

# Dinamik (MAK219)



2018-2019

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Mühendislik Fakültesi

Makine Mühendisliği Bölümü

Dr. Öğr. Üyesi Nurdan Bilgin

# Bölüm 3

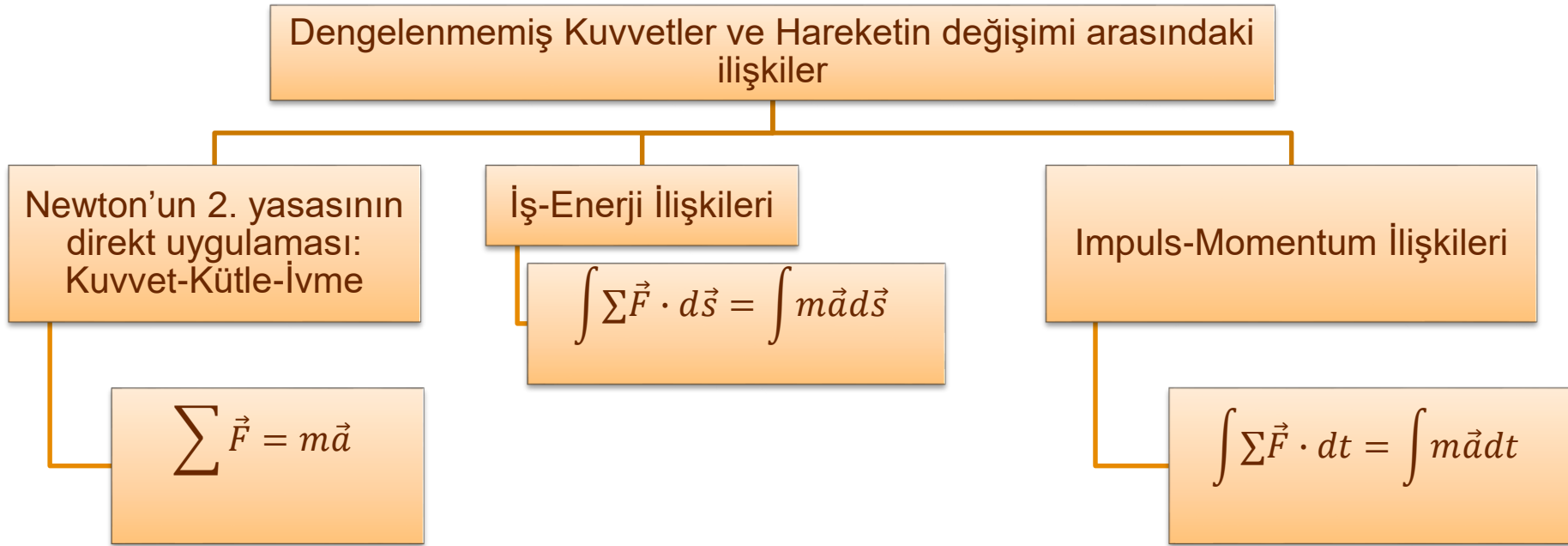
## Parçacık Kinetiği



Bu bölümü dört alt başlık altında çalışacağız

- Newton'un 2. yasasının direkt uygulaması
  - İş - Enerji İlişkileri
  - İmpuls ve Momentum İlişkileri
    - Özel Uygulamalar

# Parçacıkların Kinetiği



## Parçacıkların Kinetiği

**Kinetik:** Parçacığın hareketi ve parçacığın hareketini yaratan kuvvetler arasındaki ilişkiyi inceleyen bilim dalıdır.

**Newton'un 2. yasasının direkt uygulaması: Kuvvet-Kütle-İvme**

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

## Tipik Kinetik Problemleri

---

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

- I.  $\sum \vec{F}$  biliniyor iken (1) denkleminde  $\vec{a}$ 'yı bulmaya dayanan problemlerdir.  $\vec{a}$  bulunduktan sonra integrasyon yoluyla  $\vec{v}$  ve  $\vec{r}$  vektörleri bulunabilir.
- II.  $\vec{a}$  biliniyor iken (1) denkleminde  $\sum \vec{F}$ 'i bulmaya dayanan problemlerdir.
- III. Hem (i) hem de (ii)'de verilen problemler problemin doğasına uygun koordinat sistemleri seçilerek çözülebilir.

## Newton'un 2. yasası $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

- Bu kanun deneysel olarak kanıtlanabilmiştir. İdeal deney sisteminde kuvvet ve ivmenin hatasız ölçülebildiği varsayılmaktadır.
- **Atalet sistemi:** İdeal deney sonuçları sabit bir koordinat sistemine göre ölçülerek bulunabildiği gibi, sabit hızla dönmeden öteleme yapan bir koordinat sistemine göre de geçerlidir, hız sabit olduğu için ivme ölçülebilmektedir. Bu sisteme atalet sistemi denir.
- **Birim sistemleri:** SI ve U.S birim sistemlerini kullanacağız. SI sistemi mutlak sistem, U.S sistemi ise yerçekimi sistemi diye adlandırılır.

# Newton'un 2. yasası $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

## Kuvvet-Kütle-İvme

---

### Doğrusal Hareket

Karesel koordinatlarda  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

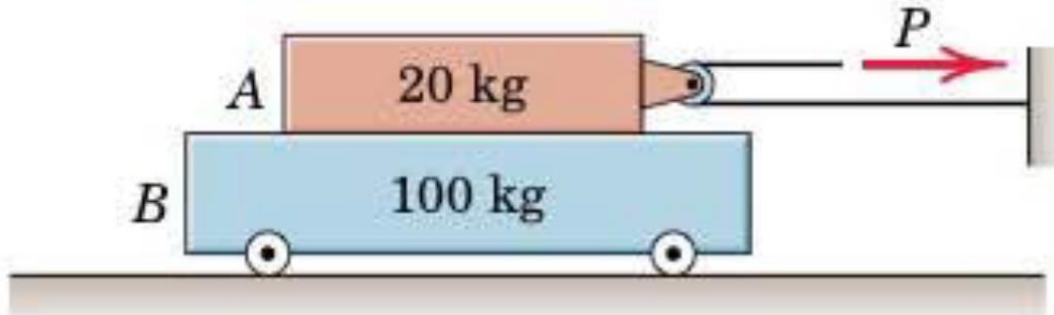
$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

$\vec{a}$  parçacığın **mutlak ivmesi** veya *rigid cisimlerde ise kütle merkezinin ivmesidir.*

# Örnek Problem 1



20 kg'lık A bloğu ve 100 kg'lık B bloğu arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayısı birbirine eşit ve 0.5 dir.

a.)  $P=60$  N ve

b.)  $P=40$  N için

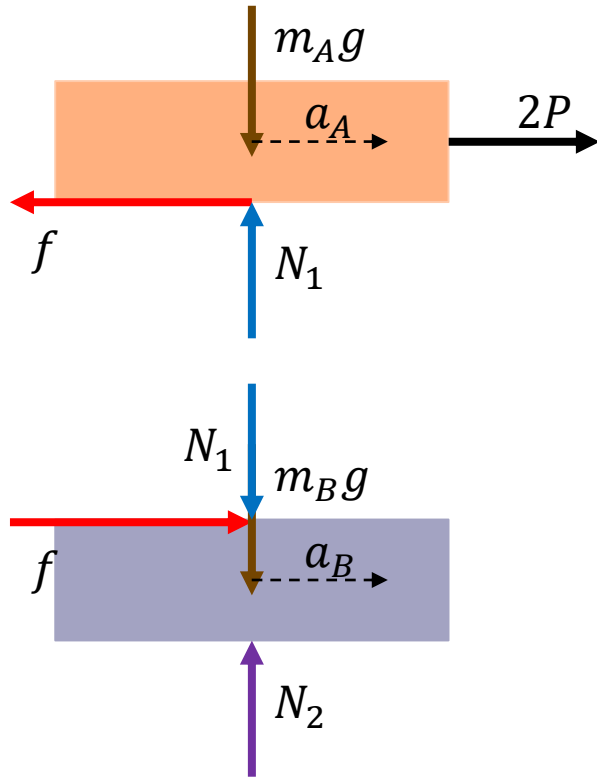
ivme veya ivmeleri bulunuz.

Not:

1. Makaranın kütlesi ve atalet momenti sıfır kabul edilmektedir.
2. Hangi durumda birlikte hareket ederler



# Örnek Problem 1 Çözüm



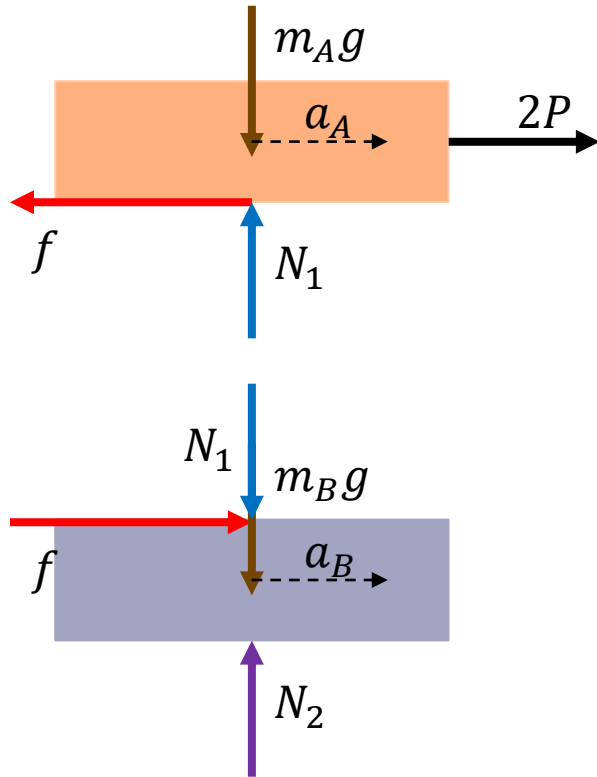
a.)  $P = 60$

$$\mu = 0.5$$

**Varsayım:** A, B'nin üzerinde sabit değil aralarında kayma var.

**Çözümün sonunda varsayımın doğru olup olmadığını göreceğiz.**

# Örnek Problem 1 Çözüm



Kayma olması ne demek?

İki cismin farklı ivmelere sahip olması ancak  $a_A > a_B$

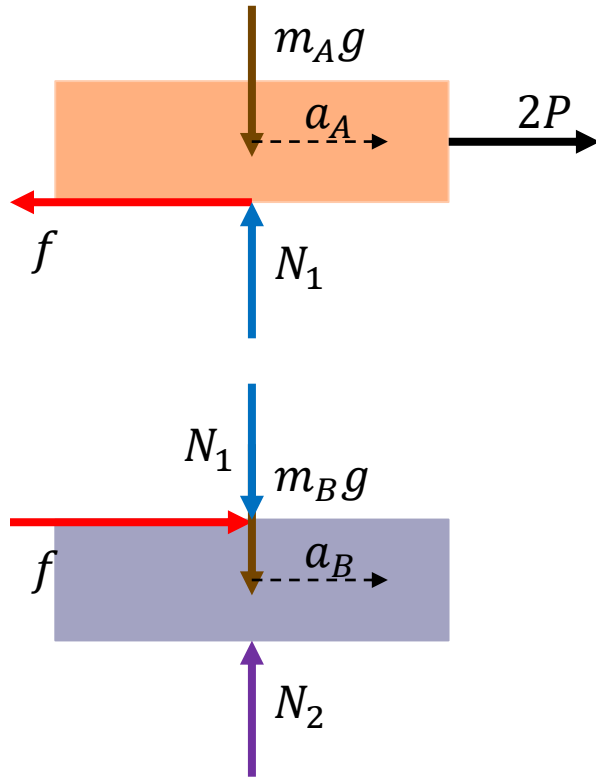
Olmaması gerek.

Kaymanın olması için sürtünmeyi yenmemiz gerek

$$f_{max} = \mu * N_1 = \mu * m_A g$$
$$f_{max} = 0.5 * 20 * 9.81 = 98.1$$
$$f_{max} < 2P = 2 * 60 = 120$$

Bu durumda A cismi için ivmeli hareketten söz edebiliriz.

# Örnek Problem 1 Çözüm



$$A: \sum F_x = m a_x \Rightarrow 2P - f = m_A a_A$$
$$2 * 60 - 98.1 = 20 * a_A \Rightarrow a_A = 1.1 \text{ m/s}^2$$

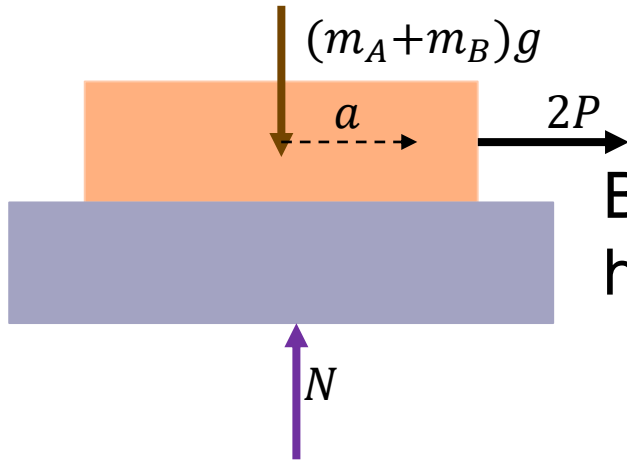
$$B: \sum F_x = m a_x \Rightarrow f = m_B a_B$$
$$98.1 = 100 * a_B \Rightarrow a_B = 0.981 \text{ m/s}^2$$

$a_A > a_B \Rightarrow$  Varsayım doğru

$a_A < a_B$  olsaydı varsayım yanlış olurdu  
birlikte hareket ederlerdi.

# Örnek Problem 1 Çözüm

b.)  $P=40$  N

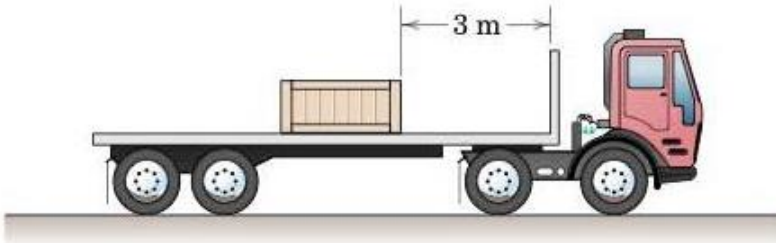


$$f_{max} = 98.1$$
$$f_{max} > 2P = 2 * 40 = 80$$

Bu durumda A cismi, B cismi ile birlikte hareket eder.

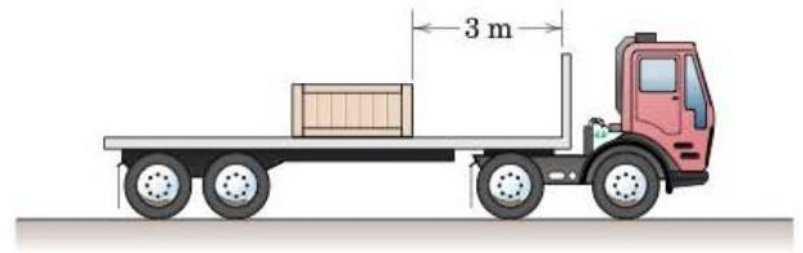
$$2P = (m_A + m_B) * a \Rightarrow a = \frac{2P}{(m_A + m_B)}$$
$$a = \frac{2P}{(m_A + m_B)} = \frac{2 * 40}{(20 + 100)} = \frac{2}{3} \text{ m/s}^2$$

## Örnek Problem 2



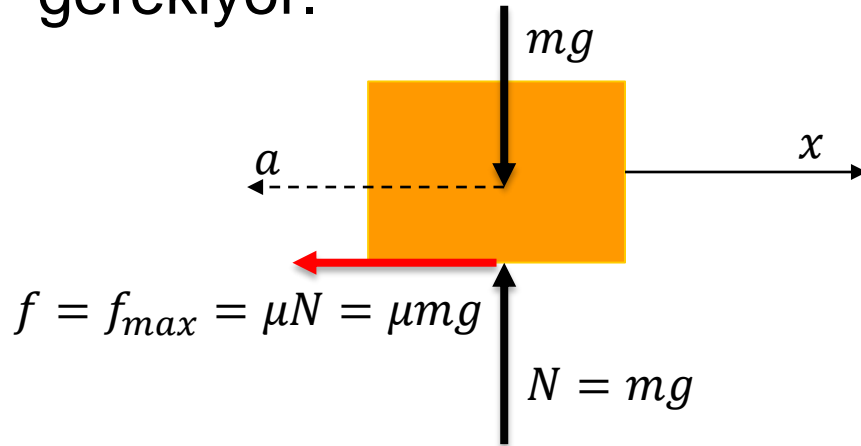
Kamyonun hızı 70 km/h iken, üzerindeki yükü kaydırmayacak maksimum yavaşlama ivmesi ile durma mesafesini bulunuz. Kamyon kasası ile yük arasındaki sürtünme katsayısı  $\mu = 0.3$

# Örnek Problem 2

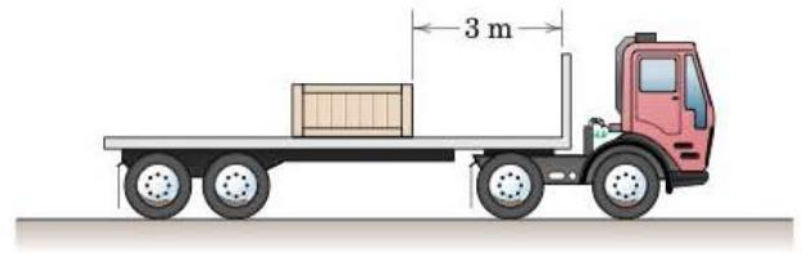


Önce kayma yaratmayacak ivmeyi hesaplamamız gerekiyor.

$$\begin{aligned} -f_{max} &= ma \Rightarrow -\mu mg = ma \\ \Rightarrow -\mu g &= a = -2.94 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



## Örnek Problem 2



Maksimum ivmeyi bulduk,  
şimdide maksimum  
mesafeyi bulacağız.

$$\int_v^0 v dv = \int_0^s a ds$$
$$-\frac{v^2}{2} = as \Rightarrow s = -\frac{v^2}{2a}$$
$$v = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{70}{3.6} \text{ m/s}$$
$$a = -2.94 \text{ m/s}^2$$
$$s = -\frac{v^2}{2a} = 64.3 \text{ m}$$

# Newton'un 2. yasası $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

## Kuvvet-Kütle-İvme

---

### Doğrusal Hareket

Karesel

koordinatlarda  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_x$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_y$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_z$$

### Eğrisel Hareket

Teğetsel Koordinatlarda;

$$\sum \vec{F}_t = m\vec{a}_t$$

$$\sum \vec{F}_n = m\vec{a}_n$$

Hatırlatma  $\vec{a}_n = \rho\dot{\beta}^2 = v^2/\rho = v\dot{\beta}$ ,  $\vec{a}_t = \dot{v}$  ve  $v = \rho\dot{\beta}$



# Newton'un 2. yasası $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

## Kuvvet-Kütle-İvme

---

### Eğrisel Hareket

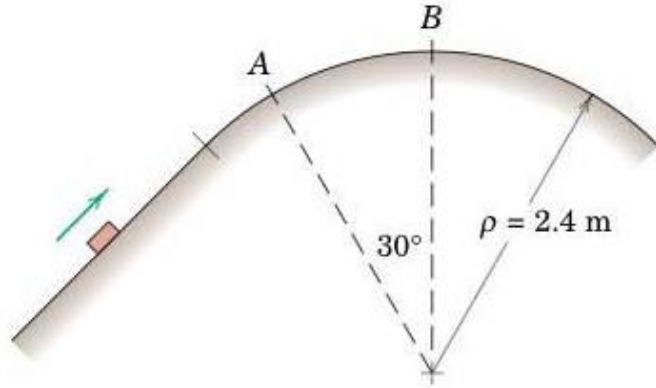
### Polar Koordinatlarda;

$$\sum \vec{F}_r = m\vec{a}_r$$

$$\sum \vec{F}_\theta = m\vec{a}_\theta$$

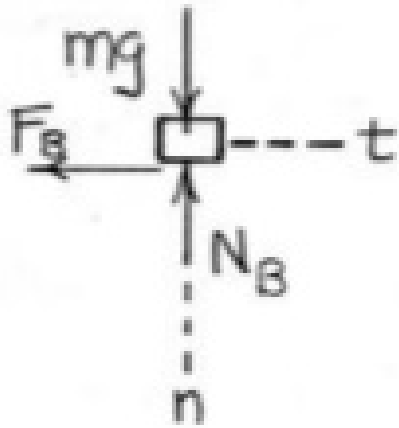
$$\vec{a}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \text{ ve } \vec{a}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

## Örnek Problem 3 (6th. Ed. 3/51. problem)



Yolun eğrisel bölümünün tepesindeki B noktasını  $3.5 \text{ m/s}$  ile geçen cisimin üzerine etkiyen  $N_B$  normal kuvvetini bulunuz. Aynı cismin yerden bağlantısı kesilmeksizin A noktasını geçebileceği maksimum hızı bulunuz.

## Örnek Problem 3 Çözüm (6th. Ed. 3/51. problem)



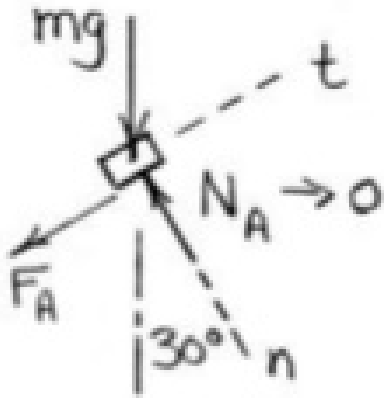
$$\sum F_n = ma_n = \frac{mv^2}{\rho}$$

$$mg - N_B = \frac{mv^2}{\rho} \Rightarrow N_B = m\left(g - \frac{v^2}{\rho}\right)$$

$$N_B = m\left(g - \frac{v^2}{\rho}\right) = 2\left(9.81 - \frac{3.5^2}{2.4}\right)$$

$$N_B = 9.41 \text{ N}$$

## Örnek Problem 3 Çözüm (6th. Ed. 3/51. problem)



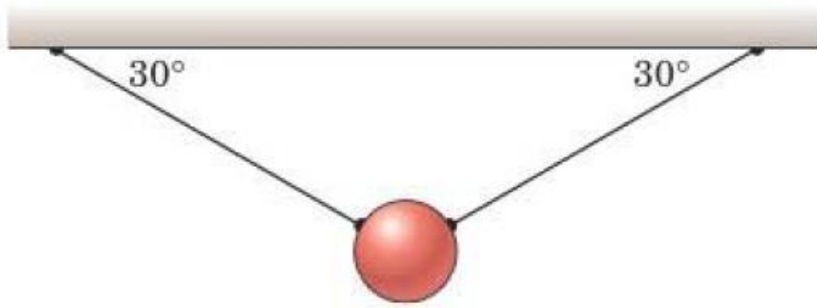
Eğer A noktasındaki normal kuvvet  $N_A = 0$  olursa arabanın yerle teması kesilmiş demektir.

$$\sum F_n = ma_n = \frac{mv^2}{\rho}$$

$$mg \cos 30 = \frac{mv^2}{\rho} \Rightarrow v^2 = \rho g \cos 30$$

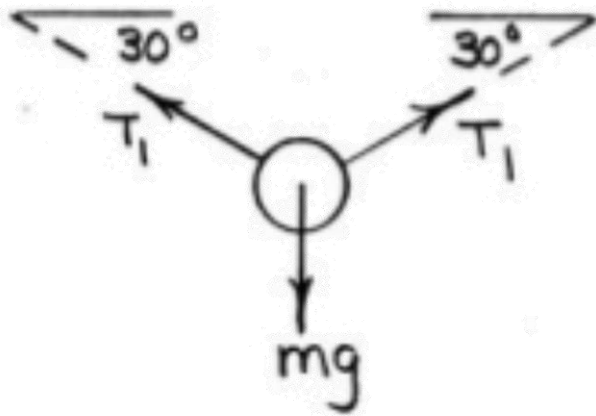
$$v = 4.52 \text{ m/s}$$

## Örnek Problem 4 (6th. Ed. 3/66. problem)



Küçük küre iki telin ucunda dengede şekildeki gibi dururken aniden telin biri kopuyor. Kopmadan hemen sonra sağlam telde oluşan gerilme ile ilk durumdaki gerilme arasındaki  $k$  oranını bulunuz.

# Örnek Problem 4 Çözüm (6th. Ed. 3/66. problem)



Dengede iken

$$\sum F = 0 \Rightarrow T_1 \cos 60 + T_1 \cos 60 = mg$$

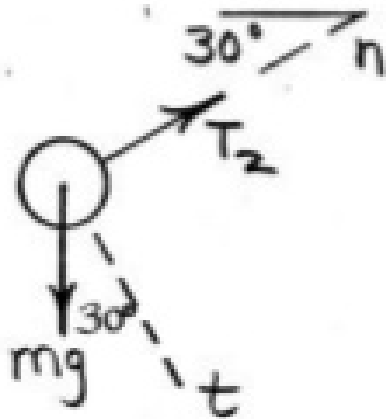
$$T_1 = mg$$

Telin kopmasının hemen arkasından

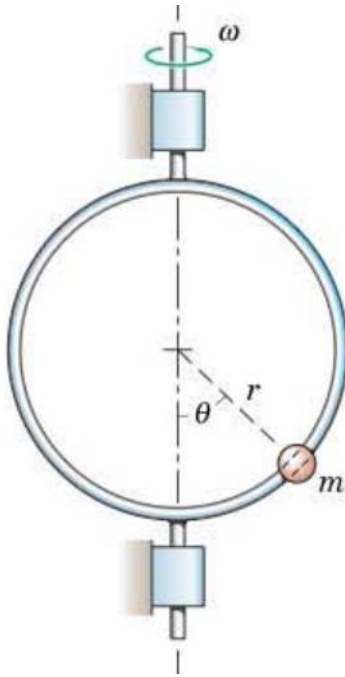
$$\sum F_n = ma_n = 0$$

$$T_2 = mg \sin 30$$

$$k = \frac{T_2}{T_1} = \frac{mg \sin 30}{mg} = \sin 30 = 0.5$$

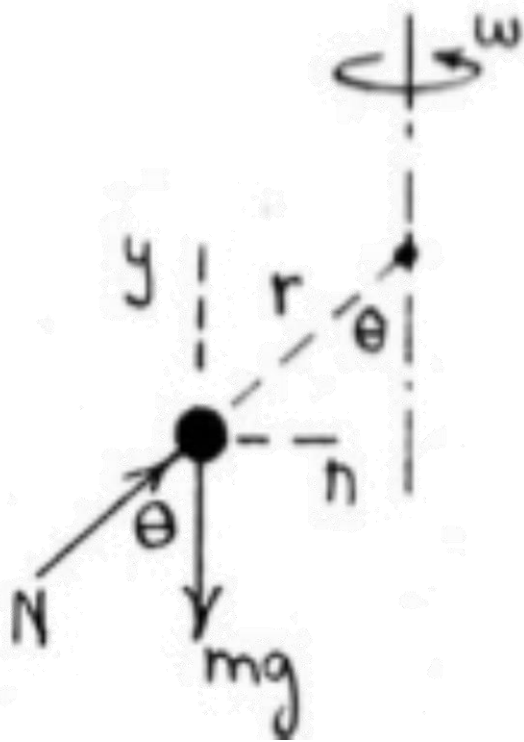


## Örnek Problem 5 (6th. Ed. 3/73. problem)



Kütlesi  $m$  olan küçük bir boncuk yarıçapı  $r$  olan ve dikey eksen etrafında dönen bir halkaya geçirilmiştir. Boncuğun açısal konumu  $\theta$ 'yi gözlemleyerek halkanın dikey eksen etrafındaki açısal hızı  $\omega$  hakkında nasıl karar verilebileceğini gösteriniz.

# Örnek Problem 5 Çözüm (6th. Ed. 3/73. problem)



$$\sum F_y = 0: N \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$\sum F_n = ma_n = \frac{mv^2}{\rho}$$

$$v = r \sin \theta \omega; \rho = r \sin \theta$$

$$N \sin \theta = \frac{m(r \sin \theta)^2 \omega^2}{r \sin \theta}$$

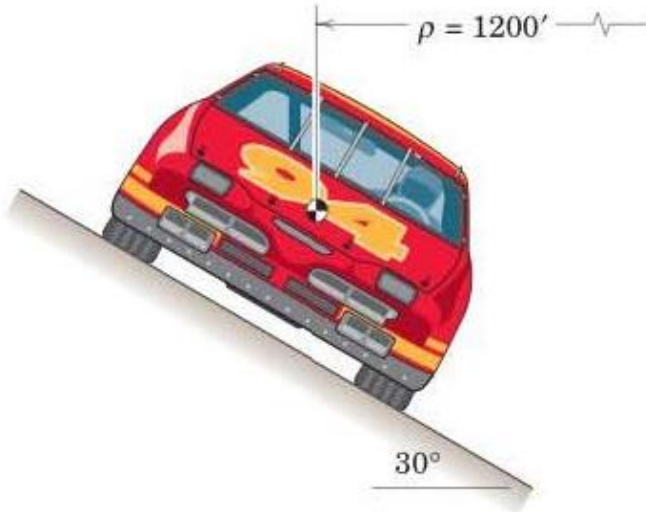
$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = m r \sin \theta \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r \cos \theta}}$$

Eşitlikten  $\cos \theta = \frac{g}{r \omega^2} \leq 1$  olduğunu

görüyoruz bu nedenle  $\omega^2 = \frac{g}{r}$  sınır değerdir.



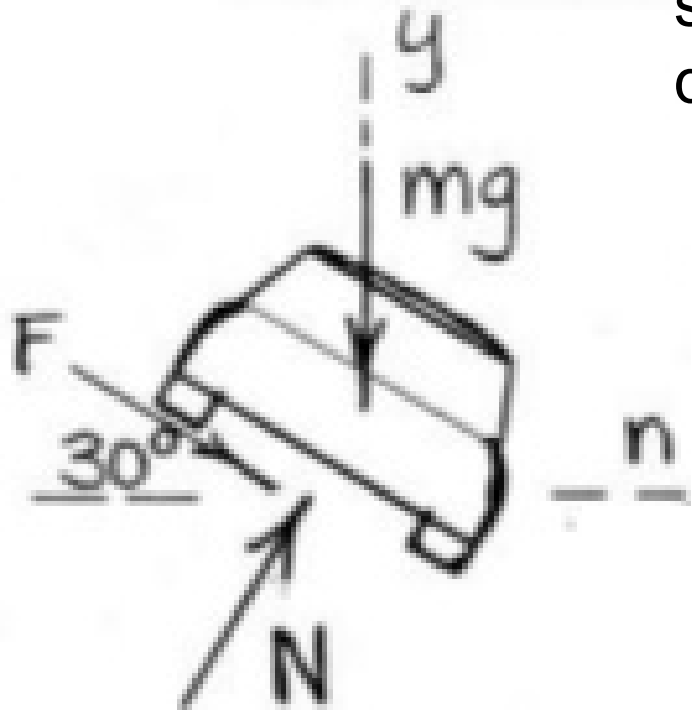
## Örnek Problem 6 (6th. Ed. 3/82. problem)



Yarış arabasının yana kaymadan yapabileceği maximum hızı  $v$  sürtünmeyi dikkate almaksızın bulunuz. Ek olarak statik sürtünme katsayısı  $\mu_s = 0.90$  kullanarak max. ve min. Hızı bulunuz.

## Örnek Problem 6 Çözüm (6th. Ed. 3/82. problem)

Kaynanın olmadığı durum için serbest cisim diyagramındaki  $F = 0$  dir.



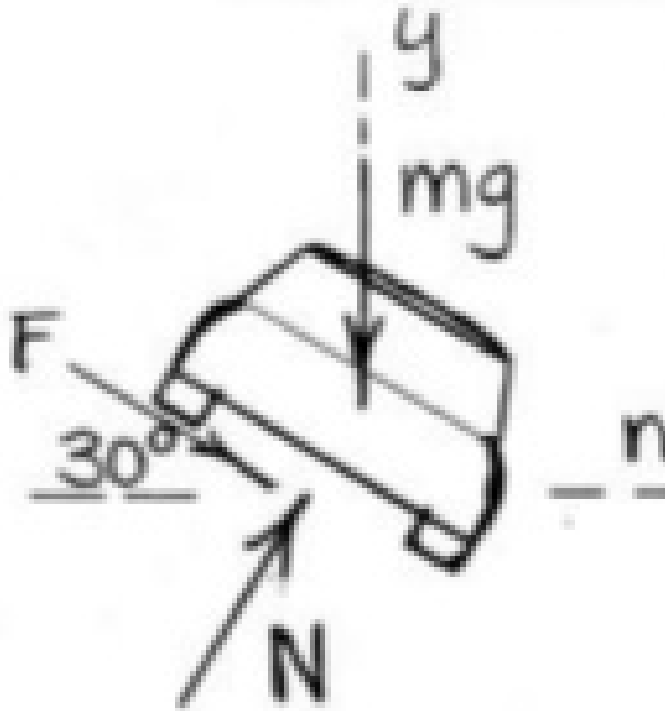
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N \cos 30 - mg = 0$$

$$N = \frac{mg}{\cos 30}$$

$$\sum F_n = \frac{mv^2}{\rho} \Rightarrow N \sin 30 = \frac{mv^2}{\rho}$$

$$\frac{mg}{\cos 30} \sin 30 = \frac{mv^2}{\rho} \Rightarrow v = 149.4 \frac{ft}{s}$$

## Örnek Problem 6 Çözüm (6th. Ed. 3/82. problem)



Statik sürtünme katsayısı  $\mu_s = 0.90$  kullanarak max. ve min. hızı bulunuz.

$v_{min} = 0$ , durumunda arabanın kaymaması için yolun eğiminin sürtünme katsayısından küçük veya eşit olması gerekir. Yolun eğimi  $30^\circ$  verilmiş. Kontrol edelim

$v_{min} = 0$  iken araba kayıyor mu?

$$\tan(\theta_{max}) = \mu_s \Rightarrow \theta_{max} = \tan^{-1}(\mu_s)$$

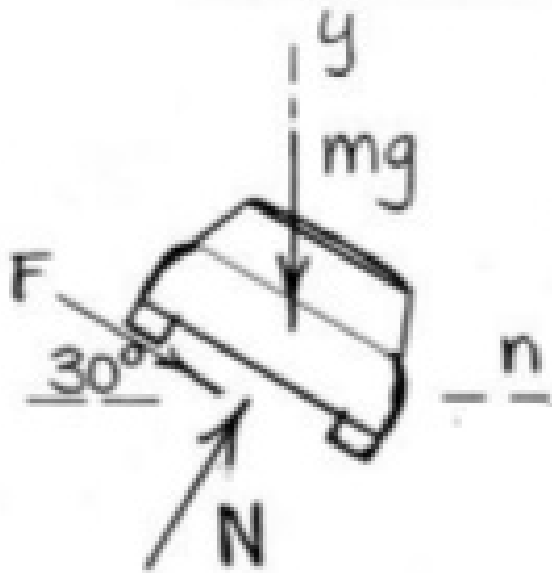
$$\theta_{max} = 42^\circ > 30^\circ$$

Araba dururken kaymaz.

## Örnek Problem 6 Çözüm (6th. Ed. 3/82. problem)

Statik sürtünme katsayısı  $\mu_s = 0.90$  kullanarak max. ve min. hızı bulunuz.

$v_{max}$  için ise cisme etkiyecek maksimum sürtünmeyi bulmamız gerekiyor.

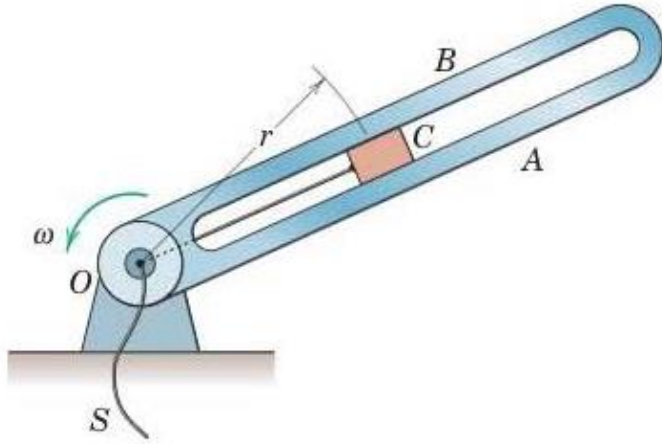


$$\sum F_y = 0: N \cos 30 - mg - \mu_s N \sin 30 = 0$$

$$\sum F_n = \frac{mv^2}{\rho}: N \sin 30 + \mu_s N \cos 30 = \frac{mv^2}{\rho}$$

$$v_{max} = 345 \text{ ft/s}$$

## Örnek Problem 7 (6th. Ed. 3/86. problem)



Üzerine yuva açılmış kol yatay düzlemde dikey eksen etrafında dönmektedir. Bu esnada 3 lb ağırlığındaki kayar uzuv 2 in/sec hızla S ipi marifetiyle çekilmektedir. Bu anda  $r = 9 \text{ in}$ ,  $\omega = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ve  $\alpha = -\frac{2\text{rad}}{\text{s}^2}$ . İpteki gerilmeyi ve normal kuvveti bulun. Kayan uzuv yuvanın A mı B mi tarafıyla temas halindedir gösterin.

## Örnek Problem 7 Çözüm (6th. Ed. 3/86. problem)

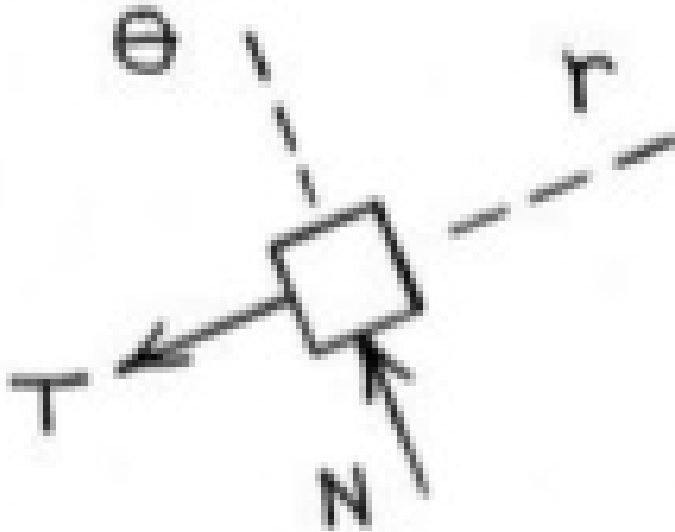
---

$$\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$g = 32.2 \frac{ft}{s^2}$$

$$-T = \frac{3}{32.2} \left( 0 - \frac{9}{12} 6^2 \right)$$

$$T = 2.52 \text{ lb}$$



## Örnek Problem 7 Çözüm (6th. Ed. 3/86. problem)

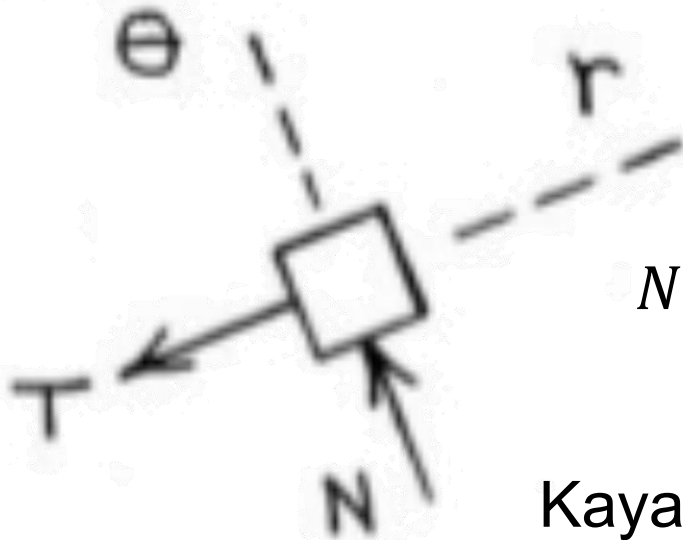
$$\sum F_{\theta} = ma_{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$g = 32.2 \frac{ft}{s^2}$$

$$N = \frac{3}{32.2} \left( \frac{9}{12} (-2) + 2 \left( -\frac{2}{12} \right) (6) \right)$$

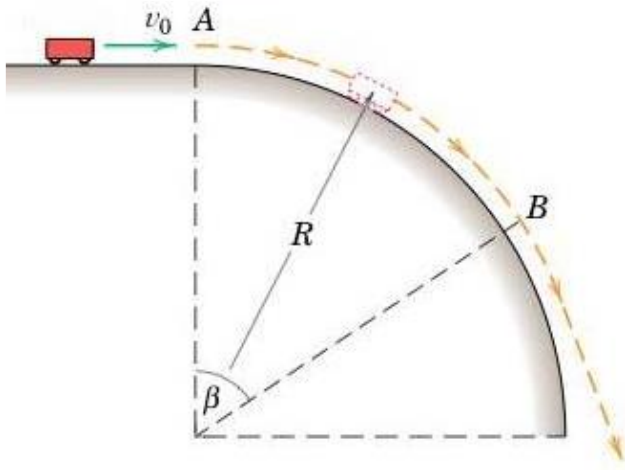
$$N = -0.326 \text{ lb}$$

Kayan uzuv yuvanın B tarafıyla temas halindedir.



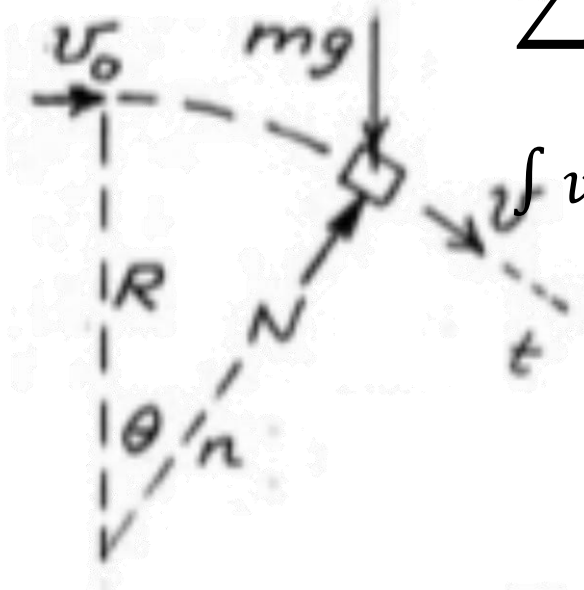
## Örnek Problem 8 (6th. Ed. 3/93. problem)

A aracının ilk hızına  $v_0$  bağlı  $\beta$ 'yi bulan bir ifade elde edin.  $v_0 = 0$  için  $\beta$ 'yi belirleyin.





# Örnek Problem 8 Çözüm (6th. Ed. 3/93. problem)



$$\sum F_t = ma_t; mg \sin \theta = ma_t, a_t = g \sin \theta$$

$$\int v dv = \int a_t ds; \int_{v_0}^v v dv = \int_0^\theta g \sin \theta (R d\theta)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \theta)$$

$$\sum F_n = ma_n; mg \cos \theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

$$N = mg \cos \theta - \frac{mv^2}{R}$$

$$N = mg \cos \theta - \frac{m}{R} (v_0^2 + 2gR(1 - \cos \theta))$$

$$N = mg \left( 3 \cos \theta - 2 - \frac{v_0^2}{gR} \right)$$

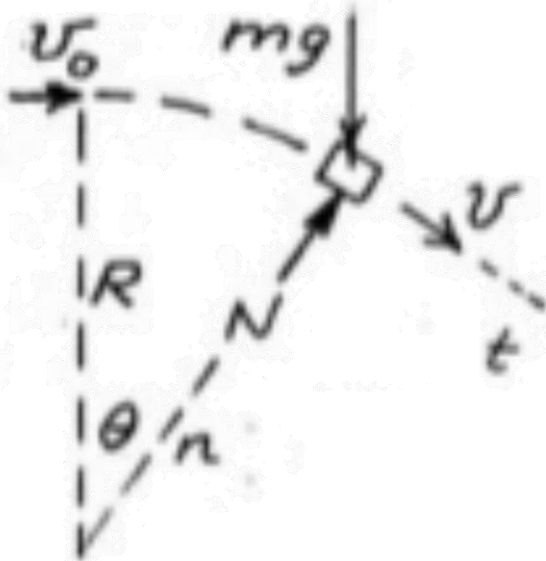
# Örnek Problem 8 Çözüm (6th. Ed. 3/93. problem)

$N = 0$  olduğunda,  $\theta = \beta$

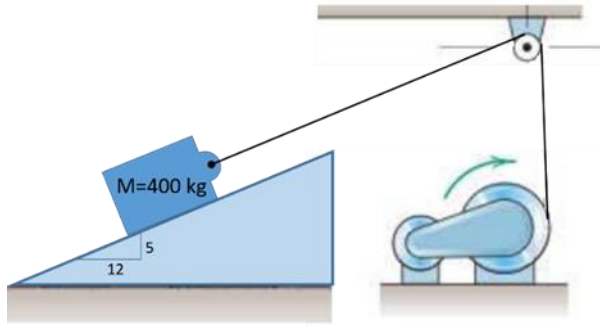
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$$

$v_0 = 0$  için

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right) = 48.2^\circ$$

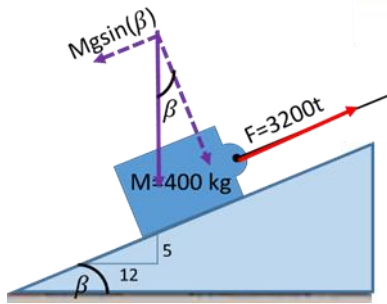


## Örnek Problem 9 (Geçen Yılın Sınav Sorusu)



Şekilde gösterilen motor dönerek ipte  $F = 3200t$  Newton'luk bir kuvvet oluşturmaktadır. Bu kuvvet eğik düzlemde hareketsiz duran  $m = 400 \text{ kg}$  kütleli bir cismi hareket ettirmek için kullanılmaktadır. Motor çalışmaya başladıktan 2 saniye sonrasında kutunun ivmesi, hızı ve kat ettiği mesafeyi bulunuz. Burada  $t$  saniye,  $F$  kuvveti zamanın bir fonksiyonudur.

# Örnek Problem 9 Çözüm (Geçen Yılın Sınav Sorusu)



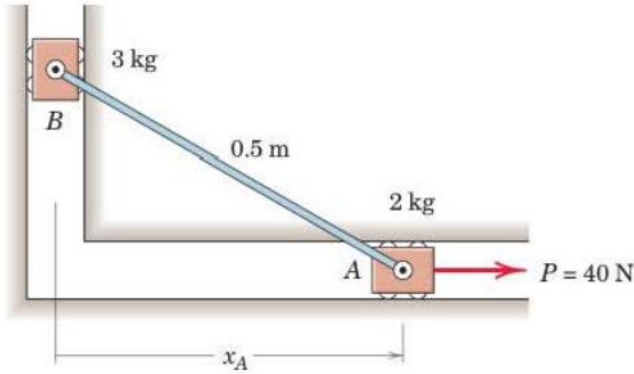
$$\sum F = ma \rightarrow \frac{3200t - 400 \cdot 9.81 \cdot 5/13}{400} = a$$

$$a = 8t - 3.77 \rightarrow a(2) = 12.23 \text{ m/s}^2$$

$$v = \int_0^2 a dt = 4t^2 - 3.77t = 8.45 \text{ m/s}$$

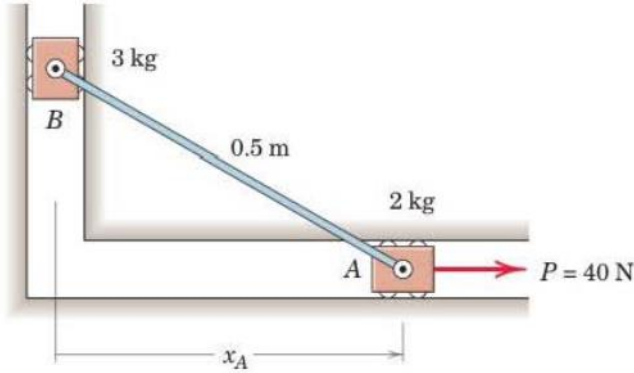
$$s = \int_0^2 v dt = \frac{4t^3}{3} - \frac{3.77t^2}{2} = 3.12 \text{ m}$$

## Örnek Problem 10 (Geçen Yılın Ödev Sorusu)



A ve B kızakları ağırlıksız sağlam  $l=0.5 \text{ m}$  uzunluğunda bir çubuğun ucuna bağlanmıştır. Şekilde görülen yatay düzlemde sürtünmesiz yolda hareket etmektedir. A kızağı  $x_A = 0.4 \text{ m}$ , konumunda iken hızı sağa doğru  $v_A = 0.9 \text{ m/s}$ , dir. Her iki kızağın ivmelerini ve bu anda çubukta oluşan kuvveti bulunuz.

# Örnek Problem 10 Çözüm (Geçen Yılın Ödev Sorusu)



$$x_A^2 + x_B^2 = l^2$$

İse ifadenin birinci türevi ile hızları içeren bir ifade buluruz.

$$2x_A \dot{x}_A + 2x_B \dot{x}_B = 0$$

$$2x_A v_A + 2x_B v_B = 0$$

$$2 * 0.4 * 0.9 + 2 * 0.3 * v_B = 0$$

$$v_B = 1.2 \text{ m/s}$$

$$2x_A v_A + 2x_B v_B = 0$$

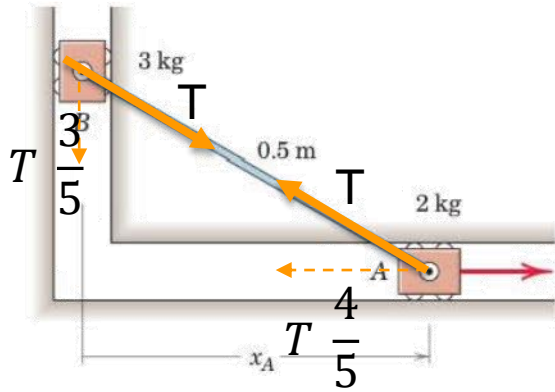
İfadesinin türevi ile ise ivmelerin ilişkisini içeren bir denklem elde ederiz.

$$2v_A^2 + 2x_A a_A + 2v_B^2 + 2x_B a_B = 0$$

Bu denklemde  $a_A$  ve  $a_B$  ifadeleri bilmiyoruz.

# Örnek Problem 10 Çözüm (Geçen Yılın Ödev Sorusu)

$a_A$  ve  $a_B$  ifadelerini bulmak için kinetik ilişkilere başvuruyoruz.



$$\sum F_y = m_B a_B \Rightarrow -\frac{T * 3}{5} = 3a_B \Rightarrow a_B = -\frac{T * 3}{15}$$

$$\sum F_x = m_A a_A \Rightarrow P - \frac{T * 4}{5} = 2a_A \Rightarrow a_A = 20 - \frac{T * 4}{10}$$

$$2 * 0.9^2 + 2 * 0.4 * a_A + 2 * 1.2^2 + 2 * 0.3 * a_B = 0$$

$$1.62 + 0.8 * \left(20 - \frac{T * 4}{10}\right) + 2.88 + 0.6 * \left(-\frac{T * 3}{15}\right) = 0$$

$$1.62 + 16 + 2.88 = 0.44T \Rightarrow T = 46.59 \text{ N}$$

$$a_B = -\frac{T * 3}{15} = 9.31 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = 20 - \frac{T * 4}{10} = 1.364 \text{ m/s}^2$$