightarrow{M_o} = m\vec{r} \times \dot{\vec{v}}$$

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\boldsymbol{M}_o} = \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{H}_o}}}$$

ya da

$$\boxed{\int \sum \overrightarrow{\boldsymbol{M}_o}\, \boldsymbol{dt} = \Delta\overrightarrow{\boldsymbol{H}_o}}$$

Açısal Momentumun Korunumu

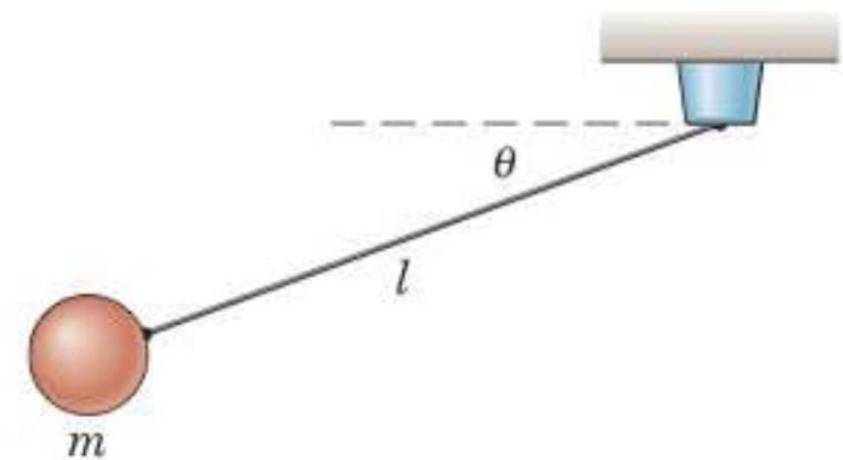
- Açısal momentumda çizgisel momentum gibi **korunumludur**;
- **Açısal momentumun korunumu**, kapalı bir sistem herhangi bir dış momentin etkisi altında değilse, o kapalı sistemin toplam açısal momentumunun değişemeyeceği anlamına gelir.

$$\sum \vec{M}_o = 0 \quad \text{veya} \quad \int \sum \vec{M}_o \, dt = 0$$

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{\boldsymbol{H}_o} = \mathbf{0} \Longrightarrow (\boldsymbol{H}_o)_1 = (\boldsymbol{H}_o)_2}$$

Örnekler

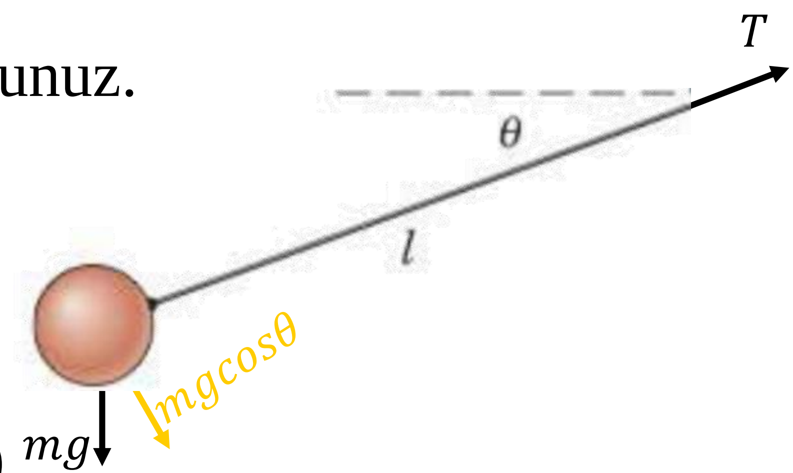
Örnek 4: Ucunda m kütlesi olan l uzunluğunda bir sarkaç $\theta = 0'$dan serbest bırakılıyor. Sadece açısal impuls ve momentum prensiplerinden faydalanarak açısal ivmeyi ve $\mathrm{linear\ hızı}\ v$ ($\theta = 90°$ için) θ terimleri cinsinden bulunuz.



Örnekler

Örnek 4 Çözüm:

açısal ivmeyi ve *linear hızı* v ($\theta = 90°$ *için*) θ terimleri cinsinden bulunuz.



$$\sum \vec{M}_o = m\vec{r} \times \dot{\vec{v}}$$

$$v = l\dot{\theta}$$

$$mglcos\theta = ml \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(l\dot{\theta})$$

$$mglcos\theta = ml^2\ddot{\theta} \Longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{g}cos\theta}{l}$$

Örnekler

Örnek 4 Çözüm:

$açısal\ ivmeyi\ \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{g}\cos\theta}{l}\ olarak\ bulduk\ şimdi\ linear\ hızı\ v\ (\theta = 90°\ için)\ \theta$ terimleri cinsinden bulacağız..

$$\int ads = \int vdv \Longrightarrow \frac{g}{l}\int_0^{\theta} \cos\theta d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta}$$

$$\frac{g}{l} sin\theta = \frac{\dot{\theta}^2}{2} \Longrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} sin\theta$$

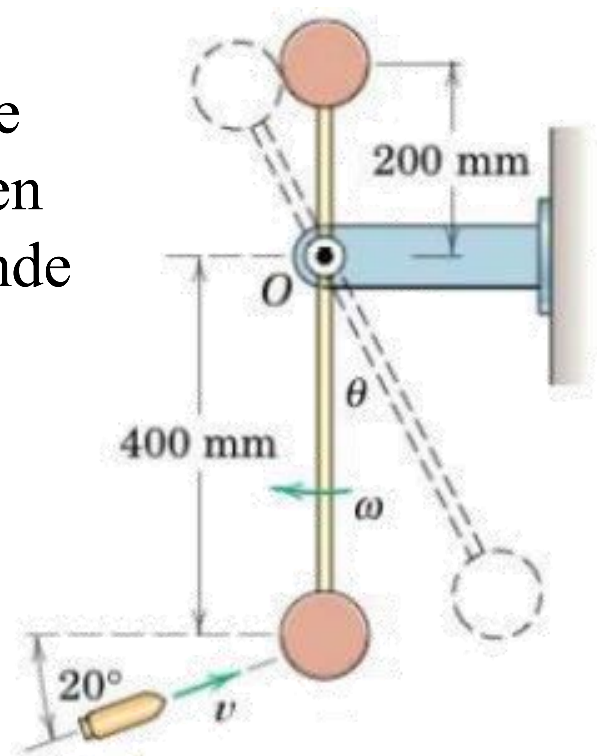
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Linear hız

$$v = l\dot{\theta} = \sqrt{2gl}$$

Örnekler

Örnek 5: Bir sarkaç kütlesiz bir çubuğun uçlarına bağlanmış 3.2 kg'lık iki kütle ile saat yönünde $\omega = 6\, rad/s$ hızla dönerken 50 g lık mermi $v = 300\, m/s$ hızla resimde gösterilen yönde sarkaca çarpmakta ve alttaki kütlenin içine gömülmektedir.



Hemen çarpışmadan sonraki yeni ω'yı hesaplayınız.

Sarkaçtaki maksimum açısal yer değiştirmeyi θ bulunuz.

Örnekler

Örnek 5 Çözüm:

Sistemin açısal momentumu çarpışma sırasında korunacaktır:

$$\Delta\overrightarrow{\boldsymbol{H_o}} = \mathbf{0} \Longrightarrow (\boldsymbol{H_o})_{\mathbf{1}} = (\boldsymbol{H_o})_{\mathbf{2}}$$

$$m_m v_m cos20 l_1 - m_b \omega l_1^2 - m_b \omega l_2^2$$
$$= (m_m + m_b)\omega_{yeni} l_1^2 + m_b \omega_{yeni} l_2^2$$

$$0.05(300cos20)0.4 - 3.2(0.4^2 + 0.2^2)6$$
$$= (3.25)\omega_{yeni}\ 0.4^2 - 3.2\omega_{yeni} 0.2^2$$

$$\Longrightarrow \omega_{yeni} = 2.77\frac{rad}{s} \quad (ters\ yönde)$$

Örnekler

Örnek 5 Çözüm:

Sistemin açısal konumu için ise iş-enerji yönteminde öğrendiğimiz enerjinin korunumu yazabiliriz. $\left(\omega_{yeni} = 2.77\,\frac{rad}{s}\right)$

$$T_1 + V_1 = 0 + V_2$$

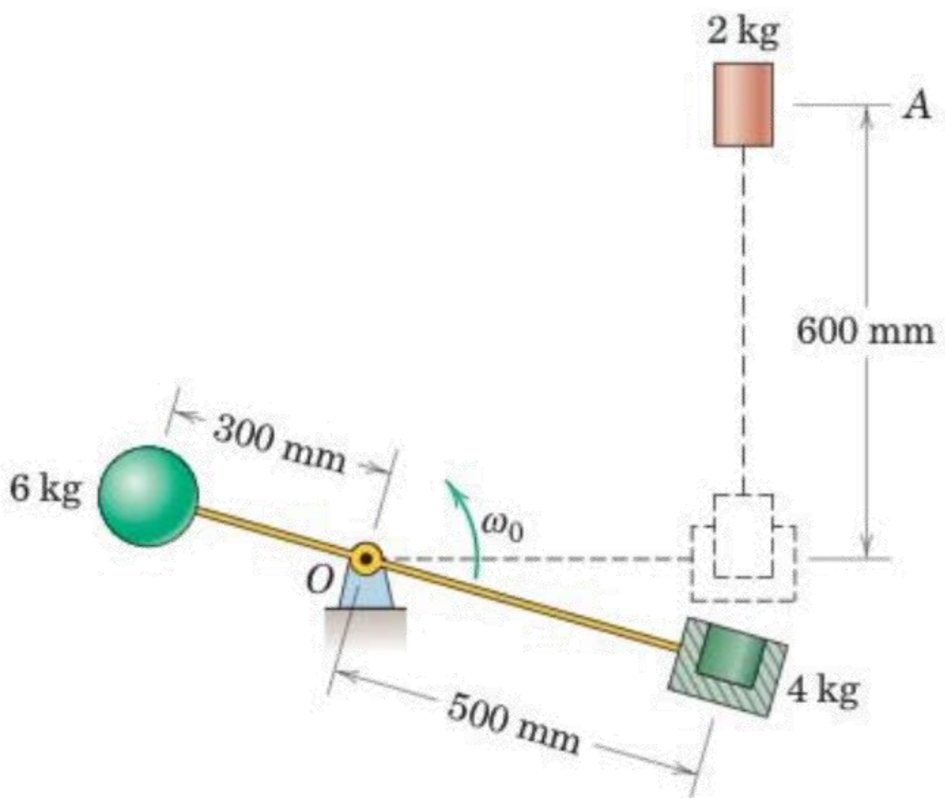
$$\frac{1}{2}(m_m + m_b)(\omega_{yeni} l_1)^2 + \frac{1}{2}m_b(\omega_{yeni} l_2)^2 + m_b g l_2 - (m_m + m_b) g l_1 = 0 + [m_b g l_2 - (m_m + m_b) g l_1]cos\theta$$

$$\frac{1}{2}(3.25)\left((2.77)0.4\right)^2 + \frac{1}{2}3.2\left((2.77)0.2\right)^2 + 3.2g0.2 - (3.25)g0.4 = 0 + [3.2g0.2 - (3.25)g0.4]cos\theta$$

$$cos\theta = 0.61 \Longrightarrow \theta = 52.1^0$$

Örnekler

Örnek 6: Ağırlıksız çubuğun ucundaki iki kütle ω_0=2 rad/s hızıyla dönmekte iken 2 kg'lık cisim düşüyor ve yuvaya oturuyor. Çarpışmadan sonraki ω açısal hızını hesaplayınız.



Örnekler

Örnek 6 Çözüm:

$$\omega_0 = 2\frac{rad}{s}; m_d = 2\,kg; m_1 = 6\,kg; m_2 = 4\,kg$$

$$l_1 = 300\,mm = 0.3\,m; l_2 = 500\,mm = 0.5\,m$$

Tam çarpma anında düşen cismin hızı

$$\frac{1}{2}m_d v_d^2 = m_d gh \Longrightarrow v_d = \sqrt{2gh}$$

$$v_d = \sqrt{2 * 9.81 * 0.6} = 3.43\frac{m}{s}$$

Çarpışmadan sonraki ω açısal hızı bulmak için açısal momentumun korunumundan yararlanabiliriz.

$$\Delta H_0 = 0; \Longrightarrow (H_0)_1 = (H_0)_2$$

Örnekler

Örnek 6 Çözüm Devam:

$$(H_0)_1 = m_1 l_1^2 \omega_0 + m_2 l_2^2 \omega_0 - m_d v_d l_2$$

$$(H_0)_1 = 6 * 0.3^2 * 2 + 4 * 0.5^2 * 2 - 2 * 3.43 * 0.5$$

$$(H_0)_1 = -0.351\ N \cdot m \cdot s$$

$$(H_0)_2 = [(m_d + m_2) l_2^2 + (m_1) l_1^2] \omega_{yeni}$$

$$(H_0)_2 = [(2 + 4)0.5^2 + (6)0.3^2] \omega_{yeni}$$

$$(H_0)_2 = 2.04 \omega_{yeni}$$

$$(H_0)_1 = (H_0)_2 \Longrightarrow -0.351 = 2.04 \omega_{yeni}$$

$$\omega_{yeni} = -0.1721 \frac{rad}{s}\ SY$$

Örnekler

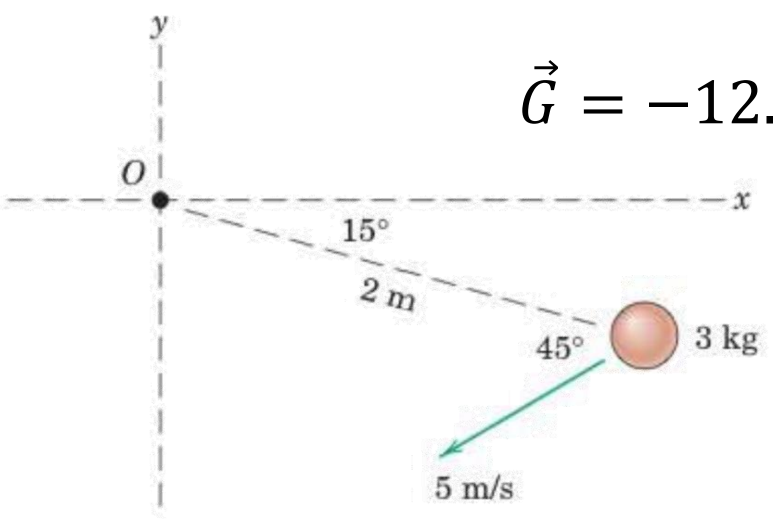
Örnek 7: Resimdeki sistem için doğrusal momentumu, açısal momentumu ve kinetik enerjiyi bulunuz.

Çözüm:

Çizgisel Momentum

$$\vec{G} = m\vec{v} = 3 \cdot 5(-\cos 30^0\, i - \sin 30^0\, j)$$

$$\vec{G} = -12.99i - 7.5j\; kg \cdot \frac{m}{s}$$



Örnekler

Örnek 7 Çözüm:

O noktasına göre açısal momentum

$$\vec{H}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{G}$$

$$\vec{H}_0 = 2(cos15^0 i - sin15^0 j) \times (-12.99i - 7.5j)$$

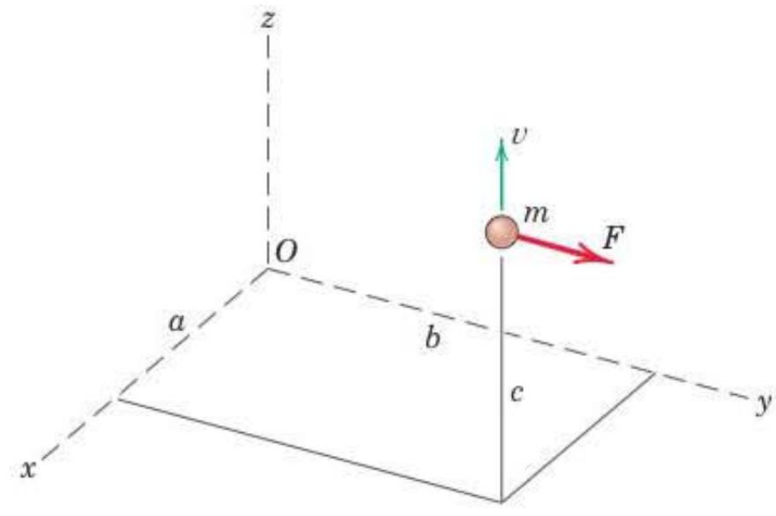
$$\vec{H}_0 = -21.2k\,\frac{kgm^2}{s}$$

Sistemin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} * 3 * 5^2 = 37.5\,J$$

Örnekler

Örnek 8: Resimdeki sistem için açısal momentumu ve açısal momentumun zamanla değişimini (türevini) bulunuz.



Örnekler

Örnek 8 Çözüm:

O noktasına göre açısal momentum

$$H_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$H_0 = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \times m(v\vec{k})$$

$$H_0 = bmv\vec{i} - amv\vec{j} = mv(b\vec{i} - a\vec{j})$$

Açısal momentumun türevi toplam momente eşittir.

$$\dot{H}_0 = M_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\dot{H}_0 = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \times (F\vec{j})$$

$$\dot{H}_0 = -cF\vec{i} + aF\vec{k}$$