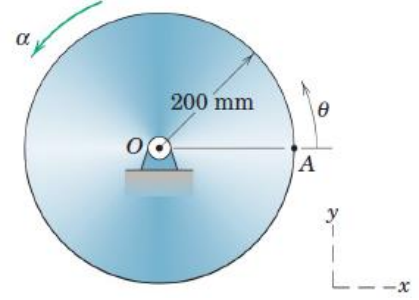


**MAK209 DİNAMİK**  
**ÖDEV 1**  
Dr. Nurdan Bilgin

**Teslim Tarihi ve Yeri: 25/12/2019, Ders Saatinde Teslim**

**SORULAR:**

**Soru 1.** Yanda verilen dairesel disk üzerindeki A noktası  $t = 0$  anında  $\theta = 0$  pozisyonundadır. Aşağıdaki her bir durum için A noktasının hızını ve ivmesini sabit  $i$  ve  $j$  birim vektörleri cinsinden bulunuz.



- Diskin  $t = 0$  anındaki açısal hızı  $\omega_0 = 0.1 \text{ rad/s}$  ve açısal ivmesi  $\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$  olarak ölçülmektedir.  $t = 1 \text{ sn.}$  sonrasında A noktasının hızını ve ivmesini sabit  $i$  ve  $j$  birim vektörleri cinsinden bulunuz.
- Diskin  $t = 0$  anındaki açısal hızı  $\omega_0 = 0.1 \text{ rad/s}$  ve açısal ivmesi  $\alpha = 2t \text{ rad/s}^2$  olarak ölçülmektedir.  $t = 2 \text{ sn.}$  sonrasında A noktasının hızını ve ivmesini sabit  $i$  ve  $j$  birim vektörleri cinsinden bulunuz.
- Diskin  $t = 0$  anındaki açısal hızı  $\omega_0 = 0.1 \text{ rad/s}$  ve açısal ivmesi  $\alpha = 2\omega \text{ rad/s}^2$  olarak ölçülmektedir.  $t = 1 \text{ sn.}$  sonrasında A noktasının hızını ve ivmesini sabit  $i$  ve  $j$  birim vektörleri cinsinden bulunuz.
- Diskin  $t = 0$  anındaki açısal hızı  $\omega_0 = 0.1 \text{ rad/s}$  ve açısal ivmesi  $\alpha = 2\theta \text{ rad/s}^2$  olarak ölçülmektedir.  $t = 2 \text{ sn.}$  sonrasında A noktasının hızını ve ivmesini sabit  $i$  ve  $j$  birim vektörleri cinsinden bulunuz.

**Çözüm:**

a.)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_0^1 2 dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \Rightarrow 2t = \omega - \omega_0 \Rightarrow \omega = 2t + \omega_0 = 2.1 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \int_0^1 (2t + \omega_0) dt = t^2 + \omega_0 t = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$r = 0.2 * [\cos(1.1)i + \sin(1.1)j] = 0.2 * [0.453i + 0.89j]$$

$$a_A = (\omega^2 r)[k \times k \times [0.453i + 0.89j]] + (\alpha r)[k \times [0.453i + 0.89j]]$$

$$a_A = (\omega^2 r)[k \times k \times [0.453i + 0.89j]] + (\alpha r)[k \times [0.453i + 0.89j]]$$

$$a_A = -0.7566i - 0.6046j$$

b.)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_0^2 2t dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \Rightarrow t^2 = \omega - \omega_0 \Rightarrow \omega = 2^2 + \omega_0 = 4.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ ve } \alpha = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \int_0^2 (t^2 + \omega_0) dt = \frac{t^3}{3} + \omega_0 t = \frac{8}{3} + 0.2 = 2.866$$

$$r = 0.2 * [\cos(2.866)i + \sin(2.866)j]$$

$$a_A = 3.0186i - 1.6827j$$

c.)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_0^1 dt = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{2\omega} \Rightarrow t = \frac{1}{2} [\ln(\omega) - \ln(\omega_0)] \Rightarrow$$

$$\omega = \omega_0 e^{2t} = 0.73 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ ve } \alpha = 1.4778 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \int_0^1 \omega_0 e^{2t} dt = \frac{\omega_0}{2} (e^2 - 1) = 2.6799$$

$$a_A = 4.3649i - 4.6111j$$

d.)

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \Rightarrow \int_0^{\theta} \alpha d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega \Rightarrow \int_0^{\theta} 2\theta d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega \Rightarrow$$

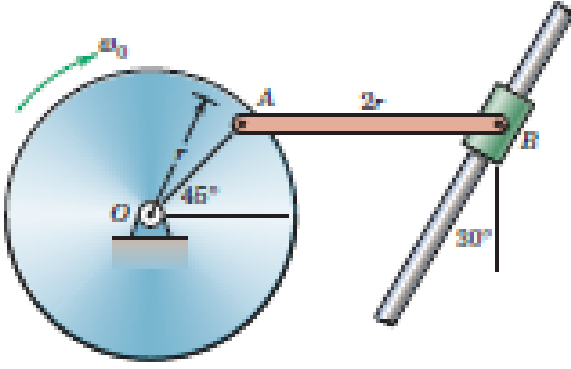
$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = \theta^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2\theta^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_0^2 dt = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta^2 + \omega_0^2}} \Rightarrow 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sinh(10\sqrt{2}\theta) \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{\sinh\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)}{10\sqrt{2}} = 0.5961 \text{ rad}$$

$$\omega^2 = 2\theta^2 + \omega_0^2 = 0.7207 \text{ ve } \alpha = 2\theta = 1.1922$$

$$a_A = -0.2198i + 0.1390j$$



**Soru 2:** Şekilde verilen an için  $AB$  linkinin açısal hızı  $\omega_{AB}$  yi ve  $B$  kayar uzvunun doğrusal hızı  $v_B$ 'yi  $\omega_0$  ve  $r$ 'nin bilindiği varsayımıyla bulunuz.

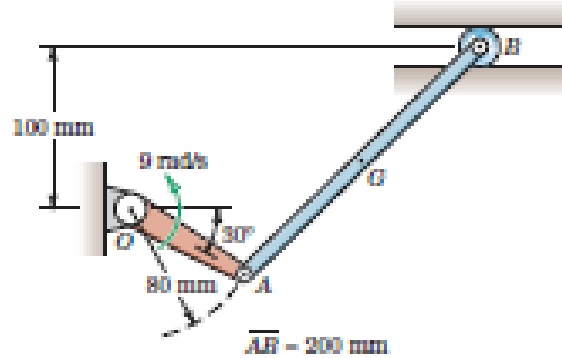
**Çözüm:**

$$v_A + \omega_{AB} \times r = v_B \Rightarrow \omega_0 r \left( \frac{\sqrt{2}}{2} i - \frac{\sqrt{2}}{2} j \right) + 2\omega_{AB} r (j) = v_B \left( \frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} j \right)$$

$$v_B = \omega_0 r \sqrt{2}$$

$$2\omega_{AB} r = \frac{\omega_0 r \sqrt{2} \sqrt{3}}{2} + \frac{\omega_0 r \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{\omega_0 \sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) = 0.9659 \omega_0$$

**Soru 3:** Şekilde verilen an için  $AB$  linkinin açısal hızı  $\omega_{AB}$  yi ve  $B$  kayar uzvunun doğrusal hızı  $v_B$ 'yi bulunuz.



**Çözüm:**

$$9 * 0.04k \times (\sqrt{3}i - j) + \omega_{AB}(-k) \times (0.143i + 0.14j) = v_B i$$

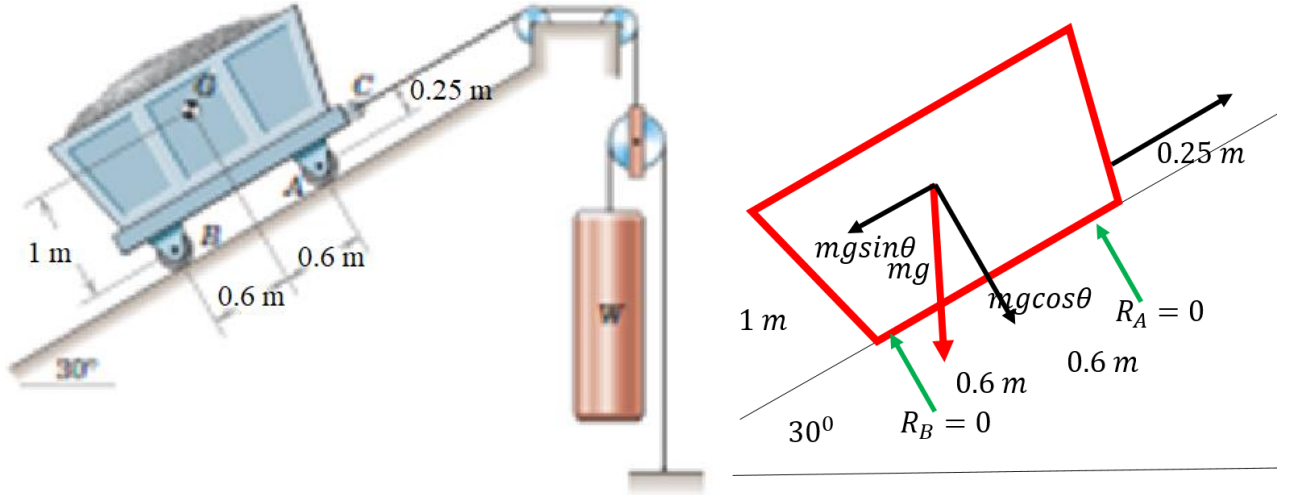
$$0.36 * (i + \sqrt{3}j) + \omega_{AB}(0.14i - 0.143j) = v_B i$$

$$0.36 * \sqrt{3}j - \omega_{AB}(0.143j) = 0 \Rightarrow \omega_{AB} = 0.36 * \frac{\sqrt{3}}{0.143} = 4.37 \text{ rad/s}$$

$$v_B = 0.36 + 0.14 * 4.37 = 0.97 \text{ m/s}$$

**Soru 4:** 2 ton ağırlığındaki kömür yüklü arabanın B ile gösterilen arka tekeri etrafında dönmesini engelleyecek karşı ağırlığı oluşturacak silindir kütlesi ne olmalıdır.

**Çözüm:**



$$m = 2 \text{ ton} = 2000 \text{ kg}$$

$$\sum F = ma \text{ ve } \sum M_B = ma * d$$

$$\sum F = ma \Rightarrow T - mg \sin \theta = ma$$

$$T * 0.25 + mg \cos \theta * 0.6 - mg \sin \theta * 1 = ma * 1$$

$$(mg \sin \theta + ma) * 0.25 + mg \cos \theta * 0.6 - mg \sin \theta * 1 = ma * 1$$

$$\frac{g(0.6 * \cos \theta - 0.75 * \sin \theta)}{0.75} = a = 1.891 \text{ m/s}^2$$

$$T = mg \sin \theta + ma = 2000(9.81 * \sin 30 + 1.891) = 13592$$

$$T = 2W = 2mg \Rightarrow m = \frac{T}{2g} = \frac{13592}{2 * 9.81} = 692.76 \text{ kg}$$

**Soru 5:** Şekildeki sistem gösterildiği anda durgunluktan serbest bırakılıyor. Eğik düzlem üzerindeki silindir kaymadan yuvarlandığına göre silindirin açısal ivmesini ve silindirin kaymadan yuvarlanmasını sağlayan sürtünme katsayısını bulunuz.

**Çözüm:**

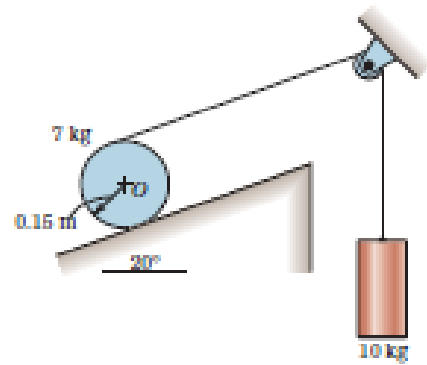
$$T - 10g = -10a \Rightarrow \frac{10g - T}{10} = a_t$$

$$\alpha = \frac{a_t}{2r} \Rightarrow \bar{a} = a_0 = \frac{a_t}{2}$$

$$\sum F = m\bar{a} \text{ ve } \sum M_O = I_G \alpha = \frac{I a_t}{2r}$$

$$\sum F = m\bar{a} \Rightarrow T - mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = m \frac{a_t}{2} \quad (1)$$

$$\sum M_O = I_G \alpha = \frac{I a_t}{2r} \Rightarrow T * r + \mu_k mg \cos \theta * r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a_t}{2r}$$



$$T + \mu_k mg \cos \theta = \frac{1}{4} ma_t \quad (2)$$

$$\Rightarrow 2 * T - mg \sin \theta = a_t \left( \frac{m}{2} + \frac{m}{4} \right) = a_t * 5.25$$

$$\Rightarrow 2 * T - mg \sin \theta = \left( \frac{10g - T}{10} \right) * 5.25$$

$$\Rightarrow 20 * T - 10 * mg \sin \theta = 52.5g - 5.25T$$

$$T = \frac{52.5g + 70g \sin(\theta)}{25.25} = 29.7 \text{ N}$$

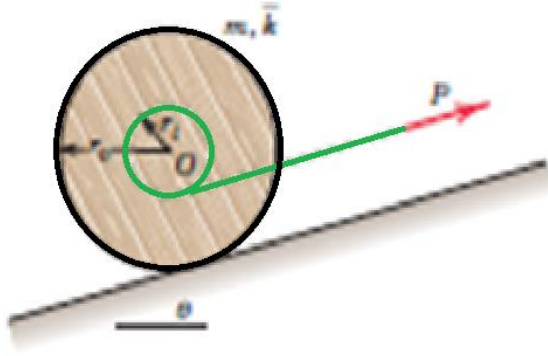
$$\frac{10g - T}{10} = a_t = 6.84$$

$$\alpha = \frac{a_t}{2r} = 22.8$$

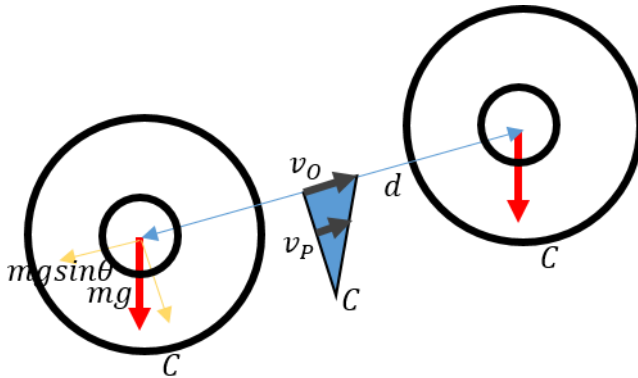
Bir denklemden

$$\mu_k = \frac{\left( T - mg \sin \theta - m \frac{a_t}{2} \right)}{mg \cos \theta} = \frac{\left( 29.7 - 7 * 9.81 * \sin 20 - \frac{1}{2} * 7 * 6.84 \right)}{7 * 9.81 * \cos 20} = -0.274$$

$$\mu_k = 0.274$$



**Soru 6:** Kütlesi  $m$  ve merkezinin eylemsizlik yarıçapı  $k$  olan şekildeki sistem gösterildiği gibi göbeğin etrafındaki tambura sarılı ip vasıtasıyla  $P$  kuvveti ile çekilmektedir. Teker merkezi  $d$  kadar yukarı yönde hareket ettiğinde tekerin merkezinin çizgisel hızını bulunuz.  $P$  ilk uygulanmaya başladığında teker durgunluktadır.



$$\frac{v_O}{r_O} = \frac{v_P}{r_O - r_i} \Rightarrow v_P = \frac{v_O}{r_O} (r_O - r_i)$$

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

$$U_{1-2} = P * \frac{r_O - r_i}{r_O} * d - mg \sin \theta * d$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\omega = \frac{v_O}{r_O}, \text{ ve } I = m k^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} m k^2 \frac{v_O^2}{r_O^2} = \frac{1}{2} m v_O^2 \left( 1 + \frac{k^2}{r_O^2} \right)$$

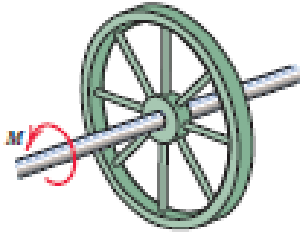
$$P * \frac{r_O - r_i}{r_O} * d - mg \sin \theta * d = \frac{1}{2} m v_O^2 \left( 1 + \frac{k^2}{r_O^2} \right)$$

Son denklemde tek bilinmeyen O merkezinin hızıdır, Dolayısıyla çözülür.

$$[P(r_O - r_i) - m g r_O \sin \theta] * d = \frac{1}{2} m v_O^2 \left( \frac{r_O^2 + k^2}{r_O} \right)$$

$$[P(r_O - r_i) - m g r_O \sin \theta] * \frac{2 r_O d}{m(r_O^2 + k^2)} = v_O^2$$

$$v_O = \sqrt{P(r_O - r_i) - m g r_O \sin \theta} \sqrt{\frac{2 r_O d}{m(r_O^2 + k^2)}}$$

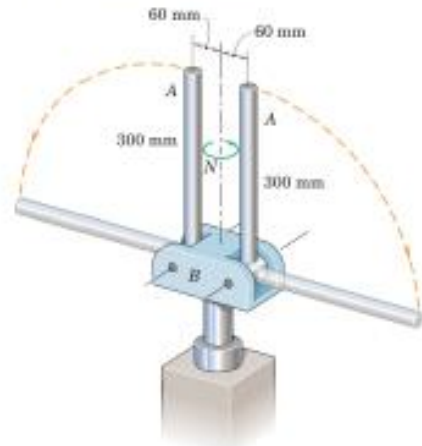


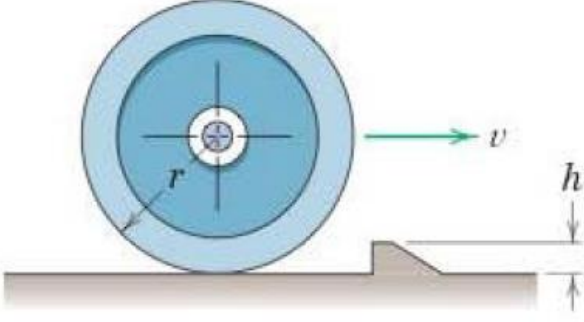
**Soru 7:** 75 kg volan mil eksenini etrafında  $k = 0.50 \text{ m}$ 'lik bir eylemsizlik yarıçapına sahiptir ve  $M = 10(1 - e^{-t}) \text{ Nm}$ 'lik döndürme momentine maruz kalmaktadır. Bu moment altında durgunluktan üç saniye sonra volanın açılma hızı ne olur.

Çözüm: Ders Notlarında Sorunun Çözümü Var.

**Soru 8:** 300 mm uzunluğunda 1.5 kg kütleli çubuklar platforma menteşe ile bağlıdır. Platformun kütlesi 4 kg ve jirasyon yarıçapı 40 mm şeklinde verilmektedir. Platform şekilde görüldüğü pozisyonda  $N=300$  devir/dakika hızı ile dönmektedir. Dikey durumda duran çubuklar serbest bırakıldığında platformun hızı ne olur.

Çözüm: Ders Notlarında Sorunun Çözümü Var.

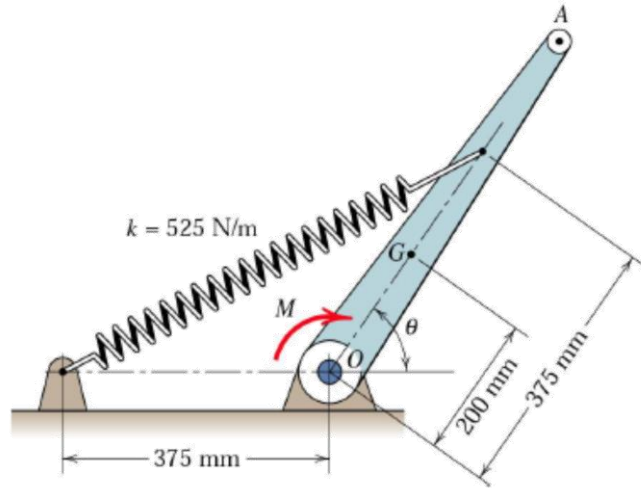




**Soru 9:** Tekerin engelin üzerinden aşmasına yetecek en küçük hızı bulunuz. Tekerin jirasyon yarıçapı  $k$  ve teker kaymadan dönüyor. Teker yarıçapı yarıya düştüğünde gerekli en küçük hız ne oranda değişir.

Çözüm: Ders Notlarında Sorunun Çözümü Var.

**Soru 10:**  $O$  merkezi etrafında dönen  $OA$  kolu  $5.5 \text{ kg}$  dır ve  $O$  eksenini etrafında jirasyon yarıçapı  $250 \text{ mm}$  dir. Durgun durumda dik pozisyonundadır. Kola bağlı yayın yay katsayısı  $k = 525 \text{ N/m}$  dir ve yay durgun durumda nominal boydadır. Kol  $\theta = 0^\circ$  dereceye ulaştığında açısal hızı  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  ise kola uygulanan sabit momentini hesaplayınız.

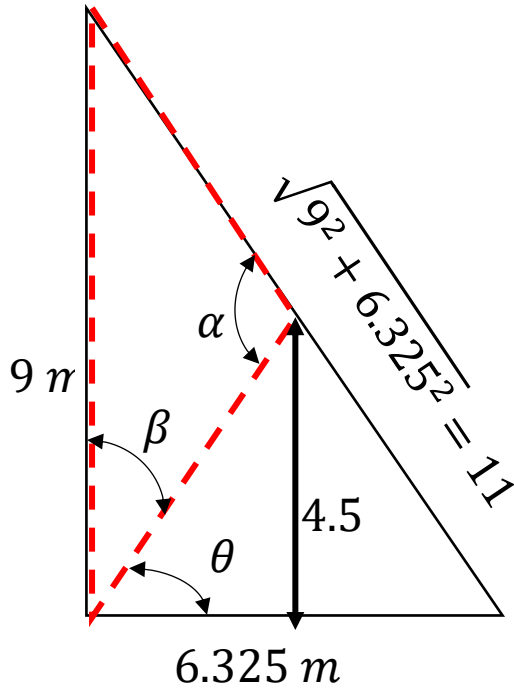
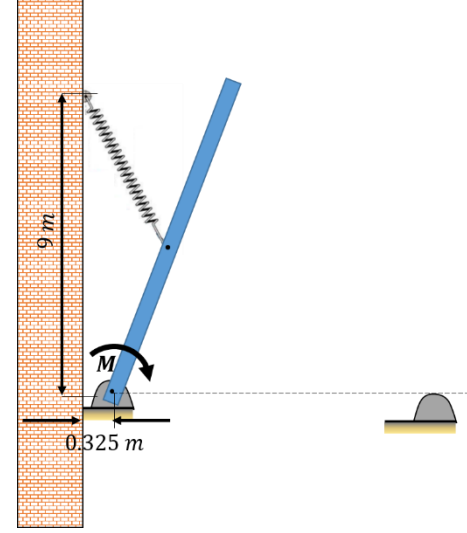


Çözüm: Ders Notlarında Sorunun Çözümü Var.

## Konuya İlişkin Başka Örnekler.

### Geçmiş Yıllar Final Sorusu:

12 m uzunluğunda açılır kapanır köprü sisteminin ağırlığı 100 kg dır. Köprünün dönme noktasına göre jirasyon yarıçapı 0.5 m dir. Köprü tam ortasından bağlanan yayla olağan koşullarda askıda tutulmaktadır. Gerekli olduğunda dönme noktasından uygulanan M momenti aracılığıyla açılmaktadır. Yayın nominal uzunluğu 4.75 m ve yay sabiti  $k=500$  N/m dir. Şekilde görünen askı pozisyonunda, köprünün ağırlığının etkisi altında yay 1.25 m gerilmiş durumdadır. Köprü açık konuma gelmeden hemen önceki açısal hızı  $\omega = 0.4$  rad/s ise köprünün açılmasını sağlayan sabit M momentini hesaplayınız.



$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

Yayın nominal boyu;4.5 m İlk durumdaki uzama  $l_1 = 1.25$  m ikinci durumda ki uzama  $l_2 = 11 - 6 = 5$  m

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(l_2^2 - l_1^2) = 250(5^2 - 1.25^2) = 5859.35 \text{ J}$$

$$\Delta h = -4.5 \text{ m}$$

$$\Delta V_g = mg\Delta h = 100 * 9.81 * (-4.5)$$

$$\Delta V_g = -4414.5 \text{ J}$$

$$I = mk_0^2 = 25 \text{ kgm}^2$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}25 * 0.4^2 = 2$$

Momentin yaptığı iş  $dU = Md\theta$

$$9^2 = 6^2 + 6^2 - 2 * 6 * 6 * \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = 97.18^\circ \Rightarrow \beta = 41.4^\circ \Rightarrow \theta = 48.59^\circ = 0.848 \text{ rad}$$

$$U = M \int_{0.848}^0 d\theta = M(0 - 0.848) = -0.848M$$

$$-0.848M = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$-0.848M = 5859.35 \text{ J} - 4414.5 \text{ J} + 2 \text{ J}$$

$$M = -1706 \text{ Nm}$$

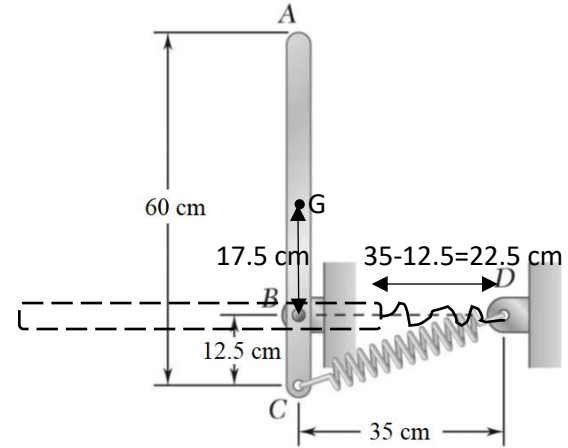


### Geçmiş Yıllar Bütünleme Sorusu:

B noktasından mafsallanmış 4 kg'lık düzgün çubuk şekilde görülen pozisyonda yay ile D noktasına bağlıdır ve dikey olarak durmaktadır. Sözü edilen yayın nominal (uzamamış boyu) 15 cm ve yay katsayısı  $k=450$  N/m dir. Çubuk bu pozisyondan serbest bırakılırsa  $90^\circ$  dönerek yatay pozisyona geldiği andaki açısal hızını bulunuz.

**Not1:** Çubuğun B noktasındaki jirasyon yarıçapı  $k_B = 0.25$  m

**Not2:** Verilen uzunluk ölçülerinin temel birim sistemi (m) cinsinden olmadığına dikkat edin.



**Çözüm:** Enerjinin korunumundan çözülür;

$$T_1 + V_{G_1} + V_{e_1} = T_2 + V_{G_2} + V_{e_2}$$

**İlk durum**  $T_1 = 0$ ;  $V_{G_1} = mgh = 4 * 9.81 * \frac{17,5}{100} = 6.867$  J

Yayın ik durumdaki uzaması( $\delta_1$ )=uzamış boyu - nominal (uzamamış boyu)

Yayın uzamış boyu =  $\sqrt{\left(\frac{12.5}{100}\right)^2 + \left(\frac{35}{100}\right)^2} = 0.37$  m  $\Rightarrow \delta_1 = 0.37 - \frac{15}{100} = 0.22$  m

$$V_{e_1} = \frac{1}{2} k \delta_1^2 = \frac{1}{2} * 450 * 0.22^2 = 10.89$$
 J

İkinci durum

$$T_2 = \frac{1}{2} I_B \omega^2; I_B = m k_B^2 = 4 * 0.25^2 = 0.25$$
 kgm<sup>2</sup>

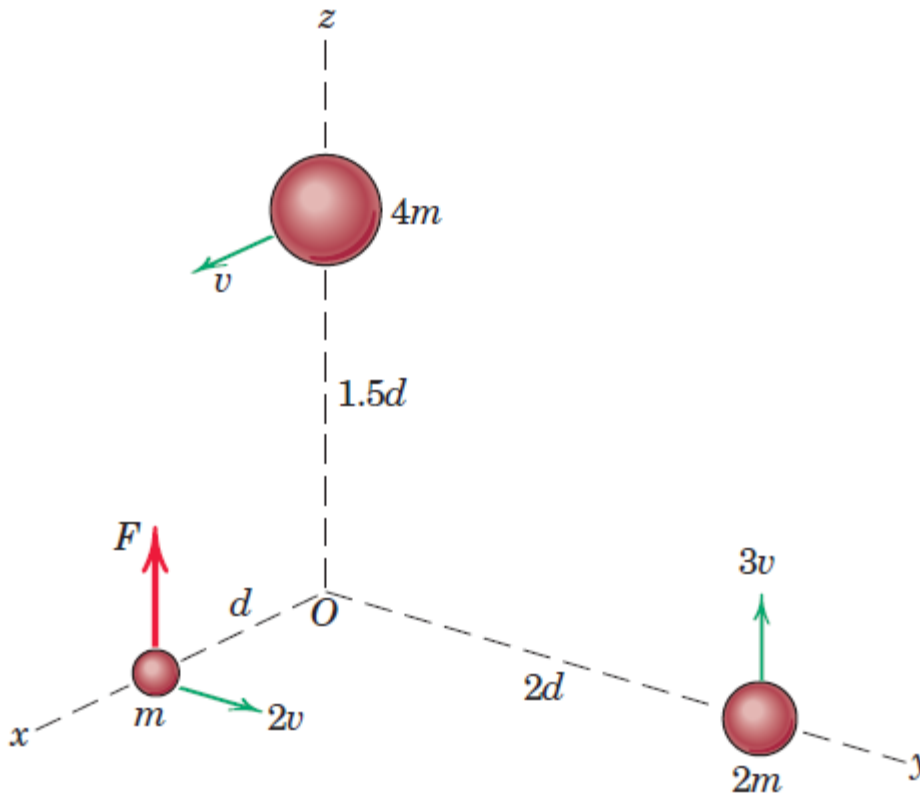
$$T_2 = \frac{1}{2} I_B \omega^2 = 0.125 \omega^2$$

$$V_{G_2} = 0; V_{e_2} = \frac{1}{2} k \delta_2^2 = \frac{1}{2} * 450 * (0.225 - 0.15)^2 = 1.265$$
 J

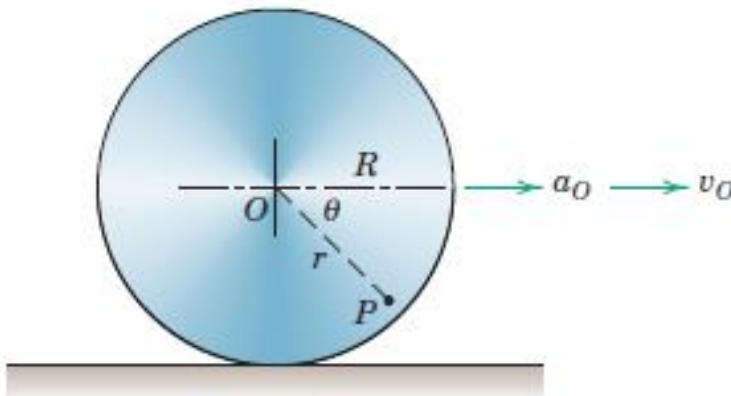
$$T_1 + V_{G_1} + V_{e_1} = T_2 + V_{G_2} + V_{e_2} \Rightarrow 0 + 6.867 + 10.89 = 0.125 \omega^2 + 0 + 1.265$$

$$\omega^2 = \frac{6.867 + 10.89 - 1.265}{0.125} = 132 \Rightarrow \omega = 11.48$$
 rad/s

**4/93** The system of three particles has the indicated particle masses, velocities, and external forces. Determine  $\bar{\mathbf{r}}$ ,  $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ ,  $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$ ,  $T$ ,  $\mathbf{H}_O$ , and  $\dot{\mathbf{H}}_O$  for this three-dimensional system.

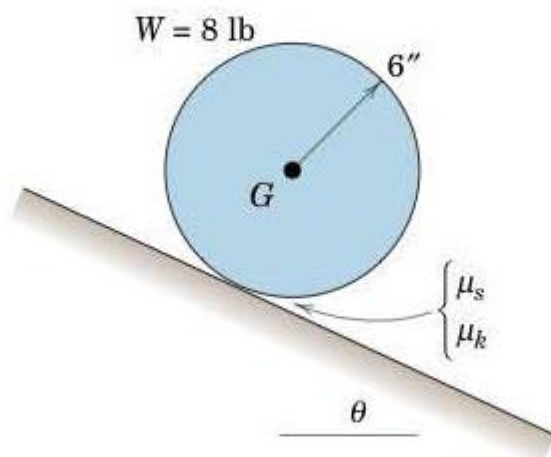


**5/125** The wheel of radius  $R$  rolls without slipping, and its center  $O$  has an acceleration  $a_O$ . A point  $P$  on the wheel is a distance  $r$  from  $O$ . For given values of  $a_O$ ,  $R$ , and  $r$ , determine the angle  $\theta$  and the velocity  $v_O$  of the wheel for which  $P$  has no acceleration in this position.



**6/79** The solid homogeneous cylinder is released from rest on the ramp. If  $\theta = 40^\circ$ ,  $\mu_s = 0.30$ , and  $\mu_k = 0.20$ , determine the acceleration of the mass center  $G$  and the friction force exerted by the ramp on the cylinder.

*Ans.*  $a = 13.80 \text{ ft/sec}^2$ ,  $F = 1.714 \text{ lb}$



**Problem 6/79**

**6/80** Repeat Prob. 6/79, except let  $\theta = 30^\circ$ ,  $\mu_s = 0.15$ , and  $\mu_k = 0.10$ .

- 6/114 The velocity of the 8-kg cylinder is 0.3 m/s at a certain instant. What is its speed  $v$  after dropping an additional 1.5 m? The mass of the grooved drum is 12 kg, its centroidal radius of gyration is  $\bar{k} = 210$  mm, and the radius of its groove is  $r_i = 200$  mm. The frictional moment at  $O$  is a constant  $3 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

